J'apprends les maths CM2

MANUEL

Sous la direction de
RÉMI BRISSIAUD
Maitre de conférences de psychologie expérimentale

ANDRÉ OUZOULIAS
Professeur agrégé

PIERRE CLERC
Instituteur

FRANÇOIS LELIÈVRE
Professeur des écoles

LUC TIENNOT
Formateur à l'Éspé de La Réunion

RETZ
www.editions-retz.com
9 bis, rue Abel Hovelacque
75013 Paris

Présentation

Depuis l'édition précédente de *J'apprends les maths CM2*, de nouveaux programmes pour la rentrée 2016 ont été publiés et une Conférence de consensus, qui s'est tenue en 2015, a émis des recommandations concernant les apprentissages numériques à l'école élémentaire. Les choix didactiques de la collection et notamment ceux de *J'apprends les maths CM2* s'en sont trouvés confortés.

Rappelons quelques choix pédagogiques qui, dès l'origine, ont été ceux de *J'apprends les maths* :

- les élèves apprennent dès le CM1 la résolution des problèmes de proportionnalité en calculant la valeur de l'unité (stratégie qui, souvent, est improprement appelée : « règle de trois ») ;
- en CM2, les élèves apprennent même à « pousser une division après la virgule » (cela conforte une bonne compréhension des nombres décimaux).

Par ailleurs, certains choix pédagogiques de *J'apprends les maths* sont aujourd'hui confortés par la recherche scientifique. C'est le cas notamment de la distinction de deux types de stratégies de résolution de problèmes : la « résolution par simulation de la situation » et la « résolution arithmétique ». Les pages « **Problèmes pour apprendre à chercher** » contribuent largement à faire comprendre cette distinction.

La progression de *J'apprends les maths* concernant **les nombres décimaux** est un des points forts de la collection. Les fractions sont en effet abordées avant les décimaux et, de plus, le sens « division » des fractions est abordé en premier (13/10 se lit d'abord : « 13 divisé par 10 », avant de se lire « 13 dixièmes »). Les raisons de tels choix sont exposées ci-dessous, après avoir abordé le thème de la division.

L'exemple de la division

Les deux « gestes mentaux » de la division

Rappelons d'abord (pour une présentation détaillée, voir le *Guide pédagogique*) que le calcul du quotient et du reste d'une division est susceptible de solliciter deux « gestes mentaux » de base : celui de la division par partition (ou par partage) et celui de la division par quotition (ou par groupement).

Pour diviser 27 847 par 4 (division par un nombre à 1 chiffre), par exemple, les enfants peuvent penser à un scénario de partages successifs des milliers, centaines, dizaines et unités comme celui-ci :

– Partage des milliers : 27 milliers partagés en 4, cela fait 6 pour chacun et 3 milliers restent à partager.

– Partage des centaines restantes : les 3 milliers restants et les 8 centaines qu'on avait au départ font 38 centaines à partager en 4, etc.

Ce premier « geste mental » est celui qu'on utilise lorsqu'on « pose » cette division par écrit.

Présentons l'autre « geste mental de base ». Si l'on doit diviser 903 par 125, par exemple, cela n'aide guère d'imaginer le partage de 903 objets entre 125 personnes. Il convient mieux de chercher : « Avec 903 objets, combien peut-on former de groupes de 125 ? » ou encore « En 903, combien de fois 125 ? », ce qui correspond au geste de la division-quotition. Comme 7 fois 125 = 875, le quotient est 7 et le reste 28.

> Les exemples numériques précédents n'ont pas été choisis au hasard : lorsqu'on divise un « grand nombre » par un nombre à un chiffre (le quotient est alors un nombre à plusieurs chiffres), on a intérêt à procéder par partages successifs des milliers, centaines… En revanche, lorsqu'on divise un nombre *a* par un autre *b* alors que le quotient n'a qu'un seul chiffre, on a intérêt à se demander : « En *a* combien de fois *b* ? ».

L'apprentissage de la technique et la conceptualisation de la division

Avoir compris ou avoir conceptualisé la division euclidienne, c'est avoir construit la conviction de l'équivalence des deux gestes mentaux précédents : deux nombres *a* et *b* étant donnés, il est équivalent de chercher « En *a* combien de fois *b* ? » ou de chercher la valeur d'une part lorsqu'on partage *a* en *b* parts égales.

Dans des divisions par un nombre à un chiffre, comme 27 847 divisé par 4, par ex., la technique de la division revient à mettre en œuvre le geste mental du partage successif des milliers, centaines, dizaines et unités. Il est clair qu'une bonne maitrise de l'un des deux gestes mentaux (celui du partage en l'occurrence) ne peut que favoriser l'appropriation de leur équivalence. Et y a-t-il un meilleur moyen de s'approprier ce même geste que de le mettre en œuvre dans le calcul de divisions *a : b* ?

De plus, dans le cas général de la division par un nombre à plusieurs chiffres, celui du calcul de 87 647 divisé par 12 par ex., la technique de la division revient à mettre en œuvre, de manière coordonnée, les deux gestes mentaux. Pour calculer cette division, en effet, on est amené à partager successivement les 87 milliers en 12, puis les centaines restantes en 12, etc. La structure générale de la technique est donc du côté d'un partage successif des milliers, centaines, etc., ce qui sollicite le geste mental de la partition. Mais chaque quotient partiel, lui, est obtenu en se demandant : « En 87 combien de fois 12 ? », etc., sollicitant alors le geste mental de la quotition.

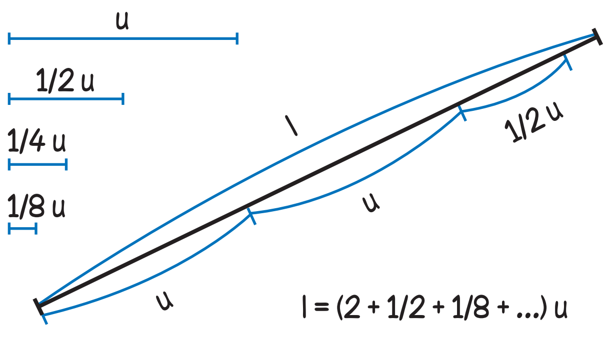
Pour effectuer une division par un nombre à 2 chiffres dans le cas général où le quotient a lui-même plus de 2 chiffres, il suffit donc de mettre en œuvre, de manière coordonnée, les deux « gestes mentaux » dont l'équivalence fonde cette opération arithmétique. La véritable difficulté n'est donc pas dans l'enseignement de cette technique en elle-même mais dans celui de l'équivalence entre la quotition et la partition. Ainsi, contrairement à ce qu'on pourrait penser, le fait qu'un élève soit capable de calculer une division par un nombre à deux chiffres peut être considéré comme un indice d'une bonne compréhension du sens de cette opération.

