1 Nombres complexes

COURS

EXERCICES

PROBLÈMES

OBJECTIFS

- **Utiliser la notation exponentielle d'un nombre complexe.**
- **Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.**
- **Utiliser les nombres complexes pour caractériser les transformations géométriques.**

PRÉSENTATION DU CHAPITRE

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

Dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, elle en a deux : i et – i.

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i, notation utilisée pour l'intensité en électricité.

Les nombres complexes sont aussi très utilisés en géométrie, en particulier pour caractériser les transformations ponctuelles.

Leonhard EULER
(Bâle 1707, Saint-Pétersbourg 1783)

AVANT D'ABORDER LE COURS

Connaître les notions de base se rapportant aux nombres complexes : partie réelle et partie imaginaire, module et argument, forme algébrique et forme trigonométrique, opérations, affixe d'un point M du plan complexe. Voir paragraphe ① du cours consacré aux rappels.

→ Exercices 1 à 4

1 RAPPELS

1. Définitions

a Forme algébrique

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $a + b\mathrm{j}$ (notation des physiciens, les mathématiciens notant plutôt $a + b\mathrm{i}$, mais, en électricité, i représente souvent l'intensité du courant), j vérifiant l'égalité $\mathrm{j}^2 = -1$, a et b étant des réels quelconques.

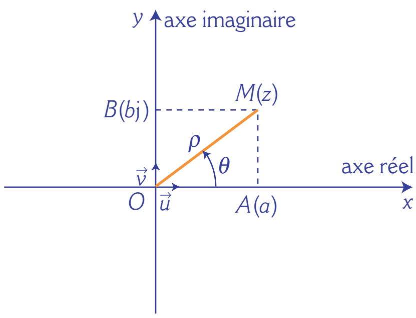
Soit $z = a + b\mathrm{j}$. Alors $a = \mathcal{R}e(z)$ et $b = \mathcal{I}m(z)$.

Si $b = 0$, alors z est réel ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Si $a = 0$, alors z est imaginaire pur.

- **Égalité** : deux nombres complexes $z = a + b\mathrm{j}$ et $z' = a' + b'\mathrm{j}$ sont égaux si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.

b Représentation géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, à tout complexe $z = a + b\mathrm{j}$, on associe le point $M(a\ ;\ b)$ et réciproquement, à tout point, on peut associer un nombre complexe.



$M(a\ ;\ b)$ est l'image de $z = a + b\mathrm{j}$ et z est l'affixe de $M(a\ ;\ b)$; z est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

c Forme trigonométrique

Soit $z = a + b\mathrm{j}$ et M son image dans le plan rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

- **Le module** de z est le réel positif $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Géométriquement, $|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$.

- **Un argument** de z $(z \neq 0)$ est le nombre θ défini à $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ près par

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}.$$

Géométriquement θ est, à $2k\pi$ près, la mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

On a alors $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$: c'est la forme trigonométrique de z.

Exemples :

Soit $z = -3\mathrm{j}$. Alors $|z| = 3$ et $\arg z = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $z = 3\sin\dfrac{3\pi}{2}\mathrm{j}$.

Soit $z = 1 + j$. Alors $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + j\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Opérations

a Complexe conjugué

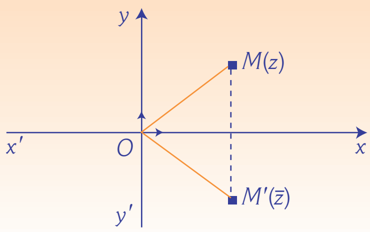
Définition

Soit $z = a + bj$.

Le complexe conjugué de z est $\bar{z} = a - bj$.

Géométriquement, l'image M' de $\bar{z}$ est symétrique de l'image M de z par rapport à l'axe $(x'x)$.

On a $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$.



Propriétés immédiates

$\mathcal{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \bar{z})$; $z\bar{z} = |z|^2$.

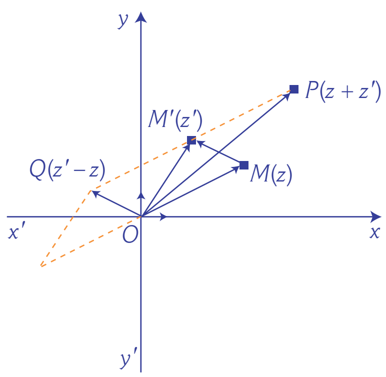
b Addition

$$\left.\begin{aligned} z &= a + bj \\ z' &= a' + b'j \end{aligned}\right\} \Rightarrow z + z' = (a + a') + (b + b')j.$$

Géométriquement, si M et M' sont les images de z et z', alors :

le point P image de $z + z'$ est le point tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

et le point Q image de $z' - z$ est le point tel que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$.



$z' - z$ est donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et $MM' = |z' - z|$.

c Produit

$$\left.\begin{aligned} z &= a + bj \\ z' &= a' + b'j \end{aligned}\right\} \Rightarrow zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)j$$

Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme trigonométrique.

En effet $\left.\begin{aligned} z &= \rho(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) \\ z' &= \rho'(\cos\theta' + \mathrm{j}\sin\theta') \end{aligned}\right\}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} zz' &= \rho\rho'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + (\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta')\mathrm{j}] \\ zz' &= \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{j}\sin(\theta+\theta')). \end{aligned}$$

Propriétés

$|zz'| = |z||z'|$

$\arg zz' = \arg z + \arg z' + 2k\pi$

d Inverse et quotient

En utilisant les formules ci-dessus, on vérifie que l'on a :

Propriétés

$\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$ $\qquad \arg\dfrac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$ $\qquad \arg\dfrac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + 2k\pi$

e Puissance

Soit $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$, $(z \neq 0)$. En utilisant les propriétés du produit, on montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

Propriété

$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \mathrm{j}\sin(n\theta))$

→ Exercices 5 à 9

Exemples :

$$1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$(1-\mathrm{j})^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{10}(\cos(-5\pi) + \mathrm{j}\sin(-5\pi)) = -1\,024.$$

2 NOTATION EXPONENTIELLE

1. Formule de Moivre

En appliquant la formule ci-dessus à un nombre complexe de module 1, $z = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$, on obtient, pour tout entier naturel n, la formule de Moivre :

Formule de Moivre

$(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{j}\sin(n\theta)$

Par analogie avec les puissances, on pose par définition :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Exemples :

Pour $\theta = \pi$, $e^{j\pi} = -1$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$.

La formule de Moivre devient alors $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$ (propriété analogue à celle des puissances).
Les formules donnant l'argument d'un produit ou d'un quotient deviennent :

$$e^{j\theta}e^{j\theta'} = e^{j(\theta+\theta')} \text{ et } \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta'}} = e^{j(\theta-\theta')}.$$

Remarque :
La formule de Moivre est vraie aussi pour n entier relatif.

