BTS tertiaire

Mathématiques

Informatique de gestion

Livre du professeur

Jean-Denis ASTIER
Françoise COMPARAT
François KUHN
France LAPLUME

NATHAN
TECHNIQUE

SOMMAIRE

ISBN : 2-09-178765-5

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Logique – Ensembles

7 **1.** V F V F V.

2. P_5.

3. P_1 et P_4.

8 **1.**

P	Q	R	(P OU Q) ET R
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

P	Q	R	S	(P ⇔ R)	$\overline{S}$
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0

9

P	$\overline{P}$	$\overline{\overline{P}}$	$\mathcal{F}$	$\overline{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\overline{\mathcal{V}}$
0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0

10

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	P ET $\overline{Q}$	P OU $\overline{Q}$	$\overline{P}$ ET Q	$\overline{P}$ OU Q
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1

12 **1.** -5.

2. a. P est fausse. Q est vraie.

b. $]e^2 - 3\,;\,+\infty[$.

c. R est vraie.

d. $]-3\,;\,e^2 - 3]$.

14 **1. a.**

P	Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	(P ⇒ Q) ET (Q ⇒ P)	P ⇔ Q
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Les propositions des deux dernières colonnes ont toujours même valeur de vérité ; elles sont donc équivalentes.

b. et **c.**

P	Q	P ⇒ Q	$\overline{P}$ OU Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P ET $\overline{Q}$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Et des tables de Boole identiques prouvent l'équivalence.

2. a. A est vraie et B fausse, donc A ⇒ B est fausse. Sa négation $\overline{A \Rightarrow B}$ est donc vraie.
A ⇔ B est fausse, car A et B n'ont pas même valeur de vérité.

b. $\overline{A}$ OU B ; A ET $\overline{B}$; ($\overline{A}$ OU B) et ($\overline{B}$ OU A).

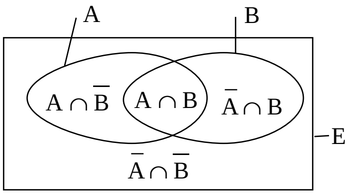
15 **1.**

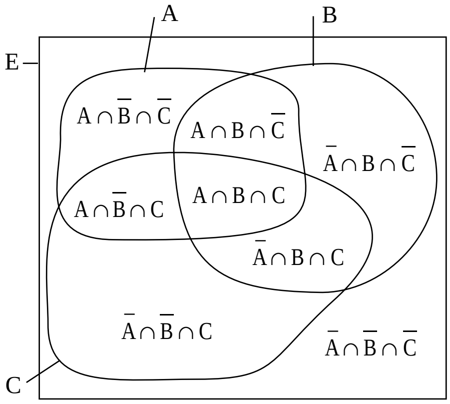
	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap B$
A	$A \cap \overline{B}$	$A \cap B$

E

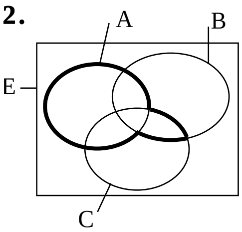
	$\overline{B}$	$\overline{B}$	B	B
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$	$\overline{A} \cap B \cap C$	$\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$
A	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	$A \cap \overline{B} \cap C$	$A \cap B \cap C$	$A \cap B \cap \overline{C}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

E



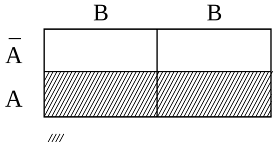


2.



: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.



: $A \cup (A \cap B) = A$

15 **1.** c n'a pas d'image.

2.

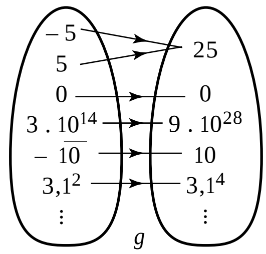
	f	h	i
Injection	0	1	0
Surjection	0	1	0
Bijection	0	1	0

18 **1.** $f(\{a\,;b\}) = \{20\}$; $f^{-1}(\{20\,;30\}) = \{a\,;b\,;c\}$; $h(\{20\,;40\,;10\}) = \{a\,;c\,;d\}$; $i^{-1}(\{b\,;d\}) = \{10\}$.

2. $h\{20\,;30\} = \{b\,;c\}$; $i\{20\,;30\} = \{a\,;c\}$.

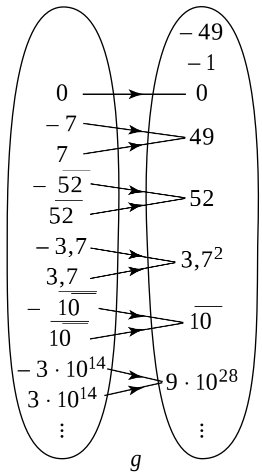
3. $h^{-1}\{a\,;b\} = \{10\,;30\}$; $i^{-1}\{a\,;b\} = \{10\,;20\}$.

19 **1. a.**



b. Vrai.

2. a.



b. g n'est pas injective, car 49 a deux antécédents ; g n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent.

20 **1.**

x	-9	$-3,1$	0	$0,04$
Arrondi à 2 décimales de $\ln x$	/	/	/	$-3,22$

x	1	$3,1$	e	10^{40}
Arrondi à 2 décimales de $\ln x$	0	1,13	1	92,10

2. -9, car il n'a pas d'image par f.

3.

y	1	0	3	0,9
Antécédent de y par g	e	1	e^3	$e^{0,9}$

y	1000	-4	-47
Antécédent de y par g	e^{1000}	e^{-4}	e^{-47}

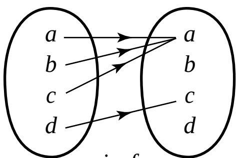
4. a.

P_1	P_2	P_3	R_1	R_2	R_3
0	1	0	1	1	1

Pour P_1, un contre-exemple est -7, qui n'a pas de logarithme.
Pour P_3, le seul contre-exemple est 0, qui n'a pas de logarithme.

b. g est bijective (théorème admis).

21 **1.**



$i \circ f$

2. $(f \circ i)\{10 ; 40\} = \{20\}$; $(h \circ f)^{-1}\{a ; b\} = \varnothing$.