En résumé, **la conceptualisation arithmétique exige d'accompagner les élèves dans la rencontre de certaines difficultés**. Nous allons voir de même que, concernant les nombres décimaux, il apparait tout aussi indispensable d'affronter certaines difficultés.

L'exemple des décimaux

Les nombres décimaux servent à approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue.

> Pour résoudre ce problème, les Égyptiens ont inventé les fractions de numérateur 1. Plus précisément, dans la plupart des contextes (mesures de contenances de récipients remplis de céréales, d'agrumes ou de liquides), ils utilisaient uniquement les fractions : 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 et 1/64…, c'est-à-dire celles dont le numérateur est 1 et le dénominateur une puissance de 2.
>
> Un tel système permet en effet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une longueur *l* à l'aide d'une unité *u*, par ex., comme le montre le schéma suivant :



D'un point de vue pratique et théorique, la suite de fractions 1/2, 1/4, 1/8… et celle des décimaux 1/10, 1/100, 1/1 000… ont exactement la même fonction.

Disons-le clairement : il est impossible d'envisager que les élèves comprennent les décimaux sans avoir étudié en classe, de façon assez approfondie, les fractionnements successifs par 10, 100, 1 000, etc.

De même que, d'un point de vue historique, les hommes ont d'abord découvert le système 1/2, 1/4, 1/8... pour approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue, c'est d'abord sous la forme de fractions que les enfants doivent découvrir les décimaux en classe.

Les deux « gestes mentaux » qui permettent de comprendre les fractions

Cependant, une progression pédagogique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas suffisante pour que les enfants conceptualisent ces nombres. De nombreux enseignants font ce choix et se plaignent toujours que leurs élèves comprennent mal les décimaux.

L'explication de ce phénomène est vraisemblablement la suivante : les enfants conceptualisent mal les décimaux, bien qu'ils soient présentés comme fractions décimales particulières, parce que, plus généralement, ils conceptualisent mal les fractions. En effet, tel qu'on s'y prend le plus souvent, les élèves comprennent mal que *a*/*b* puisse se lire aussi bien *a divisé par b* que *a fois un b*^{ième}.

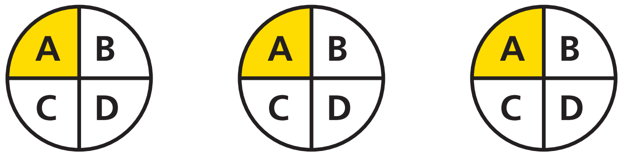
Or, par exemple, si on s'intéresse à une fraction d'heure, l'écriture 3/4 ne doit pas seulement évoquer une durée de « trois quarts d'heure », elle désigne aussi la durée correspondant à 3 heures partagées en 4 périodes égales (« 3 divisé par 4 »).

Souvent, les élèves comprennent mal l'équivalence de ces « gestes mentaux » différents. Il est alors normal qu'ils comprennent mal pourquoi, par exemple, 3 : 10 = 3/10 (ou 0,3). Pourtant, il n'y a pas de vraie compréhension des décimaux s'il n'y a pas de compréhension du fondement de telles égalités.

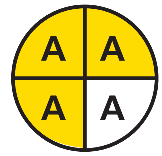
C'est pourquoi deux choix fondamentaux caractérisent la progression adoptée dans *J'apprends les maths* : **le sens « division » d'une fraction** *a*/*b*, le moins banal, est rencontré le premier, puis, lorsque les enfants se sont approprié l'équivalence entre les deux « gestes mentaux » qui fondent les fractions, **les décimaux sont présentés comme des fractions particulières.**

Enseigner d'abord les fractions *a*/*b* dans leur sens « *a* divisé par *b* »

Les raisons d'un tel choix sont nombreuses et sont présentées de manière détaillée dans le *Guide pédagogique*. Il est clair que le sens « division » est le moins naturel parce qu'une écriture comme 3/4 se lit communément « trois quarts » et non « 3 divisé par 4 ». Mais ce sens n'est pas le plus difficile à comprendre. Et, surtout, il est plus facile de s'approprier l'équivalence entre les deux sens lorsque le sens « division » est premier que lorsque c'est le sens « fractionnement » qui est premier. En effet, pour partager 3 pizzas en 4 parts égales (A, B, C, D), la solution suivante est simple :



Lorsqu'on a noté 3/4 (3 divisé par 4) la valeur d'une part (celle de A, par exemple), il est simple de comprendre que cette même part s'obtient aussi en prenant une seule pizza, en la partageant en 4 et en prenant 3 des parties ainsi formées (ce qui correspond aux trois quarts d'une pizza).



© Retz, 2017 ISBN 978-2-7256-3530-9

Lorsqu'on s'intéresse aux fractions *a/b* avec *a* > *b*, celles-ci correspondent à des divisions où l'on partage le reste. S'il faut partager équitablement 23 images entre 4 enfants, on ne va pas déchirer les 3 images restantes pour les partager. Mais s'il s'agit de 23 petits pains, il en va autrement. C'est ainsi que 23/4, par exemple, désigne 5 unités (quotient entier) auxquelles il faut ajouter le reste : 3 divisé par 4. On peut donc écrire que 23/4 = 5 + ¾. Il en va de même avec les fractions décimales.

Lorsque les élèves ont appris à noter une fraction décimale avec une virgule (7/10 = 0,7), il devient alors évident pour eux que 137/10 = 13,7.

> Avec d'autres progressions où, contrairement à celle de *J'apprends les maths*, on n'enseigne pas le sens division des fractions, ce type d'exercice est très mal réussi. On comprend pourquoi : lorsque la seule signification des fractions que les élèves rencontrent est le « fractionnement de l'unité », le raisonnement nécessaire pour trouver la solution est hors de portée de la plupart des élèves. Pour 137/10 (lu : « 137 dixièmes » et non : « 137 divisé par 10 »), le raisonnement induit (en 137, combien de fois 10 ?) doit les conduire à faire la division avec reste de 137 par 10 (quotient 13), mais il leur faut aussi interpréter le reste, ce qui n'a rien d'évident !

Et la division avec quotient décimal ?