2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Propriété
Tout nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ peut s'écrire $\rho e^{j\theta}$.

Exemple d'utilisation :

Calcul du module et de l'argument de $z = \frac{j}{1+j}$.

$$z = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(j\frac{\pi}{2}-j\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} \; ; \; |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

3. Formules d'Euler

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, d'où $e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos\theta - j\sin\theta$.
En additionnant membre à membre, on obtient $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$ et en soustrayant membre à membre on obtient $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$.
D'où :

FORMULES D'EULER

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \end{cases}$$

→ Exercices 10 et 11

• **Application : linéarisation de sinus et cosinus**

Exemple : Linéarisation de $\cos^3\theta$ *et de* $\sin^3\theta$

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3j\theta}+3e^{j\theta}+3e^{-j\theta}+e^{-3j\theta}) = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta).$$

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}\right)^3 = \frac{-1}{8j}(e^{3j\theta}+3e^{j\theta}+3e^{-j\theta}-e^{-3j\theta}) = \frac{1}{4}(-\sin 3\theta + 3\sin\theta).$$

3 RÉSOLUTION DANS $\mathbb{C}$ DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS DANS $\mathbb{C}$

1. Équation $z^2 = a$

Si $a = 0$, l'équation $z^2 = 0$ admet la solution « double » $z = 0$.
Soit $a = \rho e^{j\theta}$ avec $a \neq 0$. On cherche z sous forme trigonométrique : $z = re^{jx}$.
On a :

$$z^2 = a \Leftrightarrow r^2e^{2jx} = \rho e^{j\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2x = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\rho}\ (\text{car } r > 0) \\ x = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$$

D'où les solutions $z_1 = \sqrt{\rho}\, e^{j\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{\rho}\, e^{j\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

soit $z_2 = \sqrt{\rho}\, e^{j\frac{\theta}{2}} \times e^{j\pi} = -\sqrt{\rho}\, e^{j\frac{\theta}{2}} = -z_1$.

Ces nombres z_1 et z_2 sont les racines carrées complexes de a, elles sont opposées.

Exemple :

Résoudre l'équation $z^2 = 3 + 4j$.

On a $|3+4j| = 5$. D'autre part, si $\theta = \arg(3+4j)$, on a $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$, donc la mesure principale de θ est dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc θ est tel que $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$.

D'où les deux solutions : $z_1 = \sqrt{5}\, e^{j\frac{\theta}{2}}$

et $z_2 = \sqrt{5}\, e^{j\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{5}\, e^{j\frac{\theta}{2}}$.

Cette équation peut également se résoudre algébriquement :

$$z^2 = 3+4j \Leftrightarrow (x+yj)^2 = 3+4j \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

1re méthode :

Remarquons que x et y sont non nuls, car leur produit vaut 2.

La deuxième équation donne $y = \dfrac{2}{x}$.

En remplaçant dans la première, on obtient :

$x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ (équation bicarrée)

En posant $X = x^2$, on obtient $X^2 - 3X - 4 = 0$

soit $X = -1$: impossible

soit $X = 4$

d'où $x^2 = 4$ soit $x = -2$ ou $x = 2$.

D'où les 2 solutions : $\mathcal{S} = \{-2-j\,;\,2+j\}$.

2e méthode :

On peut faciliter le calcul en combinant la première équation avec une troisième qui est $x^2+y^2 = 5$ (en effet, comme $z^2 = 3+4j$, on a $|z|^2 = |z^2| = \sqrt{9+16} = 5$).

On obtient alors immédiatement $\begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} |x| = 2 \\ |y| = 1 \end{matrix}$

Comme le produit xy est positif (égal à 2), x et y sont de même signe, on a donc les deux solutions $\{2+j\,;\,-2-j\}$.

> *Remarque :*
> On peut généraliser le calcul et montrer que l'équation $z^n = a$ admet n solutions dans $\mathbb{C}$.

2. Équation $az^2+bz+c=0$ où a, b et c sont trois complexes donnés ($a \neq 0$)

On a $az^2+bz+c = a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (forme canonique du trinôme).

On sait qu'il existe deux complexes γ et $-\gamma$ tels que $\gamma^2 = \Delta = b^2-4ac$ (voir *1.*) et donc on a toujours deux solutions à l'équation qui sont $\dfrac{-b-\gamma}{2a}$ et $\dfrac{-b+\gamma}{2a}$.

Donc toute équation du second degré a deux solutions (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$.

Remarque :
Si a, b et c sont réels et si $\Delta < 0$, les deux solutions sont deux complexes conjuguées.

Exemple 1 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - x + 1 = 0$.

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (3\mathrm{j})^2 \; ; \; S = \left\{ \frac{1 + \mathrm{j}\sqrt{3}}{2} \; ; \; \frac{1 - \mathrm{j}\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Exemple 2 :
Résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + 2(1 + \mathrm{j})z - 5(1 + 2\mathrm{j}) = 0$:

$\Delta = [2(1 + \mathrm{j})]^2 + 20(1 + 2\mathrm{j}) = 20 + 48\mathrm{j}$

Il faut alors résoudre l'équation $\gamma^2 = 20 + 48\mathrm{j}$.

$$\gamma^2 = 20 + 48\mathrm{j} \Leftrightarrow (x + y\mathrm{j})^2 = 20 + 48\mathrm{j} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ 2xy = 48 \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut combiner la première équation avec une troisième qui est $x^2 + y^2 = 52$.

On obtient alors immédiatement $\begin{cases} 2x^2 = 72 \\ 2y^2 = 32 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 = 36 \\ y^2 = 16 \end{matrix} \quad \begin{matrix} |x| = 6 \\ |y| = 4 \end{matrix}$

Comme le produit xy est positif (égal à 24) on a donc les deux racines complexes de Δ : $6 + 4\mathrm{j}$ et $-6 - 4\mathrm{j}$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + (2 + \mathrm{j})z - 5(1 + 2\mathrm{j}) = 0$: $S = \{2 + \mathrm{j} \; ; -4 - 3\mathrm{j}\}$.

Généralisation :
On démontre, et nous l'admettrons, que tout polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ distinctes ou confondues.

→ Exercice 12

4 LIGNES DE NIVEAU

1. Définition

Définition
Dans un repère orthonormal $(O \; ; \vec{u}, \vec{v})$, la ligne de niveau N_k d'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z) = k$.

2. Exemples

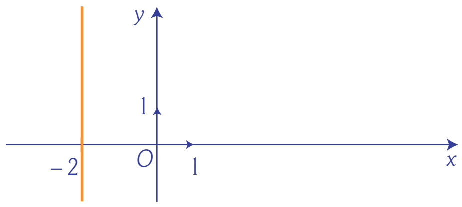
a Lignes de niveau de $f : z \mapsto \mathscr{R}e(z)$ (partie réelle de z)

$z = x + \mathrm{j}y$; $\mathscr{R}e(z) = k \Leftrightarrow x = k$

Il s'agit donc de la droite d'équation $x = k$.