22 Il s'agit d'une expérimentation, non corrigeable dans l'absolu.

23 Toutes sont vraies.

25

P	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	P ET $\mathcal{V}$	P OU $\mathcal{V}$
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

P ET $\mathcal{F}$	$\overline{\text{P}}$ ET $\overline{\mathcal{F}}$	$\overline{\text{P OU } \mathcal{F}}$
0	1	1
0	0	0

26

P	Q	$\overline{\text{P}}$ ET $\overline{\text{Q}}$	$\overline{\text{P ET Q}}$	$\overline{\text{P}}$ OU $\overline{\text{Q}}$	$\overline{\text{P OU Q}}$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0

28 **1.**

P	Q	$\overline{\overline{\text{P}} \text{ OU Q}}$	P ET $\overline{\text{Q}}$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

2. Des tables identiques prouvent que les propositions ont même valeur de vérité.

29 **1. a.**

P	Q	R	P OU (Q ET R)	(P OU Q) ET (P OU R)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

b. Oui, car elles ont mêmes tables de vérité.

2. Oui.

30

P	Q	R	$\overline{P}$ ET Q	($\overline{P}$ ET Q) ET $\overline{R}$	$\overline{Q}$ ET $\overline{R}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

$\overline{P}$ ET ($\overline{Q}$ ET $\overline{R}$)	(($\overline{P}$ ET Q) ET $\overline{R}$) OU ($\overline{P}$ ET ($\overline{Q}$ ET $\overline{R}$))	$\overline{P}$ ET $\overline{R}$
1	1	1
0	0	0
0	1	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

31 **1.**

P	NON P	P ET (NON P)	P OU (NON P)
0	1	0	1
1	0	0	1

2.

Q	R	S	T	U
0	0	0	1	1

$\overline{Q}$	$\overline{R}$	$\overline{S}$	$\overline{T}$	$\overline{U}$
1	1	1	0	0

4. a. 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 1.

5. a. « 2 et 2 font 4 », qui est vraie.
« 2 et 2 font 5 », qui est fausse.
« $\lim_{x \to +\infty} (e^{x+1} - \ln(3x^2 + 4)) = +\infty$ » n'a peut-être pas été citée, car sa valeur de vérité (elle est vraie) résulte d'un théorème qui n'est pas au programme de mathématiques de ce BTS.

30 **1.**

Ajout d'informations / prédicat	pour $x = 2$	pour $x = \frac{1}{3}$	pour $x = -6$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$\exists x \in \mathbb{R}_+^*$
$x^2 \geqslant x$	1	0	1	0	1
$\frac{1}{x} \leqslant x$	1	0	0	0	1
$x > -x$	1	1	0	1	1

2. a. Un contre-exemple est 0,6 ; un exemple est 5.

b. P est fausse, vu le contre-exemple 0,2.

c. $\overline{P}$: $\exists x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 < x$. $\overline{P}$ est vraie.

d. $x^2 \geqslant x$; $x^2 - x \geqslant 0$; $x(x-1) \geqslant 0$; $x \in\,]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$.

3. a. Un contre-exemple est $\frac{1}{3}$; un exemple est 17.

b. Q est fausse, vu le contre-exemple 0,8.

c. $\overline{Q}$: $\exists x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} > x$. $\overline{Q}$ est vraie.

d. $\frac{1}{x} \leqslant x$; $\frac{1}{x} - x \leqslant 0$; $\frac{(1-x)(1+x)}{x} \leqslant 0$; $x \in [-1\,;0[\, \cup [1\,;+\infty[$.

4. a. $x > -x$; $2x > 0$; $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$\mathbb{R}$, étant vraie, ne possède aucun contre-exemple.

34 **1.** 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36.

2. a. $p(i) : i \leqslant 6$.

b. $p(i) : i \geqslant 1$.

3. $q(i) : i = 7$.

Remarque : $i \geqslant 7$ convient aussi.

CORRIGÉS DES EXERCICES

35 **1. a.** $q(c) : c > 10\,000$.
$\alpha = 0{,}02$ P.

b. « $g = 1$ » est vraie.
« $c > 10\,000$ » est fausse.
Il s'affiche : À PAYER 1 500.

2. a. $r(\mathrm{P}) : \mathrm{P} > 1000$.
$s(l) : l = 0$.
$\alpha = 0{,}02$ P.

b. « $\mathrm{P} > 1\,000$ » est vraie.
« $l = 0$ » est vraie.
Il s'affiche : À PAYER 1 470.

37 **1.** $x = -2$ est le seul contre exemple.

2. $x = 2$ est le seul exemple.

3. $x = 7$ est un hors-sujet.

4. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 = 4\} = \{-2\,;\, 2\}$.

5. $\{-4\,;\, -\frac{2}{3}\}$.

6. $]-\infty\,;\,-2[\, \cup\,]2\,;\,+\infty[$;
$]-\infty\,;\,-4] \cup [-\frac{2}{3}\,;\,+\infty[$.

39 On trouve A.

40 **1.** card D = 6 ; card M = 2 ;
card D × M = 6 × 2 = 12 ;
card M × D = 2 × 6 = 12.

2. $(1\,;\,\mathrm{P}) \in \mathrm{D} \times \mathrm{M}$; $(\mathrm{P}\,;\,1) \in \mathrm{M} \times \mathrm{D}$; $(\mathrm{P}\,;\,5) \in \mathrm{M} \times \mathrm{D}$.

3. a. {(1 ; P) ; (2 ; P) ; (3 ; P) ; (4 ; P) ; (5 ; P) ; (6 ; P) ; (1 ; F) ; (2 ; F) ; (3 ; F) ; (4 ; F) ; (5 ; F) ; (6 ; F)}.

b. card D × M = 12.

41 **1.**

	f	*g*	*h*	*i*
application	0	1	1	1
injection	0	0	0	0
surjection	0	1	1	1
bijection	0	0	0	0

2. $g^{-1}(\{06 - 06\,;\, 07 - 06\})$ = {français ; mathématiques ; anglais}.
h({français ; anglais ; gestion}) = {1 ; 2}.
$h^{-1}(\{2\})$ = {français ; anglais}.