L'enseignement correspondant ne pose pas de difficulté particulière pour peu que les élèves aient compris : 1°) la division avec quotient entier, 2°) le fractionnement décimal. Il est toujours préférable de construire un réseau de connaissances plutôt que des connaissances isolées. C'est d'ailleurs un excellent moyen d'apprécier si un élève a compris à la fois la technique de la division et ce qu'est un nombre décimal que de lui demander à quoi correspondent les chiffres qui apparaissent lorsqu'on « pousse une division après la virgule ».

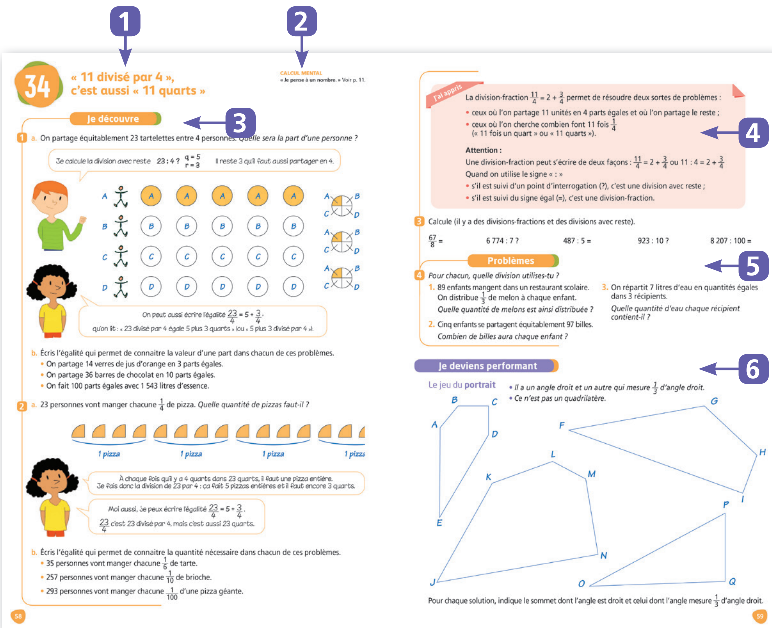
L'organisation en 4 périodes

Périodes	Nombres et calculs	Géométrie et mesures	Pages
1	Numération (les grands nombres) ; les 3 opérations (calcul mental et technique écrite) ; la division avec reste : les 2 « gestes mentaux ».	Vocabulaire de base ; les angles, droites et segments perpendiculaires. Conversions de mesures entières de longueur et de durée (1).	14 à 55
2	La division-fraction ; les fractions décimales ; technique de la division avec reste (suite).	Droites et segments parallèles ; les aires ; construction de triangles. Conversions de mesures entières de longueur, de durée (2) et d'aires.	56 à 89
3	Les fractions décimales (écriture décimale ou « à virgule ») ; division par un nombre à 2 chiffres ; quotient décimal ; la moyenne.	Rédiger le plan de construction d'une figure ; les solides. Sens des chiffres dans une mesure décimale (longueurs et aires).	90 à 133
4	La proportionnalité ; produit d'un entier par un décimal ; graphiques.	Symétrie par rapport à une droite ; périmètre et aire du rectangle (suite) ; agrandissement et réduction de figures. Conversions de mesures décimales de contenance et de masse.	134 à 165

Sur le site compagnon www.japprendslesmaths.fr, téléchargez la synthèse de la mise en œuvre des séquences (notes de bas de page sur l'ancienne édition) et le tableau de correspondance avec les notions et compétences au programme.

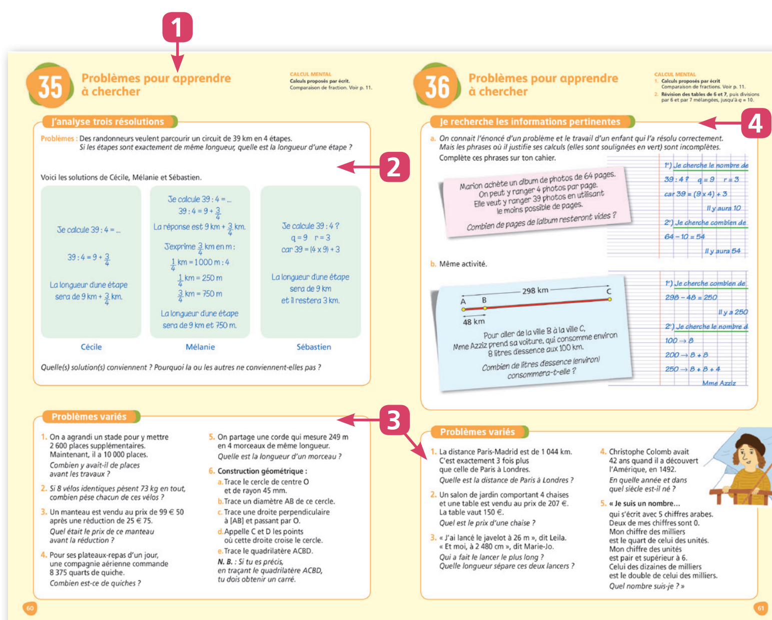
Illustrations : Sébastien Chebret • Toutes les photos sont © istock
Conception et mise en page : Anne-Danielle Naname
Direction éditoriale : Céline Lorcher • **Édition :** Anne-Sophie Perret • **Relecture :** Gérard Tassi

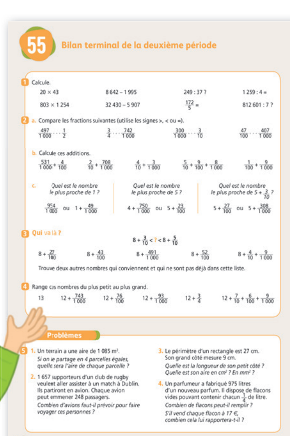
Mode d'emploi



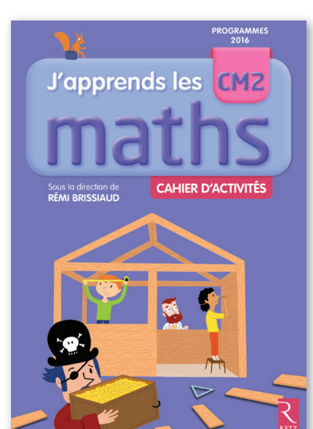
1. **Le titre** te présente les notions que tu vas apprendre dans cette séquence.
2. Au début de chaque séquence, l'enseignant te donne une série de **calculs mentaux**. Ici, tu vois de quels types de calculs il s'agit.
3. Ces exercices te font **découvrir les nouvelles notions**.
4. Cet encadré résume **la règle ou la méthode à retenir** pour savoir refaire facilement d'autres exercices !
5. Dans cette rubrique, pense à utiliser le « J'ai appris » pour pouvoir **résoudre des problèmes**.
6. Ici, tu vas t'exercer sur des notions que tu as déjà apprises avant. **En t'entrainant régulièrement**, tu deviendras un expert !