Exemple

Ligne de niveau de $f : z \mapsto \mathscr{R}e(z)$ définie par $\mathscr{R}e(z) = -2$.



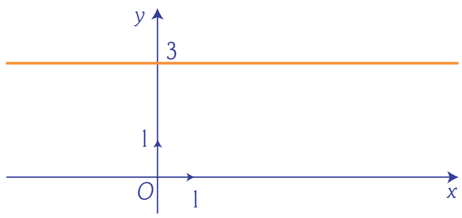
b Lignes de niveau de $f : z \mapsto \mathscr{I}m(z)$ (partie imaginaire de z)

$z = x + \mathrm{j}y$; $\mathscr{I}m(z) = k \Leftrightarrow y = k$

Il s'agit donc de la droite d'équation $y = k$.

Exemple

Ligne de niveau de $f : z \mapsto \mathscr{I}m(z)$ définie par $\mathscr{I}m(z) = 3$.



c Lignes de niveau de $f : z \mapsto |z|$ (module de z) ($k > 0$)

$$z = x + \mathrm{j}y \quad ; \quad |z| = k \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = k^2$$

Il s'agit donc du cercle de centre O de rayon k.

d Lignes de niveau de $f : z \mapsto |z - a|$, $a \in \mathbb{C}$, $k > 0$

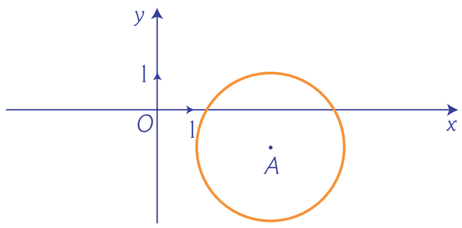
$z = x + \mathrm{j}y$; $a = \alpha + \mathrm{j}\beta$

$|z - a| = k \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$

Il s'agit donc du cercle de centre A d'affixe a et de rayon k.

Exemple

Ligne de niveau de $f : z \mapsto |z - a|$ définie par $|z - a| = 2$ et $a = 3 - \mathrm{j}$.



e Lignes de niveau de $f : z \mapsto \arg z$ (argument de z)

$$z = x + \mathrm{j}y \quad ; \quad \arg z = k \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = k$$

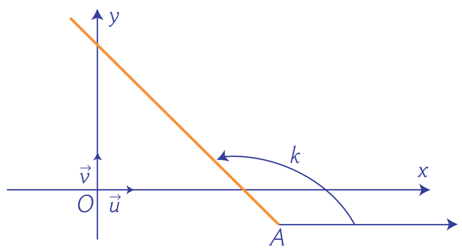
Il s'agit donc de la demi-droite d'origine O, O exclu, et d'angle polaire k.

f Lignes de niveau de $f : z \mapsto \arg(z - a)$ (argument de $(z - a)$), $a \in \mathbb{C}$

$z = x + \mathrm{j}y$; $a = \alpha + \mathrm{j}\beta$;

$\arg(z - a) = k \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k$.

Il s'agit donc de la demi-droite d'origine A, A exclu, et d'angle polaire k.



Exemple :

Ligne de niveau de $f : z \mapsto \arg(z-a)$ définie par $\arg(z-a) = \frac{3\pi}{4}$ et $a = 5 - \mathrm{j}$.

→ Exercice 13

5 TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Soit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto z' = f(z)$.

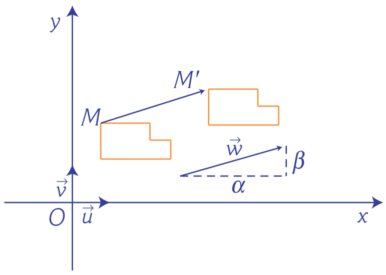
Soit, dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, le point M d'affixe z et le point M' d'affixe $z' = f(z)$. On définit ainsi, dans le plan, la transformation géométrique associée à f qui, à tout point M fait correspondre le point M'.

1. Transformation associée à $f : z \mapsto z + b$ $(b = \alpha + \beta\,\mathrm{j})$

$M(z) \mapsto M'(z')$

$$z' = z + b \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto z + b$ est donc la **translation de vecteur** $\vec{w}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

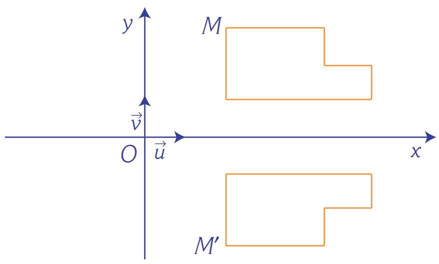


2. Transformation associée à $f : z \mapsto \bar{z}$

$M(z) \mapsto M'(z')$

$$z' = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto \bar{z}$ est donc la **réflexion (symétrie orthogonale) d'axe** $(O\ ;\ \vec{u})$.



3. Transformation associée à $f : z \mapsto kz$ (k réel donné non nul)

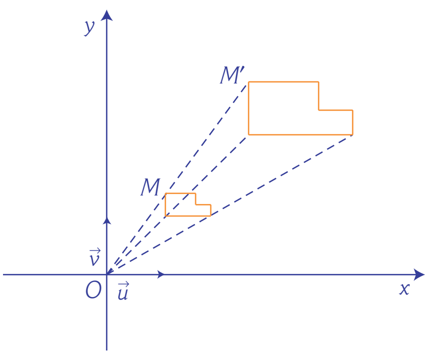
$M(z) \mapsto M'(z')$

$$z' = kz \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |k|\ |z| \\ \arg z' = \arg z + \arg k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM})$$

$\arg k = 0$ ou π selon que $k > 0$ ou $k < 0$.

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto kz$ est donc **l'homothétie de centre O et de rapport k**.



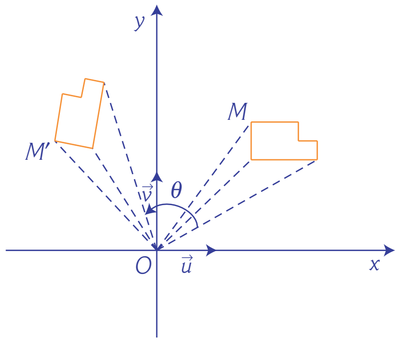
4. Transformation associée à $f : z \mapsto e^{j\theta} z$

$M(z) \mapsto M'(z')$

$$z' = e^{j\theta}z \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg z' = \arg z + \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto e^{j\theta}z$ est la **rotation de centre O et d'angle θ**.