3. a. $i(\{\mathrm{P}\})$ = {éliminé}, car Pierre a eu 72 sur 160.

b. 1 ; 0.

Remarque : la notion d'image réciproque a été utilisée bien que f ne soit pas une application.

42 **1.** 2-09-178764-7.

2.

P	Q	R	S	T	U
0	0	0	1	1	0

3. C'est une application bijective.

4. a. $\alpha = 9$; $\beta = 9$; $\gamma = \mathrm{X}$.

b. f est surjective seulement.

44 **1.** f et g sont des bijections.

2. $f \circ f = f$; $g \circ f = g$; $f \circ g = g$; $g \circ g = f$.

3. a. 1011101.

b. f.

45 **1.**

composée	*f*	*h*	*i*
f	0	1	1
h	1	0	0
i	1	0	0

2. $h \circ f$, $i \circ f$, $f \circ h$, et $f \circ i$ sont des applications non surjectives et non injectives.

2 Algèbre de Boole

3 **1.a.**

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a\overline{b} + ab$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

b. $a\overline{b} + ab = a$.

2. $a\overline{b} + ab = a(\overline{b} + b) = a \cdot 1 = a$.

5

a	1	1	0
0	a	$\overline{a} + \overline{b}$	$\overline{a}\,\overline{b}$
a	a	$a + b$	1

6

ab	abc
$\overline{a} + \overline{b}$	u

8

a	ac
a	abc
tx	x

9 **1.** $xyz + \overline{x} + \overline{y}z + yz = \overline{x} + (\overline{y} + y)z = \overline{x} + z$.

2. $ac(b + \overline{b}) + (\overline{a} + a)\,bc + b = ac + b$.

3. $x\overline{x} + y + \overline{y}y + z = y + z$.

4. $\overline{x}\overline{y}z + \overline{x}z + (z + \overline{y}z)\,(x + \overline{z}) = \overline{x}z + xz = z$.

5. D'après la propriété **17.** $y(y + \overline{z}) = y$ et $y(\overline{z} + y) = y$, donc on obtient :
$\overline{x}y + y(x + \overline{y}) = \overline{x}y + xy + 0 = (\overline{x} + x)y = y$.

6. D'après les propriétés **5.** et **8.**, on trouve : $m + p$.

10 **1.**

$x\overline{x} = 0$	$\overline{x} \cdot 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$	$x + \overline{x} = 1$
$\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{y}} = 1$	$\overline{x} + y + \overline{x} = \overline{x} + y$

$x + 0 = x$	$1 + a = 1$
$\overline{x}(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{x}$	$\overline{\overline{0}} \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$
$1 \cdot 0 \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = 0$	$0 + \overline{x}x = 0$

11 **1.**

a \ b	0	1
0	$\boldsymbol{\overline{a}\overline{b}}$	$\boldsymbol{\overline{a}b}$
1	$a\overline{b}$	$\boldsymbol{ab}$

a \ bc	00	01	11	10
0	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$	$\boldsymbol{\overline{a}\overline{b}c}$	$\boldsymbol{\overline{a}bc}$	$\overline{a}b\overline{c}$
1	$\boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}}$	$\boldsymbol{a\overline{b}c}$	$\boldsymbol{abc}$	$\boldsymbol{ab\overline{c}}$

2.

a \ b	0	1
0	**00**	**01**
1	10	**11**

a \ bc	00	01	11	10
0	000	**001**	**011**	010
1	**100**	**101**	**111**	**110**

CORRIGÉS DES EXERCICES

12 **1.**

$x \backslash y$	0	1
0		**1**
1		**1**

y

$x \backslash y$	0	1
0	**1**	
1	**1**	

$\bar{y}$

$x \backslash y$	0	1
0		
1		**1**

xy

$x \backslash y$	0	1
0		
1	**1**	

$x\bar{y}$

$x \backslash y$	0	1
0		**1**
1		

$\bar{x}y$

$x \backslash y$	0	1
0	**1**	
1		

$\bar{x}\bar{y}$

2.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

y

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	**1**	**1**		
1	**1**	**1**		

$\bar{y}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0				
1			**1**	**1**

xy

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**		

$x\bar{y}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1				

$\bar{x}y$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	**1**	**1**		
1				

$\bar{x}\bar{y}$

13 Les diagrammes du texte sont considérés ligne par ligne.

1. a. x ; $\bar{b}$; $\bar{a}$; b ; c ; $\bar{z}$; $\bar{x}$; $\bar{u}$.

b. $xy + x\bar{y}$; $\bar{a}\bar{b} + a\bar{b}$; $\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b$; $\bar{a}b + ab$.

Puis, par regroupement de deux « 1 » adjacents en ligne :
$\bar{a}c + ac$; $\bar{x}\bar{z} + x\bar{z}$; $\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y$; $\bar{t}\bar{u} + t\bar{u}$.

2. a. Par regroupement de deux « 1 » adjacents, en colonne quand c'est possible :
$\bar{b}c + bc$; $\bar{y}\bar{z} + y\bar{z}$; $\bar{x}\bar{z} + \bar{x}z$; $\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v$.

b. En lisant les « 1 » de la première ligne de gauche à droite, puis ceux de la deuxième ligne de gauche à droite :
$\overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}bc + a\overline{b}c + abc$; $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z}$; $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z}$; $\overline{t}\,\overline{u}\,\overline{v} + \overline{t}\,\overline{u}v + t\overline{u}\,\overline{v} + t\,\overline{u}\,v$.

15 **1.**

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

x

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1	1	1

$a + \overline{b}$

t \ uv	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

1

k \ lm	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1			1

$\overline{k} + \overline{m}$

2. $xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z}$.
$abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.
$tuv + tu\overline{v} + t\overline{u}v + t\overline{u}\,\overline{v} + \overline{t}uv + \overline{t}u\overline{v} + \overline{t}\,\overline{u}v + \overline{t}\,\overline{u}\,\overline{v}$.
$kl\overline{m} + k\overline{l}\,\overline{m} + \overline{k}lm + \overline{k}l\overline{m} + \overline{k}\,\overline{l}\,m + \overline{k}\,\overline{l}\,\overline{m}$.