1. **Les problèmes pour apprendre à chercher** reviennent régulièrement dans ton manuel.
2. Ici, sont présentées **3 façons différentes de résoudre un problème**. À toi de trouver les erreurs et la méthode la plus efficace !
3. Dans cette rubrique, pense à utiliser toutes les stratégies que tu as apprises dans les séquences précédentes pour pouvoir **résoudre des problèmes**.
4. Tu **apprends ici à chercher et à trier des informations pertinentes** dans l'énoncé (texte, schéma, tableau...). Ce sont elles qui te permettront de résoudre cet exercice !





N'oublie pas ton cahier d'activités où tu vas devoir réaliser certains exercices et récupérer ton matériel à découper !



Ton manuel est organisé en 4 périodes (tu les repères grâce à leur couleur : rouge, orange, vert et bleu). À la fin de chaque période, un bilan te permet de revoir les notions apprises.

Sommaire

Pages où sont introduites les notions* en :
Nombres et calculs — Espace et géométrie — Grandeurs et mesures
Problèmes pour apprendre à chercher

1re période

2e période

* *Chaque séquence propose également des activités de réinvestissement des notions précédemment découvertes.*

3e période

4e période

Progression par domaine

NB : Les numéros renvoient aux séquences et une même séquence peut apparaitre dans plusieurs rubriques.

Nombres et calculs

Nombres, opérations et écritures

Représenter et ordonner les entiers
Numération décimale 1, 3, 4, 5, 22
Écritures additives
(numération égyptienne et romaine) 4, 5, 9
Lignes graduées et graphiques 27, 44, 103, 107

Représenter et ordonner les décimaux
Écritures fractionnaires 32 à 35
Écritures « à virgule » 56 à 59
Lignes graduées et graphiques 48, 58, 59

Addition et soustraction
La soustraction 6
Lien entre addition et soustraction 29
Addition et soustraction de décimaux 67

Multiplication
Calcul de multiplications 7
Lien entre multiplication et division* 29
Décimal × *n* 70, 73 à 75, 108, 115, 116

Division
La division *a : b* ? (sens quotition et partition) 18
Lien entre multiplication et division* 29
La division *a / b* ou *a : b* = 32 à 35
La division pour chercher une moyenne 82, 97, 102

Fractions et décimaux
Écritures fractionnaires
(«*a* divisé par *b*» et «*a* fois *1 b*ième») 32, 33, 34, 35
Lien entre division et fraction 32, 33, 34
Fractions décimales équivalentes 33, 41
Fractions <, = ou > 1 37
Comparer et ordonner des fractions 37, 40, 47
Somme de fractions décimales 39, 40, 45, 47
Écrire un décimal avec la virgule 56 à 59
Situer un décimal par des encadrements successifs :
– écritures fractionnaires 48
– écritures « à virgule » 58, 59
Décimaux et système métrique 65, 66, 95, 100, 111
Approximations par excès, par défaut 79
Quotient décimal d'une division 80, 81, 83, 85, 86
Échelles 98, 117
Écritures du type *a / b × c* 114, 115, 116

Proportionnalité
Proportionnalité et non-proportionnalité 92
Situations de comparaison et retour à l'unité 92, 94
Différents modes de calcul 68, 77, 99, 104, 106
Conversions (voir la rubrique Mesures)

Les stratégies de calcul

L'addition
Le calcul approché pour contrôler un calcul 101

La soustraction
Calcul mental et résolution de problèmes 6
Compléments à 100, 1 000, 10 000, etc. 10

La multiplication
Choisir un ordre de calcul : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ 7
Multiplier *n* par 10, 20, 30…, 100, 200, 300… 11
Multiplier par 11, 101, 1 001,…
99, 999, 21, 31,… 11
Multiplication en ligne (47 × 19) 11
Multiplier un décimal par 10, 100, 1 000 73, 74
Le calcul approché pour contrôler un calcul 101
0,5 fois *n*, 1,5 fois *n*… 10,5 fois *n* 108
0,5 × *n*, 0,25 × *n*… 0,125 × *n* 116

La division
Division-partition (*q*, *r*) par *n* < 10 18, 19
Division-quotition
(par *n* < 10 ; n = 10, 25, 100,…) 18, 20
Division (*q*, *r*) par 10, 100, 1 000 22
Estimer le quotient d'une division-quotition 20, 49
Division d'un décimal par 10, 100, 1 000 73, 74
Calcul mental de divisions par 2 et par 4 83

Les techniques opératoires

Avec les entiers
Addition 5
Soustraction 12
Multiplication 13
Division *(q, r)* par un nombre à 1 chiffre 19
Division *(q, r)* par un nombre à 2 chiffres 62, 72

Avec les décimaux
Addition et soustraction 67
Multiplication d'un décimal par un entier 70, 75
Quotient décimal d'une division 80, 81, 83, 85, 86

Problèmes pour apprendre à chercher

Problèmes dits de multiplication
$(a \times b) - (c \times b) = (a - c) \times b$ 15
$a \times b \times c$ 16
« *n* fois plus que » 23
$(a \times b) - c$ et $(a - b) \times c$ 24

Problèmes dits de division
Partition (« n fois moins que… ») 23
Quotition (« combien de fois *b* dans *a* ? ») 36, 112
Partition (*partage équitable,*
quotient décimal) 35, 86
Calcul de moyennes 97
Partition (rechercher la valeur de l'unité) 105

Problèmes de proportionnalité
Différents modes de calcul 68, 77, 105, 106

Divers
Problèmes géométriques 8, 78, 86, 87
La numération romaine 9
Associer énoncé et série de calculs 16, 24, 36, 112
Aires 43, 52, 60, 86, 87, 113
Tableaux et graphiques 44
Horaires et durées 51, 61, 69
Pourcentages 68, 77
Échelles 98

* *Voir aussi les conversions dans la rubrique Grandeurs et mesures*

Espace et géométrie

Grandeurs et mesures

Calcul mental

Ajouter

Soustraire

Multiplier

Diviser

Comparer

Décomposer

Convertir

Les activités de calcul mental

En haut et à droite des pages du présent manuel, pour chaque séquence, nous proposons des activités de calcul mental. Rappelons que celles-ci sont étroitement liées à la progression d'ensemble et jouent un rôle essentiel dans le progrès des élèves.