5. Transformation associée à $f : z \mapsto az$ ($a = \rho\, e^{j\theta}$) ($a \neq 0$)

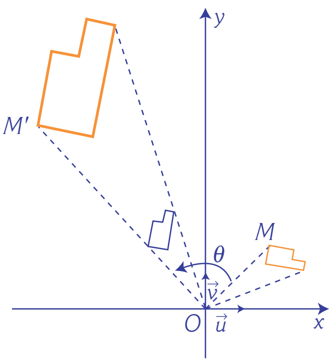
$M(z) \mapsto M'(z')$

$$z' = az \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \rho|z| \\ \arg z' = \arg z + \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \rho\, OM \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \rho\, OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

Cette transformation géométrique est donc la composée de la rotation de centre O et d'angle θ et de l'homothétie de centre O et de rapport ρ ($\rho > 0$).

Cette transformation géométrique associée à $f : z \mapsto az$ s'appelle une **similitude de centre O, de rapport ρ et d'angle θ**.



Exemple

$f : z \mapsto 3jz = 3e^{j\frac{\pi}{2}}z$.

La transformation géométrique associée à f est la similitude de centre O, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

> *Remarques :*
> Si $|a| = 1$, il s'agit alors d'une rotation.
> Si $\arg(a) = k\pi$, il s'agit alors d'une homothétie.

6. Transformation associée à $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \dfrac{1}{|z|} \\ \arg z' = -\arg z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \dfrac{1}{OM} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi] \end{cases}$$

Cette transformation, associée à la fonction inverse définie dans $\mathbb{C} - \{0\}$, est appelée **inversion complexe**.

Le point O n'a jamais d'image par cette transformation et contrairement à toutes les transformations précédentes, l'image d'une droite n'est généralement pas une droite.

Expression analytique :

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow x' + y'j = \frac{1}{x+yj} = \frac{x-yj}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Image d'une droite :

Soit une droite D d'équation $ax + by + c = 0$.

On remarque que, de même que la réflexion, l'inversion complexe est involutive, c'est-à-dire que si M' est l'image de M, alors M est l'image de M', donc

on a $\begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \dfrac{-y'}{x'^2+y'^2} \end{cases}$ avec $(x' ; y') \neq (0 ; 0)$.

D'où $a\dfrac{x'}{x'^2+y'^2} - b\dfrac{y'}{x'^2+y'^2} + c = 0$ ou $ax' - by' + c(x'^2+y'^2) = 0$.

Si $c = 0$, c'est-à-dire si la droite D passe par O, alors la transformée de la droite D privée de O est la droite D' d'équation $ax' - by' = 0$, c'est-à-dire la symétrique de D par rapport à l'axe $(x'x)$, D' étant aussi privée du point O.

Si $c \neq 0$, alors l'image de D est l'ensemble des points M' tels que

$x'^2 + y'^2 + \dfrac{a}{c}x' - \dfrac{b}{c}y' = 0$.

On reconnaît l'équation d'un cercle $(x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0)$ qu'il faut mettre sous forme canonique $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ si l'on veut en connaître les coordonnées du centre $(x_0 ; y_0)$ et le rayon R.

On remarque au passage que l'image de la droite n'est pas le cercle entier, mais le cercle privé du point O.

L'image d'une droite D qui ne passe pas par O est donc un cercle qui « passe par O », mais privé de O.

Cas particulier : IMAGE D'UNE DROITE PERPENDICULAIRE À L'AXE $(x'x)$

Soit une droite d'équation $x = k$.

D'où $\dfrac{x'}{x'^2 + y'^2} = k$ ou $k(x'^2 + y'^2) - x' = 0$.

Si $k = 0$, c'est-à-dire si la droite passe par O, alors la transformée de la droite est elle-même la droite d'équation $x = 0$, privée du point O.
Si $k \neq 0$, alors le transformé de la droite est un cercle, centré sur $(x'x)$, passant par O, privé du point O.

Exemple :

Cherchons l'image de la droite d'équation $x = 2$ par l'inversion complexe associée à l'application de $\mathbb{C} - \{0\}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$: $f : z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

Soit $M(x\,;\,y)$ et son image $M'(x'\,;\,y')$.

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow x' + y'\mathrm{j} = \frac{1}{x + y\mathrm{j}} = \frac{x - y\mathrm{j}}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

On remarque que si M' est l'image de M, alors M est l'image de M', donc on a

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{-y}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

$x = 2$ équivaut à $2 = \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2}$ avec $(x'\,;\,y') \neq (0\,;\,0)$.

$$\frac{x'}{x'^2 + y'^2} = 2 \Leftrightarrow 2(x'^2 + y'^2) = x' \Leftrightarrow 2(x'^2 + y'^2) - x' = 0$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - \frac{1}{2}x' = 0 \Leftrightarrow \left(x' - \frac{1}{4}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{16}.$$

L'image de la droite d'équation $x = 2$ est le cercle de centre $A\left(\dfrac{1}{4}\,;\,0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{4}$ privé du point O.

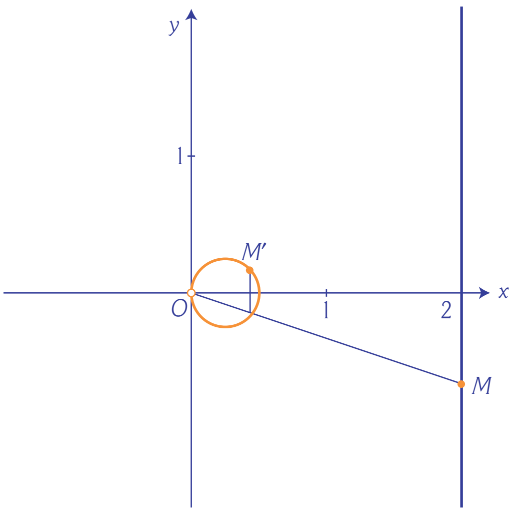


Image d'un cercle :

L'inversion complexe est involutive, on peut conclure directement que l'image d'un cercle passant par O privé de O, puisque O n'a pas d'image, est une droite.
Par contre, il est facile de montrer, mais ceci est hors programme, que l'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle.

→ Exercices 14 à 19

01exo_179088 Page 20 Lundi, 3. novembre 2003 10:25 10

C : exercice corrigé (voir corrections pages 406 à 410)

* ** *** Niveaux de difficulté des problèmes

AVANT D'ABORDER LE COURS

1 Écrire sous la forme algébrique $a + bj$, les nombres complexes :

$z_1 = (1 + j)^2$ $\qquad z_5 = \dfrac{1 + j}{j}$

$z_2 = (2 - 3j)(2 + 3j)$ $\qquad z_6 = \dfrac{1 + j}{1 - j}$

$z_3 = (2 + j)(3 - 5j)$ $\qquad z_7 = \dfrac{1}{2 + j}$

$z_4 = (1 + j)^3$ $\qquad z_8 = \dfrac{2 + j}{3 - 2j}$.