16 • $\overline{x} + x$ contient les 1 de chacun des deux termes :

x	
0	
1	**1**

x

x	
0	**1**
1	

$\overline{x}$

x	
0	**1**
1	**1**

$x + \overline{x}$

D'après la marque ( ), $\overline{x} + x = 1$.

• $1 + 0$ contient les 1 de chacun des deux termes :

x	
0	**1**
1	**1**

1

x	
0	
1	

0

x	
0	**1**
1	**1**

$1 + 0$

D'après la marque ( ), $1 + 0 = 1$.

• $\overline{1}\,\overline{y}$ contient les 1 communs à $\overline{1}$ et à $\overline{y}$:

y	
0	**1**
1	**1**

1

y	
0	
1	

$\overline{1}$

y	
0	
1	**1**

y

y	
0	**1**
1	

$\overline{y}$

y	
0	
1	

$\overline{1} \cdot \overline{y}$

Comme le diagramme ne contient aucun 1, $\overline{1}\,\overline{y} = 0$.

CORRIGÉS DES EXERCICES

• $x + 1$ contient les 1 de chacun des deux termes :

x	
0	
1	**1**

x

x	
0	**1**
1	**1**

1

x	
0	**1**
1	**1**

$x + 1 = 0$

• $\overline{x}\,x$ contient les 1 communs à $\overline{x}$ et à x :

x	
0	
1	**1**

x

x	
0	**1**
1	

$\overline{x}$

x	
0	
1	

$\overline{x}\,x = 0$

• $x\overline{y}x$ contient les 1 communs à x, $\overline{y}$, x :

$x \backslash y$	0	1
0		
1	**1**	**1**

x

$x \backslash y$	0	1
0	**1**	
1	**1**	

$\overline{y}$

$x \backslash y$	0	1
0		
1	**1**	

$x\overline{y}x = x\overline{y}$

• $\overline{x} \cdot 1$ contient les 1 communs à $\overline{x}$ et 1 :

x	
0	**1**
1	

$\overline{x}$

x	
0	**1**
1	**1**

1

x	
0	**1**
1	

$\overline{x} \cdot 1 = \overline{x}$

• $x + xy$ contient les 1 de x, ainsi que ceux de xy :

$x \backslash y$	0	1
0		
1	**1**	**1**

x

$x \backslash y$	0	1
0		
1		**1**

xy

$x \backslash y$	0	1
0		
1	**1**	**1**

$x + xy = x$

• $0 + 1 + ab$ contient les 1 de 0, de 1, de ab :

$a \backslash b$	0	1
0		
1		

0

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**

1

$a \backslash b$	0	1
0		
1		**1**

ab

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**

$0 + 1 + ab = 1$

• $0.\,\overline{a}$:

a	
0	
1	

0

a	
0	**1**
1	

$\overline{a}$

a	
0	
1	

$0.\,\overline{a} = 0$

• $\overline{0} + x + y$ contient les 1 de $\overline{0}$, de x, de y :

$x \backslash y$	0	1
0		
1		

0

$x \backslash y$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**

$\overline{0}$

$x \backslash y$	0	1
0		
1	**1**	**1**

x

$x \backslash y$	0	1
0		**1**
1		**1**

y

$x \backslash y$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**

$\overline{0} + x + y = 1$

• $\overline{0}(x + \overline{x})$ contient les 1 communs à $\overline{0}$ et à $x + \overline{x}$:

x	
0	
1	

0

x	
0	**1**
1	**1**

$\overline{0}$

x	
0	
1	**1**

x

x	
0	**1**
1	

$\overline{x}$

x	
0	**1**
1	**1**

$x + \overline{x}$

x	
0	**1**
1	**1**

$\overline{0}(x + \overline{x}) = 1$

2. • $a + 0$ contient les 1 de chacune des expressions a et 0 :

a	
0	
1	**1**

a

a	
0	
1	

0

a	
0	
1	**1**

$a + 0 = a$

• $\overline{a + 1}$ contient les 1 qui ne sont pas dans $a + 1$:

a	
0	
1	**1**

a

a	
0	**1**
1	**1**

1

a	
0	**1**
1	**1**

$a + 1$

a	
0	
1	

$\overline{a + 1} = 0$

• $a + a$ contient les 1 de a, ainsi que ceux de a. Donc $a + a = a$.

• $\overline{a \cdot 0}$ contient les 1 qui ne sont pas dans $a \cdot 0$:

a	
0	
1	**1**

a

a	
0	
1	

0

a	
0	
1	

$a \cdot 0$

a	
0	**1**
1	**1**

$\overline{a \cdot 0} = 1$

CORRIGÉS DES EXERCICES

• $a \cdot 1$ contient les 1 communs à a et à 1 :

a	
0	
1	**1**

a

a	
0	**1**
1	**1**

1

a	
0	
1	**1**

$a \cdot 1 = a$

• $a \cdot a$ contient les 1 communs à a et à a. Donc $a \cdot a = a$.

• $a + \overline{a}$ contient les 1 de a, ainsi que ceux de $\overline{a}$:

a	
0	
1	**1**

a

a	
0	**1**
1	

$\overline{a}$

a	
0	**1**
1	**1**

$a + \overline{a} = 1$

• $\overline{ab} + \overline{b}$:

$a \backslash b$	0	1
0		
1		**1**

ab

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	

$\overline{ab}$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	
1	**1**	

$\overline{b}$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	

$\overline{ab} + \overline{b} = \overline{a} + \overline{b}$

• $\overline{\overline{a + b}} = a + b$ est évident.

• $a \cdot \overline{a}$ contient les 1 communs à a et à $\overline{a}$:

a	
0	
1	**1**

a

a	
0	**1**
1	

$\overline{a}$

a	
0	
1	

$a \cdot \overline{a} = 0$

• $(\overline{a + b})\,\overline{a}$:

$a \backslash b$	0	1
0		
1	**1**	**1**

a

$a \backslash b$	0	1
0		**1**
1		**1**

b

$a \backslash b$	0	1
0		**1**
1	**1**	**1**

$a + b$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	
1		

$\overline{a + b}$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1		

$\overline{a}$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	
1		

$(\overline{a + b})\,\overline{a} = \overline{a}\,\overline{b}$

• $1 + 1 = 1$ est évident.