Parfois les indications données suffisent à définir les calculs demandés. Mais le plus souvent, nous renvoyons aux quatre pages ci-après pour des précisions importantes.

Pour chaque activité, dans le sous-titre, nous n'indiquons que le numéro de la séquence dans laquelle elle est proposée la première fois.

2 Tables de multiplication

Nous avons choisi la formulation suivante des tables : pour la table de 3 par exemple, « 3 fois 1, 3 fois 2, 3 fois 3, 3 fois 4,… ». C'est en effet celle qui favorise le mieux l'usage des repères 5 et 10 et, donc, la mémorisation.

Dans un premier temps, pour que les élèves mémorisent bien les tables, ils doivent d'abord remarquer que, dans la table de 5, les nombres vont de 5 en 5 (5, 10, 15, 20, 25…), que, dans celle de 3, les nombres vont de 3 en 3 (3, 6, 9, 12,…), etc. Il convient ensuite de les amener à utiliser les repères « *n* fois 5 » et « *n* fois 10 ». Ainsi, « 4 fois 6 », c'est juste après « 4 fois 5 » : après 20 c'est 24 ; « 4 fois 9 », c'est juste avant « 4 fois 10 », avant 40 c'est 36. C'est pour faciliter ce raisonnement que l'on commence la révision des tables par celle de 5 : « 5 fois 9 », c'est juste avant « 5 fois 10 » : avant 50 c'est 45. La structure des tables présentées en fin du manuel et du fichier d'activités facilite aussi ce repérage.

Dans la révision des tables au CM2, nous privilégions les trois activités décrites ci-après.

1. Le jeu du furet. L'enseignant(e) annonce sur quelle table il va interroger (par exemple, celle de 4) et demande successivement à des enfants, par exemple :

Enseignant : « Luc » ; Luc : « 4 fois 1, 4 ».

Enseignant : « Sophie » ; Sophie : « 4 fois 2, 8 ».

Enseignant : « Tidiane » ; Tidiane : « 4 fois 3, 12 ». Etc.

Il est important que chacun énonce le produit et son résultat. Quand un élève a atteint « 4 fois 10, 40 », on continue en redescendant vers « 4 fois 1 ».

2. Interrogation dans le désordre. L'enseignant(e) propose les cas de la table, mais en les énonçant dans le désordre. Il demande par exemple successivement : « 4 fois 6 ? », « 4 fois 2 ? », « 4 fois 5 ? », etc. Les élèves écrivent sur l'ardoise le résultat correspondant.

3. *« 28, c'est 4 fois combien ? »* L'enseignant(e) propose successivement divers résultats d'une même table dans le désordre et, pour chaque résultat, les élèves doivent écrire sur l'ardoise le produit correspondant : 4 fois 7 (ou 4×7). Il s'agit, en quelque sorte, de l'activité précédente à l'envers. En limitant les associations erronées, cette tâche facilite la mémorisation.

Dès la sq 5 apparait une 4e activité : interrogation sur des cas mélangés provenant de tables déjà révisées, par exemple : 3 fois 9 ?, 4 fois 6 ?, 4 fois 9 ?, 3 fois 8 ?, etc.

4 Dictée de grands nombres

L'enseignant énonce un grand nombre (il comporte par exemple des centaines de milliers ou des millions, voire des milliards) ; les élèves doivent l'écrire sur leur cahier ou sur l'ardoise. On corrige aussitôt chaque cas au tableau. Les élèves sont conduits à utiliser la méthode enseignée dans la sq 3. L'enseignant privilégie les cas qui obligent à écrire des zéros pour les ordres de grandeur non énoncés, comme « dix-sept-millions-trois-mille-vingt », « six-millions-cent-quarante-huit », etc.

6 Soustractions *a* – *b* (*a* < 100)

Les cas sont du type 52 – 37 (deux nombres à deux chiffres) ou 63 – 8 (le petit nombre n'a qu'un chiffre). Si nécessaire, on pourra aussi proposer divers cas du répertoire de base, ceux qui interviennent dans le calcul des soustractions en colonnes, comme 9 – 3, 12 – 5, 7 – 0, etc. Si on le fait, il est bon de proposer également quelques cas « impossibles », tels que 3 – 9 ou 0 – 4, que l'on rencontre dans la disposition en colonnes en cas de retenue. On privilégiera les 3 stratégies suivantes :

- **Calcul « en reculant ».** Pour 63 – 8 par exemple, il est pertinent de retirer d'abord 3 (pour s'arrêter à 60), puis 5.
- **Calcul « en avançant ».** Pour 52 – 37 par exemple, il est pertinent de chercher le complément : pour aller de 37 à 40, il y a 3 et il y a encore 12 pour aller à 52.
- **Appui sur le répertoire additif.** Pour 51 – 25 par exemple, on s'appuie sur 25 + 25 = 50.

8 « 40 fois 6 », « 3 fois 80 »,…

Il s'agit de comprendre que, pour calculer 3 fois 80 par exemple, on utilise 3 fois 8, 24, mais le résultat est un nombre de dizaines : 240. Dans le cas de 40 fois 6, on sait que le résultat est aussi celui de 6 fois 40 (on est alors ramené au cas précédent), mais on peut aussi utiliser la décomposition : $40 \times 6 = 4 \times 10 \times 6$. On conclut que « 40 fois 6 » c'est comme « 4 fois 6, 24 », mais le résultat est 10 fois plus grand, c'est 240.

11 Compléments à 100 et à 1 000

L'enseignant écrit un nombre, 42 par exemple, et demande le complément à 100 (le fait d'écrire le premier nombre aide les élèves à maintenir les données en mémoire). Les élèves sont incités à utiliser la procédure revue dans la sq 10 : avec 60, ça dépasserait 100, c'est moins de 60, c'est cinquante… huit. Les premiers cas de compléments à 1 000 sont faciles (360, 850,…). On peut ensuite aborder les cas plus difficiles en association avec des cas faciles (360 puis 367 ; 850 puis 852, etc.).

17 Multiples de 25 et de 250

L'enseignant demande par exemple : « 175 est-il un multiple de 25 ou non ? ». Les élèves doivent répondre $175 = 25 \times 7$. Dans les cas où il faut répondre « non », ils écrivent seulement « N ». On fait alors expliciter de façon orale et informelle la décomposition $a = bq + r$. Pour les deux sortes de cas (multiples de 25 et multiples de 250), le quotient est ≤ 12. Au besoin, on revoit les cas repères : 100 c'est 4 fois 25, 200 c'est 8 fois 25, 300 c'est 12 fois 25, à partir desquels on trouve aisément les cas intermédiaires (pour 175, on sait que c'est le multiple de 25 juste avant 200, c'est 7 fois 25). Même démarche pour les multiples de 250.