2 Donner le module et un argument des nombres complexes :

$z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ $\qquad z_5 = -\sqrt{6} + j\sqrt{2}$

$z_2 = 1 - j\sqrt{3}$ $\qquad z_6 = \sqrt{2}(1 - j)$

$z_3 = -1 + j\sqrt{3}$ $\qquad z_7 = 10 - 10j$

$z_4 = -1 - j\sqrt{3}$ $\qquad z_8 = -2j$.

3 Écrire sous la forme algébrique $a + bj$ les nombres complexes de module ρ et d'argument θ :

$z_1 : \rho = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

$z_2 : \rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$

$z_3 : \rho = 1$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

$z_4 : \rho = 2$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$z_5 : \rho = 4$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

$z_6 : \rho = 2$ et $\theta = \pi$.

4 $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan, placer les points M_i d'affixe z_i :

$z_1 = 2j$ $\qquad z_4 = \overline{z_2}$

$z_2 = 1 - j$ $\qquad z_5 = 2 + j$

$z_3 = -z_2$ $\qquad z_6 = \dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

CALCUL DANS $\mathbb{C}$

5 Soient $z_1 = \dfrac{1}{2}(-1 + j\sqrt{3})$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}(-1 - j\sqrt{3})$.

1. Calculer $(z_1)^2$; le comparer à z_2.

2. Calculer $(z_2)^2$; le comparer à z_1.

3. Calculer $(z_1)^3$ et $(z_2)^3$.

4. Calculer $1 + z_2 + z_1$.

6 **C** Soient les nombres complexes $a = \sqrt{3} - j$; $b = 2 - 2j$ et $z = \dfrac{a^4}{b^3}$.

1. Donner le module et un argument de a, b, a^4 et b^3.

2. Donner la forme algébrique de a^4 et b^3, puis de z.

3. Calculer le module et un argument de z.

4. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

7 **1.** Écrire les nombres complexes $(1+\mathrm{j})$, $(1-\mathrm{j})$, $(1+\mathrm{j})^5$, $(1-\mathrm{j})^3$ à l'aide de la notation exponentielle.

2. En déduire $z = \dfrac{(1-\mathrm{j})^3}{(1+\mathrm{j})^5}$.

8 x est un nombre réel, z est le nombre complexe défini par $z = \dfrac{1+6\mathrm{j}x}{1-2\mathrm{j}x}$. M est l'image du nombre complexe z dans le plan complexe.

1. Calculer $|z+1|$.

2. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+1| = 2$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$?

9 z est un nombre complexe quelconque. On pose $Z = \dfrac{z+2\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}z}$.

1. Déterminer les parties réelles et imaginaires de Z.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. Z est réel ;

b. Z est imaginaire pur.

FORMULES D'EULER – LINÉARISATION

10 À l'aide des formules d'Euler, retrouver les formules trigonométriques :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a) ;$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a).$$

11 À l'aide des formules d'Euler, linéariser :

$\cos 3x \cos 5x$; $\cos x \sin 2x$; $\sin 2x \sin 3x$.

ÉQUATIONS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

12 **C** Dans $\mathbb{C}$, donner l'ensemble des solutions des équations et systèmes d'équations.

a. $z^2 = -3-4\mathrm{j}$;

b. $z^2 = 7+24\mathrm{j}$;

c. $z^2 - z + 1 = 0$;

d. $z^2 + 4z + 16 = 0$;

e. $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$;

f. $z^2 + 2\mathrm{j}z - 5 = 0$;

g. $z^2 + 4\bar{z} - 4 = 0$;

h. $z^2 - 5(1-\mathrm{j})z - 4(3+4\mathrm{j}) = 0$;

i. $z^2 + (3-2\mathrm{j})z - 6\mathrm{j} = 0$;

j. $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ 2\mathrm{j}\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 0 \end{cases}$

LIGNES DE NIVEAU

13 $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan complexe. f est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Déterminer les lignes de niveau k de f dans les cas suivants (on donnera les représentations graphiques de ces lignes de niveau) :

a. $f(z) = \mathcal{R}e(z)$ et $k = -2$;

b. $f(z) = \mathcal{I}m(z)$ et $k = 1$;

c. $f(z) = |z|$ et $k = 2$;

d. $f(z) = |z-1|$ et $k = 2$;

e. $f(z) = \arg(z)$ et $k = \frac{\pi}{6}$;

f. $f(z) = \arg(z-\mathrm{j})$ et $k = \frac{\pi}{4}$.

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

14 Soient $a = 2\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}\right)$, $b = 2\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}\right)$ et $c = 1-\mathrm{j}\sqrt{3}$.

1. Écrire a et b sous forme algébrique.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; A, B et C sont les points d'affixe a, b, c. Donner le module et un argument de $a-2$, de $b-2$ et de $c-2$. En déduire que A, B et C sont sur un même cercle que l'on déterminera.

3. A', B' et C' sont les points d'affixe $a-2$, $b-2$, $c-2$.

Par quelle transformation géométrique passe-t-on de A' à A, de B' à B et de C' à C ?

4. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $(A'B'C')$ et donner son rayon.

15 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 4 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.

On appellera a la solution dont la partie imaginaire est négative et b l'autre solution.

2. Soit R la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = ze^{j\frac{2\pi}{3}}$.

Quelle est cette transformation ?

3. Soit A le point d'affixe a, B celui d'affixe b. Calculer l'affixe de A' image de A par R et de B' image de B par R. Placer A et B, construire A' et B'.

4. Soit C le point d'affixe -1. Quelle est la nature du triangle (ABC) ?

16 **C** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = jz + 2$. M est le point du plan complexe d'affixe $z = x + jy$ et M' celui d'affixe $f(z)$.

1. Calculer $f(1)$; placer les points A et A' d'affixe 1 et $f(1)$.

2. Déterminer la solution c de l'équation $f(z) = z$; c a pour image le point C.

Donner le module et un argument de c.

Quelle est la nature du triangle (CAA') ?

3. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

Déterminer l'ensemble (E) des points du plan complexe tels que $f(z)$ soit réel.

Déterminer l'ensemble (F) des points du plan complexe tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Déterminer l'ensemble (G) des points du plan complexe tels que $|f(z)| = 2$.

17 Soit $f : z \mapsto 2jz + 2 + j$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

1. Montrer que l'équation $f(z) = z$ admet une solution unique a.

2. En déduire que la transformation géométrique qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z' = f(z))$ admet un point fixe unique A dont on donnera les coordonnées.

3. Montrer que $z' - a = 2j(z - a)$.

4. En déduire que la transformation géométrique associée à f est une *similitude* dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.

18 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = (1+j)z + j$.

1. Résoudre l'équation $f(z) = z$.

2. a. Montrer que $(z' + 1) = (1 + j)(z + 1)$

b. En déduire que la transformation géométrique associée à f est une similitude dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.

3. À tout point M d'affixe $z = x + jy$ cette transformation géométrique associe le point M' d'affixe $z' = x' + jy'$, exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

4. Déterminer une équation de la droite (D') image de la droite (D) d'équation : $2x - y + 1 = 0$.

19 Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{0\}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$.