3. • $\bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$:

x \ yz	*00*	01	11	10
0	**1**			
1				

$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

x \ yz	*00*	01	11	10
0				
1	**1**			

$x\bar{y}\bar{z}$

x \ yz	*00*	01	11	10
0	**1**			
1	**1**			

$\bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} = \bar{y}\bar{z}$

• $\bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c$:

a \ bc	00	*01*	11	10
0		**1**		
1				

$\bar{a}\bar{b}c$

a \ bc	00	*01*	11	10
0				
1		**1**		

$a\bar{b}c$

a \ bc	00	*01*	11	10
0		**1**		
1		**1**		

$\bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c = \bar{b}c$

• $\bar{a}bc + abc = bc$

○ ◇ □

	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	

• $\bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} = y\bar{z}$

○ ◇ □

x \ yz	00	01	11	10
0				**1**
1				**1**

• $a + ab + abc$ contient les 1 de a, de ab, de abc :

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

a

a \ bc	00	01	*11*	*10*
0				
1			**1**	**1**

ab

a \ bc	00	01	*11*	*10*
0				
1			**1**	

abc

CORRIGÉS DES EXERCICES

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a + ab + abc = a$

4. • expression 1 :

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**		**1**

$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	**1**		**1**	**1**

$x(y + \overline{z})$

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	

yz

Et, en tenant compte des négations :

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	

expression 1 : $\overline{x} + z$

• expression 2 :

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

expression 2 : $ac + b$

• expression 3 :

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$x + y$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1			**1**	**1**

$\overline{x} + y$

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

$(x + y)\,(\overline{x} + y)$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	

$\overline{y} + z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

$y + z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

$(\overline{y} + z)\,(y + z)$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

expression 3 : $y + z$

• expression 4 :

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1				

$\overline{x}z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	

$\overline{y} + z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

z

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

$z(z + \overline{y}) = z(\overline{y} + z)$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	**1**			**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$\overline{\overline{x}z}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	

$z(z + \overline{y})\,\overline{\overline{x}z}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

expression 4 : z

• expression 5 :

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1				

$\overline{x}y$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	**1**		**1**	**1**
1	**1**		**1**	**1**

$y + \overline{z}$

C O R R I G É S   D E S   E X E R C I C E S

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1				

$\bar{x}y(y + \bar{z})$

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

$y + \bar{z}$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**		
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$\overline{\bar{x}y}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1			**1**	**1**

$y(\bar{z} + y)\,\overline{\bar{x}y} = y(y + \bar{z})\overline{\bar{x}y}$

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

expression 5 : y

• expression 6 :

l \ mp	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$l + m$

l \ mp	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1			**1**	**1**

$\bar{l} + m$

l \ mp	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

$(l + m)(\bar{l} + m)$

l \ mp	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	

$\bar{m} + p$

l \ mp	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

$m + p$

l \ mp	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

$(\bar{m} + p)(m + p)$

l \ mp	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

expression 6 : $m + p$

17 **1.** • la propriété **5** résulte de l'égalité du premier et du dernier diagramme :

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a + bc$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a + b$

a \ bc	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a + c$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$(a + b)\,(a + c)$

• la propriété **6** résulte de l'égalité des deux derniers diagrammes :

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

a

a \ bc	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

$b + c$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	**1**

$a(b + c)$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	**1**

$ab + ac$

• la propriété **16** est prouvée par l'égalité du premier diagramme et du troisième :

a \ b	0	1
0		
1	**1**	**1**

a

a \ b	0	1
0		
1		**1**

ab

a \ b	0	1
0		
1	**1**	**1**

$a + ab$

CORRIGÉS DES EXERCICES

• la propriété **17** provient de l'égalité du premier et du troisième diagrammes :

$a \backslash b$	0	1
0		
1	**1**	**1**

a

$a \backslash b$	0	1
0		**1**
1	**1**	**1**

$a + b$

$a \backslash b$	0	1
0		
1	**1**	**1**

$a(a + b)$

2. a. $\overline{a} + b\overline{c} = (\overline{a} + b)\,(\overline{a} + \overline{c})$;
$\overline{a}(b + \overline{c}) = \overline{a}b + \overline{a}\overline{c}$; $\overline{a} + \overline{a}b = \overline{a}$;
$\overline{a}(\overline{a} + b) = \overline{a}$.

b. $x + (y + z)\,\overline{y} = (x + y + z)\,(x + \overline{y})$;
$x(y + z + \overline{y}) = x(y + z) + x\overline{y}$;
$x + x(y + z) = x$; $x(x + y + z) = x$.

c. $ab + a\overline{c}b = (ab + a\overline{c})\,(ab + b)$;
$ab(a\overline{c} + b) = aba\overline{c} + abb$;
$ab + aba\overline{c} = ab$; $ab(ab + a\overline{c}) = ab$.

19 **1.** et **2.** Toutes les expressions ont même diagramme, et sont donc égales :

$a \backslash b$	0	1
0		**1**
1	**1**	**1**

3. $a + \overline{a}b = (a + \overline{a})\,(a + b) = a + b$.
$a\overline{b} + b = (a + b)\,(\overline{b} + b) = a + b$.
$a\overline{b} + ab + \overline{a}b = a\overline{b} + ab + \underline{ab} + \overline{a}b$
$= a(\overline{b} + b) + (a + \overline{a})\,b = a + b$.
$\overline{\overline{a}\,\overline{b}} = \overline{\overline{a}} + \overline{\overline{b}} = a + b$.

21 **1.** et **3.** $\overline{\overline{\overline{\mathrm{P}}} + \mathrm{Q}} = \mathrm{P}\overline{\mathrm{Q}}$ (**14**) et (**9**).
$\mathrm{P} + \mathrm{QR} = (\mathrm{P} + \mathrm{Q})\,(\mathrm{P} + \mathrm{R})$ (**5**).
$\mathrm{P}(\mathrm{Q} + \mathrm{R}) = \mathrm{PQ} + \mathrm{PR}$ (**6**).
$(\overline{\mathrm{P}}\mathrm{Q})\,\overline{\mathrm{R}} + \overline{\mathrm{P}}(\overline{\mathrm{Q}}\overline{\mathrm{R}}) = \overline{\mathrm{P}}\overline{\mathrm{R}}$ (**6**) (**19**) et (**7**).