18 Rapports entre unités de longueur

Il s'agit de rendre aisément disponibles les connaissances construites dans la sq 17. L'enseignant demande par exemple : « 1 km, c'est combien de dam ? », « 1 dm, c'est combien de cm ? », etc. On reste toujours d'un même côté du mètre (on ne propose pas par exemple : « 1 dam, c'est combien de dm ? », cas qui seront abordés en fin d'année). Les élèves sont invités à s'imaginer le tableau des unités de longueur de la sq 17 et à se demander : les deux unités (km et dam par exemple) sont-elles contigües (le rapport est 10) ou saute-t-on une unité (le rapport est 100) ou deux unités (le rapport est 1 000) ?

19 Divisions par n < 10 (dans les tables)

Il s'agit de comprendre que, dans les divisions du type 26 : 3 ?, plutôt que de chercher « en 26, combien de fois 3 ? », il est plus facile de s'imaginer qu'on a déjà réalisé le partage de 26 en 3 parts égales et de se demander « 3 fois combien font 26 ? ». De ce fait, cela revient à utiliser la table de multiplication par 3 et à situer 26 dans la suite des résultats de cette table. Ici, 26 est après 3 fois 8, 24, ce qui conduit à $q = 8$ et $r = 2$. C'est pourquoi il est bon de revoir préalablement la table du nombre qui est ensuite mobilisé comme diviseur. Dans toutes ces divisions, $q < 10$.

22 Conversions (longueurs)

L'enseignant propose une longueur (23 hm par exemple) et demande de l'exprimer dans une autre unité, plus petite (en dam par exemple). Les élèves sont amenés à mettre en œuvre la procédure utilisée dans la sq 21 : il y a plus de dam, il y en a 10 fois plus (on n'utilise pas de tableau de conversion). Là encore, on reste toujours d'un même côté du mètre.

23 Conversions (durées)

On propose seulement des cas faciles où la conversion se fait dans une unité plus petite et où les deux unités sont contigües. Par exemple : 9 semaines, c'est combien de jours ? 8 h, c'est combien de min ? 5 min, c'est combien de s ? 4 jours, c'est combien d'heures ? On peut aussi introduire des cas tels que « 6 mois, c'est combien de jours ? » (on décide alors avec les élèves d'utiliser le facteur 30). Les nombres sont choisis de sorte que les multiplications soient faciles :

- dans les multiplications par 7, le premier nombre ne dépasse pas 10 ou est 20, 30 , 40,… ;
- dans les multiplications par 30 et par 60, le premier nombre ne dépasse pas 12 ;
- quand on passe des jours aux heures, le nombre de jours ne dépasse pas 4.

32 « Je pense à un nombre… »

On reprend le jeu introduit dans la sq 29.

La difficulté de la tâche dépend des ordres de grandeur respectifs des nombres. Par exemple : « Je pense à un nombre, j'ajoute 4 et j'obtiens 42 » est assez facile parce que la relation « 38 et 4, 42 » vient presque immédiatement à l'esprit et on n'a même pas besoin d'utiliser une soustraction pour résoudre ce problème d'ajout. En revanche, le problème : « Je pense à un nombre, j'ajoute 38 et j'obtiens 42 » conduit le plus souvent à calculer 42 – 38 (qui se calcule « en avançant »).

Quand l'énoncé utilise « je retire… », le calcul qui permet de retrouver le nombre pensé doit être une somme que les élèves peuvent déterminer mentalement, comme, par exemple, une somme du type 57 + 35 (deux nombres de deux chiffres quelconques). On revoit alors que 57 + 35 c'est « 57 et 30… 87 et encore 5, 92 » (on ajoute les dizaines puis les unités du second nombre).

Quand l'énoncé utilise « je le multiplie par… », il faut donc calculer une division. Soit le nombre à diviser est un résultat de tables, soit le problème est du type « je le multiplie par 37 et j'obtiens 3 700 » (la décomposition multiplicative utilisée est assez évidente).

Dans tous les cas, les élèves qui en auraient besoin peuvent utiliser des schémas de même sorte que ceux de la sq 29 (disposition des nombres sur une droite numérique).

Sq 73, pour préparer la leçon sur la multiplication et la division d'un nombre décimal par 10, on présentera aussi des cas que les élèves savent déjà traiter : « je pense à un nombre, je le multiplie par 10 et j'obtiens 780 » ; « je pense à un nombre, je le divise par 10 et j'obtiens 39 ».

Sq 85 et suivantes, l'enseignant peut proposer des énoncés du type : « je pense à un nombre, je le divise par 10 et j'obtiens 13,9 » ; « je pense à un nombre, je le divise par 100 et j'obtiens 78,63 » ; et, évidemment, des cas de multiplications par 10 et 100 : « je pense à un nombre, je le multiplie par 10 et j'obtiens 47,65 ». Les premiers exemples permettent de revoir que 139 : 10 = 13,9.

35 Comparaisons de fractions

L'enseignant écrit au tableau deux fractions. Les élèves les recopient en insérant entre elles le signe qui convient : <, = ou >. Les élèves sont incités à s'appuyer sur les équivalences-repères établies dans la sq 33 (les comparaisons demandées sont du même type que celles de cette sq). En cas de besoin, l'enseignant permet aux élèves d'utiliser des représentations spatiales similaires (carrés quadrillés) affichées au tableau.

À partir de la sq 42, la tâche est étendue aux millièmes. On privilégie alors des cas où l'on compare par exemple 4/10 et 392/1 000 (dixièmes et millièmes), 54/100 et 536/1 000 (centièmes et millièmes). Il est bon de proposer aussi quelques cas qui conduisent à comparer 1/2, 1/4 et 3/4 avec des dixièmes, des centièmes (comme dans la sq 35) et des millièmes.

À partir de la sq 44, l'enseignant propose plutôt des cas du type 2/10 + 4/100 … 239/1 000 où l'on compare une somme de dixièmes et de centièmes à une fraction exprimée en millièmes.

Dans la sq 47, l'enseignant propose des cas du type 2/10 + 4/100 + 9/ 1 000 … 251/1 000 qui préparent à la tâche de décomposition canonique introduite dans la sq 48.