1. Quelle est la nature de la transformation géométrique associée à f ?

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$, $-2j$ et $-\frac{1}{2} - 2j$.

Déterminer leurs images A', B' et C' par cette transformation.

3. a. Quelle est l'image de la droite (AB) par cette transformation ?

b. Quelle est l'image du cercle de diamètre $[AB]$ par cette transformation ?

PROBLÈMES/TRAVAUX PRATIQUES

Module	Travaux pratiques du module	Problèmes correspondants
Nombres complexes 2	TP 1 Calcul dans $\mathbb{C}$ et exemples de mise en œuvre des formules d'Euler : Linéarisation de polynômes trigonométriques.	Problèmes : 20 à 23
	TP 2 Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	Problèmes : 24 à 26
	TP 3 Exemples d'études de transformations géométriques	Problèmes : 27 à 34

CALCUL DANS $\mathbb{C}$

20 ** C

On considère le nombre complexe $a = e^{\frac{2j\pi}{5}}$.

1. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes 1, a, a^2, a^3, a^4.

Vérifier que $a^5 = 1$ et montrer que :

$$IA = AB = BC = CD = DI.$$

Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité : 4 cm).

2. a. Vérifier que, pour tout nombre complexe z :

$$z^5 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$

et en déduire que : $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.

b. Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$ et en déduire que :

$$(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0.$$

3. Résoudre l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduire, à partir de (2), la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

21 *

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm.

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, j désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2j$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + j}{z + 2j}$$

1. Si $z = x + jy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

On vérifiera que

$$\mathcal{R}e(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}.$$

2. En déduire la nature de :

a. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel,

b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul,

c. représenter ces deux ensembles.

FORMULES D'EULER – LINÉARISATION

22 * C

À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.

23 *

Linéariser $\cos^3 x \cdot \sin^2 x$.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

24 **

Soit l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 + (1 - 5j)z^2 - 2(5 + j)z + 8j$.

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution qui est un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

2. En déduire que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme $f(z) = (z - 2j)(z^2 + az + b)$ où a et b sont deux complexes à déterminer.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. Résoudre l'équation $a^2 = 8 - 6j$.

25 *

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$.

1. Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

3. On considère les nombres complexes : $z_0 = -2$, $z_1 = 2(1+\mathrm{j})$ et $z_2 = 2(1-\mathrm{j})$.
Calculer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2.
Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $w = \dfrac{z_0 \cdot z_1^2}{z_2^3}$.

4. Soit $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe (unité graphique 2 cm).
Placer les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.
Que peut-on en déduire pour le triangle $M_0M_1M_2$?

26 *** C

D'après BTS

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme

$$P(z) = z^4 + (-4-4\mathrm{j})z^3 + (-6+20\mathrm{j})z^2 + (28+32\mathrm{j})z + 32 - 48\mathrm{j}.$$

1. Calculer $P(-2)$.
En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme : $(z+2)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme complexe du 3ᵉ degré.

2. Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on calculera.

3. Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
Calculer les modules des quatre solutions z_0, z_1, z_2, z_3. On notera z_0 la solution de plus petit module.

4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, représenter les points M_1, M_2, M_3, M_0 d'affixes respectives -2, $4\mathrm{j}$, $5-\mathrm{j}$ et $1+\mathrm{j}$.

Montrer que $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle dont le centre de gravité est M_0.

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

27 * C

Exemple de transformation du type

$$f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Soit f la fonction de $\mathbb{C} - \{\mathrm{j}\}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ définie par $f(z) = \dfrac{2(1-\mathrm{j})z - 2\mathrm{j}}{z - \mathrm{j}}$.

1. Monter que pour tout z de $\mathbb{C} - \{\mathrm{j}\}$, on a $f(z) = 2\left(\dfrac{1}{z-\mathrm{j}} + 1 - \mathrm{j}\right)$.

2. On considère les fonctions suivantes :

$f_1 : z \to z_1 = z - \mathrm{j}$

$f_2 : z_1 \to z_2 = \dfrac{1}{z_1}$

$f_3 : z \to z_3 = z_2 + 1 - \mathrm{j}$

$f_4 : z_3 \to z' = 2z_3$

On appelle T_1 la transformation géométrique associée à f_1.
On appelle I la transformation géométrique associée à f_2.
On appelle T_2 la transformation géométrique associée à f_3.
On appelle H la transformation géométrique associée à f_4.

a. Déterminer T_1, I, T_2 et H.

b. Exprimer la transformation géométrique associée à f en fonction de T_1, I, T_2 et H.

(On a $z \mapsto z_1 = z - \mathrm{j} \mapsto z_2 = \dfrac{1}{z_1} \mapsto z_3 = z_2 + 1 - \mathrm{j} \mapsto z' = 2z_3$.)

3. À l'aide de la décomposition de f déterminée au **2. b.**, montrer que l'image par la transformation géométrique associée à f de la droite D d'équation $x = 1$ est le cercle C de centre $A(3\,;-2)$ et de rayon 1.

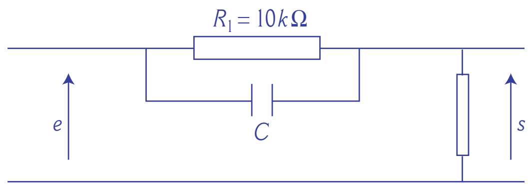
4. a. En partant de l'égalité $z' = \dfrac{2(1-\mathrm{j})z - 2\mathrm{j}}{z-\mathrm{j}}$, montrer que $z = \dfrac{\mathrm{j}(z'-2)}{z' - 2 + 2\mathrm{j}}$.

b. En posant $z = x + y\mathrm{j}$ et $z' = x' + y'\mathrm{j}$ déterminer x en fonction de x'.

c. Déterminer alors l'équation du cercle $\mathscr{C}'$, image de la droite $x = 1$ et vérifier que l'on retrouve bien les résultats de la question **3.**).

28 ***

D'après BTS



On considère le filtre où C désigne la capacité en farads) d'un condensateur et R_2 la valeur (en ohms) d'un résistor. *Le but de l'exercice consiste à ajuster les valeurs de C et de R_2 pour obtenir un filtre dont les propriétés sont fixées.*

La fonction de transfert du filtre, en régime harmonique, est $T(\omega) = \alpha\dfrac{1+\mathrm{j}a\omega}{1+\mathrm{j}b\omega}$, avec $\alpha = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$, $a = R_1C$, $b = \alpha a$, $0<\alpha<1$ et $\omega \in \left]0\,;+\infty\right[$.

Partie A

1. Montrer que pour tout ω,

$$T(\omega) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{1-\mathrm{j}\dfrac{1}{b\omega}}.$$

2. Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Quel est l'ensemble $(\varDelta)$ des points M d'affixe $z = 1-\mathrm{j}\dfrac{1}{b\omega}$?