2. $\mathrm{P}\overline{\mathrm{P}} = 0$ (**8**) ; $\mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}} = 1$ (**7**).

24 $\mathrm{A} = 1a + b1 = a + b$;
$\mathrm{B} = (\overline{x}\overline{\overline{y}})\,(\overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}}) = \overline{x}y\,xy = 0$;
$\mathrm{C} = 1a + b1 = a + b$;
$\mathrm{D} = x(x + y)\,1 = x1 = x$.

25 $\mathrm{X} = \overline{a}\,\overline{b}(\overline{c} + c) + a\overline{b}(\overline{c} + c) + abc$
$= \overline{a}\overline{b} + a\overline{b} + abc$
$= (\overline{a} + a)\overline{b} + abc$
$= \overline{b} + abc$
$= \overline{b} + a\overline{b}c + abc$
$= \overline{b} + ac(\overline{b} + b)$
$= \overline{b} + ac$.

$\mathrm{Y} = ab + \cancel{ab\overline{c}} + 0 + \cancel{abc} = ab$ (propriété **16**).

26 $\mathrm{X} = ab(\overline{c} + c) + \overline{a}b = ab + \overline{a}b = (a + \overline{a})\,b = b$.
$\mathrm{Y} = \cancel{(a + c)\,a(b\overline{c} + \overline{b})} + a = a$ (absorption).
$\mathrm{Z} = a\overline{b}c + (ab\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\overline{c})\,(\overline{a}\,bc + \overline{a}b\overline{c} + abc)$
$= a\overline{b}c + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = a\overline{b}c$
(propriété **5**).
$\mathrm{T} = xy(\overline{z} + z) + \overline{x}y = xy + \overline{x}y = (x + \overline{x})\,y = y$.
$\mathrm{U} = \cancel{abc} + \cancel{a\overline{c}} + b\overline{c} + \overline{a} + \cancel{a\overline{b}\overline{c}} + a$
$= b\overline{c} + 1 = 1$.

28 **1.** $ab + \cancel{abc} + \cancel{abd} = ab$.

2. $(a + b)\,(a + b + \cancel{c}) = a + \mathrm{b}$ (propriété **17**).

3. $a(a + b)\,(a + b) = a(a + \cancel{b}) = a$.

29 $\mathrm{H} = b(a1 + ac) = b(a + \cancel{ac}) = ab$.
$\mathrm{I} = a(\cancel{bc} + c) = ac$.

J = $a(bc + 0 + 0 + 0) = abc$.

K = $(\bar x + \overline{y + \bar z})\,\bar x(\bar x + z)$

$= (\bar x + \bar y z)\,(\bar x + \bar x z)$

$= \bar x + \cancel{\bar y z \bar x z} = \bar x$ (propriété **5**).

L = $\cancel{xy\bar z} + \cancel{x(\overline{yz})} + x\bar z = x\bar z$.

M = $(x + \cancel{x\bar y})\,(\bar x + \bar z) + 0 = x\bar x + x\bar z = x\bar z$.

N = $ab1 + ab\bar c + \bar a bc$

$= ab + \cancel{ab\bar c} + \bar a bc$

$= b(a + \bar a c)$

$= b(a + \bar a)\,(a + c)$

$= b(a + c)$

$= ab + bc$.

30 Il n'y a aucun « uns » adjacents, donc les marques entourent un seul « un » chaque fois. On trouve :

$$xy\,;\ \bar l \bar m + lm\,;\ c\bar d + \bar c d\,;\ \bar r s.$$

32

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	**1**

$xy + yz$

a \ cd	00	01	11	10
0	**1**			
1			**1**	

$\bar a \bar c \bar d + acd$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	

bc

p \ rs	00	01	11	10
0		**1**		**1**
1	**1**		**1**	

$prs + p\bar r\bar s + \bar p r\bar s + \bar p\bar r s$

33 **1.** • Pour X :

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**	**1**		
1	**1**	**1**	**1**	

X = $\bar b + ac$

• Pour Y :

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			**1**	**1**

ab

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**		**1**	**1**
1	**1**		**1**	**1**

$b + \bar c$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	

ac

a	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1			**1**	**1**

$\bar{a} + b$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			**1**	**1**

Y = ab

2. • Pour A :

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

y

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**		
1		**1**		

$\bar{y}z$

x \ yz	00	01	11	10
0				**1**
1				

$\bar{x}y\bar{z}$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**		**1**	**1**
1	**1**		**1**	**1**

A = $y + \bar{z}$

• Pour B :

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**	**1**		
1				

B = $\bar{a}\bar{b}$

• Pour C :

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a + b$

a \ bc	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a + c$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**

C = $a + bc$

• Pour D :

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$x + \bar{x}z$

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1			**1**	**1**

$y + \bar{x}z$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**		**1**	**1**
1	**1**		**1**	**1**

$y + \bar{z}$

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

z

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	**1**

D = $z + xy$

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$1 + c + \bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a(1 + c + \bar{c})$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	

ac

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a(1 + c + \bar{c}) + ac$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			**1**	**1**

H = ab

3. • Pour H :

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

b

• Pour I :

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

a

CORRIGÉS DES EXERCICES

a \ *bc*	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

$bc + cc$

a \ *bc*	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	

I = ac

• Pour J :

a \ *bc*	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	

bc

a \ *bc*	00	01	11	10
0				
1				

0

a \ *bc*	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

1

a \ *bc*	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	

$bc + 0c + \overline{1} + c\overline{c}$

a \ *bc*	00	01	11	10
0				
1			**1**	

J = abc

• Pour K :

x \ *yz*	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

x

x \ *yz*	00	01	11	10
0	**1**		**1**	**1**
1	**1**		**1**	**1**

$y + \overline{z}$

x \ *yz*	00	01	11	10
0				
1	**1**		**1**	**1**

$x(y + \overline{z})$

x \ *yz*	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1		**1**		

$\overline{x(y + \overline{z})}$

x \ *yz*	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1				

$\overline{x}$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	

$\overline{x} + z$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1				

K = $\overline{x}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	**1**			**1**