41 Sommes de fractions

L'enseignant écrit au tableau une addition de deux fractions < 1. Les élèves écrivent le résultat. Les cas proposés permettent de sommer des 1/2, des 1/4 et 3/4, des dixièmes et des centièmes. Pratiquement un cas sur deux est du type 3/10 + 9/100 = … Le résultat est tantôt < 1, tantôt = 1, tantôt > 1. Ces trois sortes de cas sont distingués avec les élèves.

48 Décomposer « *n* millièmes »

L'enseignant énonce une fraction exprimée en millièmes, « 647 millièmes » par exemple. Les élèves doivent produire la décomposition canonique sous la forme : 6/10 + 4/100 + 7/1 000. On n'oubliera pas de proposer aussi des cas du type « 607 millièmes » (pas de centièmes) et « 47 millièmes » (pas de dixièmes). Cette tâche prépare notamment les élèves à gérer les écritures des encadrements dans le jeu du nombre-cible où ils devront passer d'une fraction donnée oralement à sa décomposition écrite.

49 Jeu du nombre-cible

Le jeu est décrit dans le manuel sq 48, p. 76. Les élèves sont amenés à situer un nombre fractionnaire < 100 entre deux dizaines successives, puis entre deux unités successives, puis entre deux dixièmes successifs, etc. Dans un premier temps, l'enseignant peut aider les élèves à gérer, sur leur cahier, les demi-droites graduées successives qui permettent de cerner le nombre-cible en les traçant au tableau et en demandant à un élève de venir les utiliser pour situer de plus en plus précisément le nombre-cible. Dès que possible, l'enseignant fera expliciter quelle méthode on peut suivre pour questionner efficacement le maitre.

À partir de la sq 53, le nombre-cible est précis au 1/10 000 près.

À partir de la sq 60, le jeu se déroule en utilisant les écritures « à virgule » à la place des écritures fractionnaires. Le nombre-cible comporte des millièmes ou des dix-millièmes. Là encore, à l'oral, on s'exprime toujours de façon à préciser la taille des unités qui apparaissent après la virgule, par exemple : « Le nombre-cible est-il compris entre 32 plus 48 centièmes et 32 plus 485 millièmes ? ».

54 Conversions de mesures (aires)

L'enseignant écrit au tableau une mesure d'aire, 482 dm^2 par exemple. Les élèves doivent écrire cette mesure en utilisant une autre unité, plus grande ou plus petite (m^2, cm^2 ou mm^2), que l'enseignant décide. Les élèves sont amenés à mobiliser le raisonnement habituel, par exemple si on convertit 482 dm^2 en cm^2 : « j'imagine les cm^2 dans les dm^2, il y en a plus, 100 fois plus, je multiplie par 100… ». La validation de la réponse peut s'appuyer sur un affichage reprenant l'illustration de l'activité 4 de la sq 53 (si possible, on présente alors un m^2 entier), qui permet, en cas de besoin, de reconstruire les rapports entre unités d'aires.

58 Dictée de nombres décimaux

L'enseignant énonce un nombre décimal. Les élèves doivent l'écrire en utilisant le système de la virgule. On propose évidemment des exemples du type « trois virgule vingt-quatre centièmes » et « cinq virgule huit dixièmes », qui sont faciles, mais on privilégie les exemples où on doit écrire un ou deux zéros tels que : « sept virgule deux centièmes », « treize centièmes », « neuf centièmes », « cinq dixièmes », etc.

À partir de la sq 65, les nombres dictés comportent des millièmes. Là encore, on privilégie les exemples qui exigent d'écrire un, deux ou trois zéros (comme « trois millièmes »).

67 Sens des chiffres dans une mesure décimale (longueurs et aires)

L'enseignant écrit au tableau une mesure décimale, tantôt de longueur, tantôt d'aire : 2,57 hm ; 13,825 dm^2, etc. Pour chaque mesure, il interroge les élèves sur le sens de l'un des chiffres de cette écriture.

S'agissant des mesures de longueur, l'exercice est facile : il suffit de visualiser la liste des unités de longueur depuis le km jusqu'au mm et de faire correspondre le chiffre des unités avec l'unité utilisée (2 hm pour 2,57 hm par exemple) pour savoir ce que représentent les autres chiffres (le 5 représente des dixièmes d'hm soit des dam ; le 7 représente des centièmes d'hm soit des m).

La tâche est plus difficile dans le cas des mesures d'aires, car il faut se rappeler que les unités d'aires vont de 100 en 100 et que, par conséquent, dans 13,825 dm^2, c'est le 2 et non le 8 qui représente des cm^2, c'est-à-dire des centièmes de dm^2 (le 8, qui représente des dixièmes de dm^2, indique *le nombre de dizaines de cm*^{2}). C'est aussi pourquoi le 5, qui représente des millièmes de dm^2, représente des *dizaines de mm*^{2}. Cela apparait avec plus d'évidence si l'on écrit un zéro supplémentaire après le 5 pour représenter les dix-millièmes de dm^2.

68 Divisions par 3 (4, 5, 6…) puis divisions par 30 (40, 50, 60…)

Dans la sq 20, les élèves ont découvert que, par exemple, le quotient de 258 : 30 ? est le même que celui de 25 : 3 ?. Dans divers entretiens écrits consécutifs, ils ont mis en œuvre cette procédure. Dans le calcul mental de cette sq et dans les suivantes, on l'entraine plus systématiquement. En effet, dans la sq 72, on utilisera cette procédure pour approcher le quotient de divisions par des nombres à deux chiffres quelconques ; il sera alors nécessaire que les élèves puissent la mobiliser aisément. Chaque séance sur cet objectif se déroule ainsi :

1°) L'enseignant propose trois ou quatre divisions par 3 (4, 5, 6,…) avec $q < 10$, qu'il écrit au tableau. Ces divisions ont le plus souvent un reste non nul. Il s'agit principalement de réactiver le répertoire multiplicatif sur lequel repose la recherche du quotient.

2°) L'enseignant propose plusieurs divisions d'un nombre à 2 ou 3 chiffres par 30 (40, 50, 60,…), écrites au tableau. Là encore, $q < 10$ et, le plus souvent, $r > 0$. Sur les premiers cas, il fait expliciter la stratégie utilisée dans la sq 20.

Au besoin, on peut faciliter la mise en relation des deux sortes de divisions par des interrogations où l'on propose successivement les deux cas, comme 28 : 3 ? puis 284 : 30 ? ; 16 : 3 ? puis 167 : 30 ? ; 23 : 3 ? puis 235 : 3 ?, etc.