3. Soit f la fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \alpha + \dfrac{1-\alpha}{z} = \alpha + (1-\alpha)\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et soit F la transformation ponctuelle associée qui à tout point M d'affixe z du plan privé du point O associe le point M' d'affixe $f(z)$.

a. En utilisant les propriétés de la transformation $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ définir l'ensemble (C_1) des points M_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ obtenu quand M décrit $(\varDelta)$.

b. Quelle est la transformation ponctuelle faisant passer de M_1 à M_2 d'affixe $(1-\alpha)\left(\dfrac{1}{z}\right)$?

En déduire l'ensemble (C_2) décrit par M_2 quand M décrit $(\varDelta)$.

c. Soit M' le point d'affixe

$$f(z) = \alpha + \frac{1-\alpha}{z} = \alpha + (1-\alpha)\left(\frac{1}{z}\right).$$

Quelle est la transformation ponctuelle faisant passer de M_2 à M' ? En déduire l'ensemble (C') décrit par M' quand M décrit $(\varDelta)$.

4. Soit θ un argument de $T(\omega)$, $\theta \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, déterminer graphiquement le point N' de (C') en lequel θ est maximum. On note $A(\omega)$ la valeur maximum de cet argument. Calculer $\sin(A(\omega))$ en fonction de α.

5. Représenter ces ensembles dans le cas $\alpha = \dfrac{1}{3}$, on prendra une unité graphique de 9 cm.

Partie B

Dans cette partie on se propose de calculer les valeurs de C et de R_2 de sorte que $A(\omega) = \dfrac{\pi}{6}$ pour une fréquence de 1 kHz.

1. De $A(\omega) = \dfrac{\pi}{6}$, déduire la valeur correspondante de α, puis celle de R_2.

2. En admettant que $\alpha = \dfrac{1}{3}$, sur la figure de la partie A. construire le point N de $(\varDelta)$ dont l'image par F est le point N'.

Calculer la distance HN (H étant le point d'affixe 1). En déduire la valeur correspondante de b, puis celle de C.

29 ** D'après BTS

On considère la fonction de transfert T de la pulsation ω définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par

$$T(\omega) = \frac{K}{R+\mathrm{j}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}.$$

K est une constante complexe. R, L et C sont des constantes réelles strictement positives.

La pulsation ω est exprimée en radian/seconde.

On pose $h(\omega) = \dfrac{1}{R}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)$ avec $\omega \in \left]0,+\infty\right[$.

Dans ces conditions, $T(\omega) = \dfrac{K}{R}\,\dfrac{1}{1+\mathrm{j}h(\omega)}$.

1. Étudier les variations de h. Déterminer en fonction de R et C la valeur de ω qui annule h.

2. On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan complexe, décrit par le point d'affixe $T(\omega)$ quand ω parcourt $\left]0,+\infty\right[$.

a. Représenter dans le plan complexe l'ensemble $\varDelta$ des points d'affixe $1+\mathrm{j}h(\omega)$.

b. En utilisant les propriétés de l'inversion complexe, en déduire l'ensemble Γ des points d'affixe $\dfrac{1}{1 + jh(\omega)}$.

c. Préciser la nature de l'ensemble (E).

3. Application numérique :

a. Avec les données numériques précisées ci-dessous, représenter graphiquement l'ensemble (E) lorsque $\alpha = 0$ et colorier la partie de (E) correspondant à des fréquences comprises entre 80 Hz et 100 Hz.

b. À l'aide de ces résultats traiter le cas $\alpha = \pi/6$.

Données numériques : $L = 0{,}1$; $C = 10^{-4}$; $R = 50$; $K = 220e^{\alpha j}$.

30 D'après BTS

*** C

On considère le filtre suivant :

À l'entrée de ce filtre on applique une tension sinusoïdale e_1 de pulsation ω.

À la sortie on recueille une tension sinusoïdale e_2 de même pulsation.

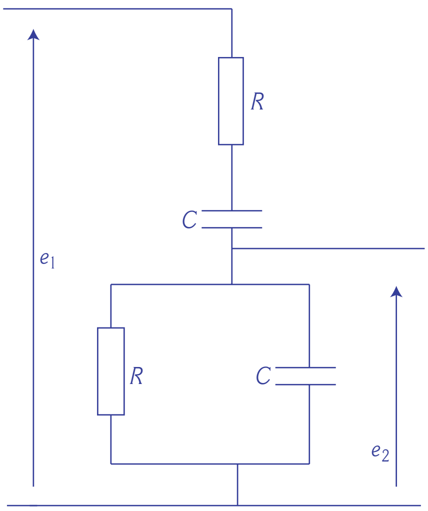
On désigne par $\omega \mapsto T(\omega)$ la fonction de transfert.

L'application des lois de l'électricité permet d'écrire :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)}}$$

$$Z_1(\omega) = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ et } Z_2(\omega) = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}.$$

R et C sont des constantes réelles strictement positives.



1. Montrer que : $T(\omega) = \dfrac{1}{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$.

2. On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan complexe décrit par le point M d'affixe $T(\omega)$ lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$.

a. On considère la fonction

$$h : \omega \mapsto RC\omega - \frac{1}{RC\omega}, \quad \omega \in]0, +\infty[.$$

Étudier les variations de la fonction h et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m d'affixe $z = 3 + jh(\omega)$ lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$?

c. Quelle transformation associe au point m d'affixe $z = 3 + jh(\omega)$ le point M d'affixe $Z = T(\omega)$?

En déduire l'ensemble (E) décrit par le point M.

d. Tracer sur une même figure les ensembles (D) et (E). On prendra pour unité graphique 6 cm.

On représentera le point m_0 d'affixe $3 + j$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

31 D'après BTS

** C

Partie A

On considère les nombres complexes $z'_1 = \dfrac{1}{1 + j}$ et $z'_2 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}j}$.

1. Écrire z'_1 et z'_2 sous forme algébrique.

2. Placer les points A d'affixe 1, C d'affixe $\dfrac{1}{2}$, M'_1 d'affixe z'_2 dans le plan complexe (unité graphique 10 cm).

3. Montrer que O, A, M'_1 et M'_2 appartiennent à un même cercle de centre C dont on précisera le rayon.

Partie B

On se propose de démontrer géométriquement le résultat ci-dessus.

On pose, pour tout réel a : $z = 1 + j\alpha$.

1. Lorsque α décrit l'ensemble des nombres réels, quel est l'ensemble (Δ) des points M du plan d'affixe z ?

2. Soit la transformation géométrique du plan complexe privé du point O dans lui-même, qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{z}$.

Déterminer le module et un argument de z' en fonction de ceux de z.