$x\overline{z}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	**1**			**1**

L = $x\overline{z}$

• Pour L :

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	

$\overline{x} + \overline{y} + z$

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

$y + z$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**			
1	**1**			

$\overline{y + z}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	**1**			

$x(\overline{y + z})$

• Pour M :

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$x + x\overline{y}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	

xz

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**			**1**

$\overline{xz}$

x \ yz	00	01	11	10
0				
1	**1**			**1**

$(x + x\overline{y})\,\overline{xz} = \text{M} = x\overline{z}$

• Pour N :

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			**1**	**1**

ab

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$c + 1$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

b

a \ bc	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1	**1**			**1**

$a\overline{c} + \overline{a}c$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	**1**

N $= ab + bc$

35 **1.**

a	b	c	ac	$ac + b$	$\overline{c}$	$(ac + b)\overline{c}$	bc
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	**1**	**0**	0	1	1	1	0
0	**1**	**1**	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

$(ac + b)\,\overline{c} + bc$	$\overline{a}$	$\overline{a}((ac + b)\,\overline{c} + bc)$
0	1	0
0	1	0
1	1	**1**
1	1	**1**
0	0	0
0	0	0
1	0	0
1	0	0

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		**1**	**1**	

ac

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1		**1**	**1**	**1**

$ac + b$

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**			**1**
1	**1**			**1**

$\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				**1**
1				**1**

$(ac + b)\,\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	
1			**1**	

bc

a \ bc	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1			**1**	**1**

$(ac + b)\,\overline{c} + bc$

a \ bc	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1				

$\overline{a}$

a \ bc	00	01	**11**	**10**
0			**1**	**1**
1				

$\overline{a}((ac + b)\,\overline{c} + bc)$

2. D'après les repères écrits en gras : $\overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c}$.

3. D'après la marque du diagramme de Karnaugh : $\overline{a}b$.

36 **1.** $\overline{\overline{x}y + x\overline{y}} = \overline{\overline{x}y} \cdot \overline{x\overline{y}} = (\overline{\overline{x}} + \overline{y})\,(\overline{x} + \overline{\overline{y}})$
$= (x + \overline{y})\,(\overline{x} + y)$
$= 0 + \overline{x}\,\overline{y} + xy + 0$
$= xy + \overline{x}\,\overline{y}.$

2.

x \ y	0	1
0		**1**
1	**1**	

$\overline{x}y + x\overline{y}$

x \ y	0	1
0	**1**	
1		**1**

$\overline{\overline{x}y + x\overline{y}}$

x \ y	0	1
0	**1**	
1		**1**

$xy + \overline{x}\overline{y}$

L'égalité entre le premier et le troisième diagramme fait preuve.

3.

	x	y	$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	$\overline{x}y + x\overline{y}$
	0	0	1	0	1	0	0
	0	1	1	1	0	0	1
	1	0	0	0	1	1	1
	1	1	0	0	0	0	0
colonne	1	2	3	4	5	6	7

$\overline{\overline{x}y + x\overline{y}}$	xy	$\overline{x}\overline{y}$	$xy + \overline{x}\,\overline{y}$
1	0	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	0	1
8	9	10	11

L'égalité entre les colonnes 8 et 11 fait preuve.

37 **1.** $Y = B + A\overline{B}C + A\overline{C}$.

CORRIGÉS DES EXERCICES

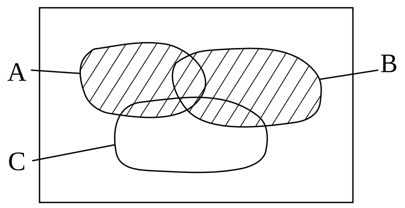
2.

A \ BC	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Y = A + B

3. Y = A ∪ B

4.



/// : Y

5. Première méthode (propriété **5**) :

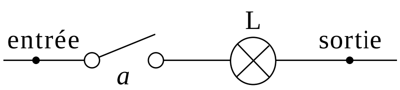
$Y = (B + \bar{B})(B + AC) + A\bar{C}$
$= B + AC + A\bar{C}$
$= B + A(C + \bar{C})$
$= B + A.$

Deuxième méthode (propriété **16**) :

$Y = B + \underline{ABC} + ABC + A\bar{C}$
$= B + AC(B + \bar{B}) + A\bar{C}$
$= B + AC + A\bar{C}$
$= B + A(C + \bar{C})$
$= B + A.$

38 **1.** L = a, par absorption.

2.



39

Première partie

a. 0 NOR $0 = \bar{0} \cdot \bar{0} = 1$;
a NOR $1 = \bar{a} \cdot \bar{1} = 0$;
a NOR $a = \overline{a + a} = \bar{a}$;
0 NOR $b = \overline{0 + b} = \bar{b}$.

b. (a NOR b) NOR a = $(\overline{a + b})$ NOR a
$= \overline{\overline{a + b}} \cdot \bar{a}$
$= (a + b)\,\bar{a}$
$= \bar{a}b.$

2. • a NOR $a = \bar{a}$ a été prouvé à la question **1**.

• Il en résulte que :
(a NOR b) NOR(a NOR b) = $\overline{a \text{ NOR } b}$.
Or a NOR $b = \overline{a + b}$, donc
(a NOR b) NOR (a NOR b)= $\overline{\overline{a + b}} = a + b$.

• Puisque a NOR $a = \bar{a}$, alors
(a NOR a) NOR (b NOR b) = $\bar{a}$ NOR $\bar{b}$.
Or a NOR $b = \bar{a} \cdot \bar{b}$, donc
(a NOR a) NOR (b NOR b) = $\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}} = ab$.

3. $\alpha = (\bar{a}a + \bar{b})(\bar{a} + b) = \bar{b}(\bar{a} + b) = \bar{a}\bar{b}$.
$\alpha = \bar{a} \cdot \bar{b}$ = (a NOR a) · (b NOR b)
= ((a NOR a) NOR(a NOR a)) NOR
((b NOR b) NOR(b NOR b)).