74 Multiplications et divisions d'un décimal par 10

Dans la continuité de la sq 73, l'enseignant propose des multiplications et des divisions d'un décimal par 10. Le calcul est écrit au tableau et les élèves doivent écrire le résultat. Les élèves sont amenés à mobiliser les raisonnements utilisés dans la sq 73 :

– Quand on multiplie un nombre décimal par 10, le chiffre des unités devient celui des dizaines, le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc.
– Quand on divise un nombre décimal par 10, le chiffre des unités devient celui des dixièmes,…

On n'hésite pas à proposer des cas du type 0,04 : 10 pour lesquels il faut écrire un nouveau 0 aux unités, celui qui est déjà écrit devenant celui des dixièmes.

À partir de la sq 75, on étend ces calculs à des multiplications et à des divisions par 100 et par 1 000. On propose, là aussi, des cas du type 23,4 × 1 000 (ou 0,04 : 100) qui obligent à écrire deux zéros après le 4 et à faire disparaitre la virgule. Il convient également d'insérer des exemples du type 0,007 × 100 qui conduisent à supprimer des zéros inutiles. Comme dans toutes les sq précédentes, les nombres sont oralisés en spécifiant la taille des unités après la virgule, par exemple pour 23,4 × 1 000 : « 23 virgule 4 dixièmes multiplié par 1 000 ».

83 Chercher la moitié de *n* pair

Il s'agit de chercher la moitié d'un nombre pair pour préparer la sq de ce jour (quotient décimal d'une division par 2 ou 4). Les élèves sont conduits à se rappeler, dès le début, que chercher la moitié d'un nombre, c'est le diviser par 2. On insiste tout particulièrement sur les divisions par 2 de nombres tels que 30, 50, 70 et 90, qui permettent de trouver ensuite plus aisément la moitié de nombres tels que 36, 52, 78, 94, dont le chiffre des dizaines est impair. Si nécessaire, on peut proposer des calculs successifs comme 50 : 2, puis 56 : 2 ; 70 : 2 puis 74 : 2 ; 30 : 2 puis 38 : 2… où le second calcul s'appuie sur le premier.

86 Diviser un entier par 2 ou par 4

On reprend les types de cas (et les procédures) abordés dans la sq 83 pour chercher le quotient décimal de la division d'un entier par 2 ou par 4. Dans les divisions par 2, les dividendes sont < 100. Dans les divisions par 4, ils sont ≤ 48. Les calculs sont écrits au tableau. Pour 27 : 4 = par exemple, l'enseignant énonce et fait énoncer « 27 divisé par 4 égale ». On commence toujours par calculer la division-fraction : « C'est 6 + 3/4 », puis on donne l'écriture à virgule équivalente : 6,75 (énoncé « 6 virgule 75 centièmes »).

89 Conversions de mesures décimales (longueurs, aires)

La tâche est identique à celle qui a été introduite dans la sq 54 avec les aires : l'enseignant écrit au tableau une mesure décimale de longueur ou d'aire (les unités sont alors comprises entre le mm^2 et le m^2) et indique dans quelle unité il faut exprimer cette mesure (pour les longueurs, on reste toujours d'un même côté du mètre). Plutôt que d'utiliser des tableaux de conversion, on reprend le raisonnement qui a été utilisé jusqu'ici. Si, par exemple, on convertit 1,3 cm^2 en dm^2 : « le dm^2 est plus grand, il y en a moins, 100 fois moins, je divise par 100… ». Si on convertit 0,175 km en hm : « l'hectomètre est plus petit que le kilomètre, il y en a plus, 10 fois plus, je multiplie par 10… ».

Cette tâche est riche car elle amène les élèves à gérer la différence entre le système des unités de longueur (le rapport entre deux unités contigües est 10 ou 1/10) et celui des aires (le rapport est 100 ou 1/100), à se représenter les grandeurs correspondantes et à mettre en œuvre la multiplication et la division d'un décimal par 10, 100, 1 000, 10 000.

À partir de la sq 97, on étend ces conversions à des mesures de contenances exprimées en litres, multiples et sous-multiples du litre (on mélange donc ces cas avec des mesures de longueur et d'aires). Pour faciliter les raisonnements et calculs des élèves, l'enseignant affiche la liste des unités sous une forme similaire à celle de la sq 95 ou invite les élèves à se servir de la page correspondante du manuel.

Concernant les longueurs, on introduit à ce moment les conversions qui nécessitent de franchir le m, par exemple : 32,085 dam = … dm ou 1 648,27 dm = … hm.

À partir de la sq 101, on ajoute aussi des conversions de mesures de masse exprimées dans les unités introduites dans la sq 100. Pour aider les élèves à réussir, l'enseignant affiche la liste de la sq 100 ou invite les élèves à se servir de la page correspondante du manuel.

109 Calculer 4,5 fois *n*

Il s'agit de mettre en œuvre la procédure découverte dans la sq 108 : « 4,5 fois 13, c'est 4 fois 13 plus 0,5 fois 13, c'est 4 fois 13 plus la moitié de 13 ». Le premier nombre se termine toujours par 5 dixièmes ; sa partie entière peut avoir un chiffre (y compris zéro) ou être égale à 10, 11, 12, 20, 30,… 100, 101, 200, etc. Le second nombre est facile à diviser par 2 : soit il s'agit d'un nombre entièrement écrit avec des chiffres pairs (comme 426), soit il fait partie des nombres dont les élèves ont cherché la moitié dans des entrainements antérieurs (voir sq 83 et suivantes). Dans tous les cas, les deux facteurs sont choisis pour rendre aisé un calcul oral.

112 Conversions en évoquant des tableaux

Même activité et mêmes types de cas qu'à la fin de la sq 111. On écrit par exemple 102,43 dL = … hL. Les élèves recopient et complètent l'égalité. On les incite à se représenter la liste des unités de contenance et à « faire comme s'ils projetaient le tableau sur les chiffres » en prenant comme repère le chiffre des unités de la mesure initiale (2 dL). On mélange mesures de longueur, d'aire, de contenance et de masse. On peut traiter les premiers cas collectivement en reprenant la démarche de la sq 111.

On proposera des cas difficiles (il faut écrire des zéros supplémentaires à gauche des chiffres de la mesure initiale), mais après des premiers cas faciles.

Dans un premier temps, il peut être nécessaire d'afficher les tableaux d'unités (on évite évidemment que les élèves ne remplissent de tels tableaux). Dans les sq suivantes, on cherchera à ce que tous les élèves puissent progressivement se passer de ces affichages et sachent raisonner en utilisant une mentalisation des listes correspondantes.