3. Quelle est l'image de l'ensemble (Δ) par la transformation donnée ?

Partie C

On obtient le diagramme de Nyquist d'une fonction de transfert T en traçant dans le plan complexe la courbe représentative de T ; c'est-à-dire qu'à toute pulsation, (ω réel positif), on associe le point d'affixe $T(\omega)$.

1. Construire dans un repère les diagrammes de Nyquist des fonctions de transfert T_1 et T_2 définies sur $]0, +\infty[$ par $T_1(\omega) = 1 + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0}$ et $T_2(\omega) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec ω_0 réel strictement positif.

2. Préciser les images de ω_0 et $\frac{\omega_0}{2}$ par T_1 et T_2 et placer les points correspondants sur le graphique.

32 ** D'après BTS

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit f l'application qui à tout point m du plan P d'affixe z $(z \neq -1)$ associe le point M d'affixe $Z = \frac{z}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+z}$.

1. Déterminer l'ensemble D des points d'affixe $-\frac{3}{2} + \mathrm{j}y$, $(y \in \mathbb{R})$.

2. Soit $z_1 = z + 1$. Préciser la transformation géométrique t_1 qui associe à un point m d'affixe z, le point M_1 d'affixe z_1. Quelle est l'image, notée D_1, de D par la transformation t_1 ?

3. Soit t_2 la transformation géométrique qui à tout point d'affixe z $(z \neq 0)$, associe le point M_2 d'affixe $z_2 = \frac{1}{z}$.

Préciser la nature de t_2. Quelle est l'image, notée Γ_2, de D_1 par la transformation t_2 ?

4. Soit t_3 la transformation géométrique qui au point d'affixe z, associe le point M_3 d'affixe $z_3 = -z$. Préciser la nature de t_3. Quelle est l'image, notée Γ_3, de Γ_2 par la transformation t_3 ?

5. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $Z = 1 - \frac{1}{1+z}$ lorsque $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{j}y$, $(y \in \mathbb{R})$.

6. Représenter sur une même figure les ensembles successifs obtenus.

33 ** C D'après BTS

$(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan complexe (P).

On se propose d'utiliser les nombres complexes et leur lien avec les transformations géométriques pour construire sur un écran graphique une figure formée de carrés concentriques emboîtés à partir de la donnée d'un point.

Partie A. Construction d'un carré de centre O à partir d'un point A

Soit A un point du plan (A distinct de O) d'affixe $z_A = x_A + \mathrm{j}y_A$. On se propose de calculer une procédure permettant de tracer le carré $(ABCD)$ de centre O direct c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure dans le cas $z_A = 2 + \mathrm{j}$.

2. On revient au cas où A est quelconque et on note z_B, z_C, z_D les affixes des points B, C, D.

Montrer que $z_B = \mathrm{j}z_A$ puis calculer z_C et z_D en fonction de z_A.

3. On note (x_B, y_B) ; (x_C, y_C) ; (x_D, y_D) les coordonnées des points B, C, D.

Calculer (x_B, y_B) ; (x_C, y_C) ; (x_D, y_D) en fonction de (x_A, y_A).

4. On suppose que l'on dispose d'une procédure TRACE (x_M, y_M, x_N, y_N) traçant le segment $[MN]$.

Écrire une procédure CARRE (x_A, y_A) traçant le carré $(ABCD)$ de sens direct de centre O et de sommet A.

Partie B. Construction de carrés de centre O à partir d'un point

1. Soit S l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(1+\mathrm{j})z$. Déterminer la nature géométrique de S.

2. Le carré $(ABCD)$ construit à partir du point A dans la **partie A**) est supposé donné. On note A', B', C', D' les images respectives des points A, B, C, D par S.

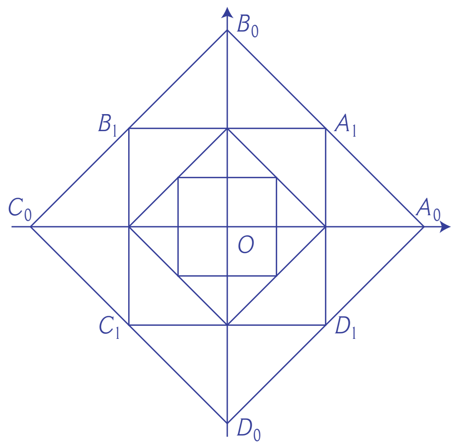
a. Montrer que A' est le milieu de $[AB]$.

b. En déduire que B', C', D' sont les milieux de $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et que $(A'B'C'D')$ est un carré de centre O.

c. Calculer les coordonnées $(x_{A'}, y_{A'})$ du point A' en fonction de celles du point A.

3. On se propose de réaliser un dessin correspondant à la figure donnée avec 10 carrés emboîtés. Le premier carré est $(A_0B_0C_0D_0)$ défini par le point A_0 de coordonnées $(k, 0)$ avec k réel strictement positif. Le deuxième carré est $(A_1B_1C_1D_1)$ et on itère jusqu'au dixième carré.

En utilisant la procédure CARRE définie dans la **partie A, question 4**. Donner un algorithme permettant de réaliser un tel dessin ci-après.



34 ** D'après BTS

$(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan complexe (P).

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $a = \frac{3}{4} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Soit S la transformation géométrique qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = S(M)$ d'affixe z', $z' = az$.

a. Quelle est la nature de la transformation géométrique S ?

b. Déterminer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

3. Soit $\vec{w}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$, et $[Ox)$ la demi droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

A_0 est le point d'affixe 1 et A_1 sa projection orthogonale sur $[Ox)$.

a. Montrer que $A_0A_1 = \frac{1}{2}$ et que $OA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, montrer que $S(A_0) = A_1$.

b. On pose $A_2 = S(A_1)$; donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$; et montrer que le triangle (OA_1A_2) est rectangle en A_2.

4. On définit la suite $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ de points du plan de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_0 \text{ est le poin d'affixe } 1 \\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$$

On obtient une ligne polygonale appelée spirale P_n de sommets successifs $A_0A_1A_2 \ldots A_n$.

Représenter la spirale P_6 dans le plan complexe (unité graphique 8 cm).

5. Écrire un algorithme permettant de tracer P_6 :

On utilisera la procédure TRACER-SEGMENT (x_1, y_1, x_2, y_2) qui permet de tracer le segment $[M_1M_2]$ où M_1 et M_2 sont les points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

6. On désigne par z_n l'affixe de A_n. Montrer que $z_{n+1} - z_n = a(z_n - z_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

a. On pose $d_n = A_nA_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$; montrer que $d_n = \frac{\sqrt{3}}{2}d_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? En déduire d_n en fonction de n et de d_0.

c. Si l'on suppose que l'on ne distingue plus 2 points distants de 1/100, jusqu'à quelle valeur de n suffit-il de tracer la spirale P_n ?

7. On pose : $D_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} A_kA_{k+1}$; calculer D_n en fonction de n. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} D_n = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.