Remarque : à partir de $\alpha = \overline{a + b}$, α s'exprime aussi avec 7 NOR, mais différemment.

Deuxième partie

1. Il faut 7 NOR.

2. Il fallait 2 opérateurs, car $\alpha = \overline{a + b}$.

40 **1. a.**

a \ b	0	1
0	**1**	
1		

a NOR $b = \bar{a}\bar{b}$

a \ b	0	1
0	**1**	**1**
1		

a NOR $a = \bar{a}$

a \ b	0	1
0	**1**	**1**
1		

A

b. A = $\overline{a}$.

2.

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	

a NAND $b = \overline{a} + \overline{b}$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1		

a NAND $a = \overline{a}$

$a \backslash b$	0	1
0	**1**	**1**
1	**1**	

A = (a NAND b) + (a NAND a)

A = $a + b$.

3.

$a \backslash b$	0	1
0		**1**
1	**1**	

a XOR $b = \overline{a}b + a\overline{b}$

$a \backslash b$	0	1
0		
1		

a XOR a = 0

$a \backslash b$	0	1
0		1
1	1	

A = (a XOR b) + (a XOR a)

A = $\overline{a}b + a\overline{b}$.

41 **1.** (0 NOR 0) NOR 1 = $(\overline{0 + 0})$ NOR 1
= 1 NOR 1
= $\overline{1 + 1}$ = 0 (α)

0 NOR(0 NOR 1) = 0 NOR$(\overline{0 + 1})$
= 0 NOR 0
= $\overline{0 + 0}$ = 1 (β)

0 NOR 0 NOR 1 = $\overline{0 + 0 + 1}$ = 0 (γ)

(0 NOR 0) NOR 0 = 1 NOR 0
= $\overline{1 + 0}$ = 0 (δ)

2. a. (x NOR y) NOR z = $(\overline{x} \cdot \overline{y})$ NOR z
= $\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} \cdot \overline{z}$
= $(x + y)\,\overline{z}$
= $x\overline{z} + y\overline{z}$.

b. • P_1 est fausse, vues α et β.
• P_2 est fausse, vue δ et le résultat :
0 NOR 0 NOR 0 = $\overline{0 + 0 + 0}$ = 1.
• P_3 est fausse, vue β et le résultat :
0 NOR 0 NOR 1 = $\overline{0 + 0 + 1}$ = 0.

c. Soit P'_1, P'_2, P'_3 les propositions.
• P'_1 est vraie, vue δ et le résultat :
0 NOR(0 NOR 0) = 0 NOR 1
= $\overline{0 + 1}$ = 0.
• P'_2 est fausse, car les diagrammes de Karnaugh ci-dessous n'ont aucun 1 commun (aucun triplet (a, b, c) ne fournit la même valeur de vérité).

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				**1**
1	**1**			**1**

(a NOR b) NOR c

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	**1**			
1				

a NOR b NOR c

• P'_3 est fausse car le diagramme de Karnaugh de a NOR(b NOR c) n'a aucun 1 commun avec celui de a NOR b NOR c :

CORRIGÉS DES EXERCICES

a \ bc	00	01	11	10
0		**1**	**1**	**1**
1				

a NOR (b NOR c)

3. NOR n'est pas associatif, car α et β ne donnent pas le même résultat.

42 **1.**

P	Q	R	$\overline{\text{RESET P}}$	$(\overline{\text{RESET P}})$ Q
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

SET Q	MEMO R	(SET Q) (MEMO R)	α
1	0	0	0
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

2. $\alpha = \overline{0} \cdot \mathrm{Q} + 1 \cdot \mathrm{R} = \mathrm{Q} + \mathrm{R}$.

43 **1.**

x \ y	0	1
0		**1**
1	**1**	

x U y

x \ y	0	1
0		
1		**1**

x R y

2. a. β = (x NAND y) NAND y.

b. • δ = α NAND β.

Or x NAND $y = \overline{x} + \overline{y}$, donc :

$\alpha = \overline{x} + \overline{x \text{ NAND } y} = \overline{x} + \overline{\overline{xy}} = \overline{x} + xy$

$= (\overline{x} + x)(\overline{x} + y) = \overline{x} + y$.

Et $\beta = \overline{xy}$ NAND $y = \overline{\overline{xy}} + \overline{y} = xy + \overline{y}$

$= (x + \overline{y})(y + \overline{y}) = x + \overline{y}$.

Donc $\delta = (\overline{x} + y)$ NAND $(x + \overline{y})$

$= \overline{\overline{x} + y} + \overline{x + \overline{y}} = x\overline{y} + \overline{x}y$.

Or son diagramme de Karnaugh prouve que x U $y = x\overline{y} + \overline{x}y$.

Donc δ = x U y.

• $\varepsilon = \gamma = \overline{xy}$ NAND $\overline{xy}$

$= \overline{\overline{xy}} + \overline{\overline{xy}}$

$= xy + xy = xy$.

Son diagramme de Karnaugh prouve que x R $y = xy$.

Donc ε = x R y.

44 **1.**

b_1	b_2	b_3	b_4	β
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

2. a.

α	0000	0011	0100	1110	1111
β	1	1	0	0	1

b. Non, car 0000 et 0011 ont même image.

45 **1.** ET ; OU.
Oui.

2. a. A = $x\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}$.

b.

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	**1**
1		**1**	**1**	

$\overline{\text{A}}$

3.a. B = $\overline{x}yz + yz + zx$.

b. Le diagramme de Karnaugh de B est :

x \ yz	00	01	11	10
0			**1**	
1		**1**	**1**	

Comme ce n'est pas celui de $\overline{\text{A}}$, A et B ne donnent pas la même information.

c. D'après les marques du diagramme de $\overline{\text{A}}$, lesquelles ne se recoupent pas et indiquent que $\overline{\text{A}} = xz + \overline{x}y$, cette condition peut s'énoncer : « soit travailler au siège et avoir un jugement favorable, soit ne pas travailler au siège et avoir une ancienneté moyenne ».