J'apprends les maths avec Picbille

CP
Cycle 2

LIVRE DU MAÎTRE

Sous la direction de
RÉMI BRISSIAUD
Laboratoire Paragraphe
Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »
(Université Paris 8)

FLORENCE SUIRE
Professeur des écoles

ANDRÉ OUZOULIAS
Professeur agrégé honoraire

PIERRE CLERC
Instituteur honoraire

RETZ
www.editions-retz.com
9 bis, rue Abel Hovelacque
75013 Paris

Sommaire

Présentation de la nouvelle édition

Guide pédagogique

ISBN : 978-2-7256-3101-1

Chapitre 1

Calcul et résolution de problèmes : quelles continuités, quelles nouveautés ?

PLAN DU CHAPITRE

Le comptage-dénombrement doit toujours être préféré au comptage-numérotage

La notion de comptage-numérotage

Enseigner le comptage-numérotage, c'est enseigner le comptage selon la pédagogie de sens commun, c'est-à-dire en insistant sur la correspondance 1 mot <-> 1 objet. L'adulte dit à l'enfant (entre 2 et 5 ans, par exemple) que pour compter, il faut être attentif à prononcer les mots-nombres dans l'ordre et, pour théâtraliser la correspondance 1 mot <-> 1 objet, il prend le doigt de l'enfant et dit : « un (il appuie sur le doigt posé sur un jeton), deux (il appuie sur le doigt maintenant posé sur le suivant), trois (il appuie…), etc. » et l'enfant, très souvent, comprend : « le un, le deux, le trois… ». Dans la tête de l'enfant, les mots-nombres fonctionnent comme des numéros, ils désignent 1 élément et 1 seul plutôt qu'une pluralité.

On dispose de nombreuses preuves du fait que cet enseignement est à l'origine de nombreuses difficultés. Ainsi, rappelons qu'à l'école maternelle on observe très fréquemment le dialogue suivant (Schaeffer & coll., 1974) :

Adulte : Combien y a-t-il de jetons ?
Enfant (en comptant les jetons) : « un », « deux », « trois », « quatre ».
Adulte : Oui, alors combien y a-t-il de jetons ?
Enfant (recompte les jetons) : « Un », « deux », « trois », « quatre ».
Adulte : Je suis d'accord, mais ce que je t'ai demandé, c'est combien il y a de jetons ?
Enfant (recompte encore) : « Un », « deux », « trois », « quatre ».
Cet enfant met bien en correspondance terme à terme les mots-nombres et les jetons de la collection, mais il n'isole pas le dernier mot-nombre prononcé pour répondre à la question posée. L'enfant reste apparemment incapable d'exploiter ce comptage pour répondre à la question : « Combien… ? » Son comptage ne lui permet pas d'accéder au nombre. On peut dire : son comptage n'est pas un dénombrement.

Pour comprendre ce phénomène, il suffit d'imaginer un autre contexte où l'enfant pointe des objets en disant des mots tous différents : « cube », « table », « fenêtre », « toboggan », par exemple. Le dernier mot prononcé, « toboggan », réfère à l'objet qui est pointé au moment où ce mot est prononcé (le toboggan), il ne dit rien des autres objets, ni de l'ensemble des objets. Or, lors d'un comptage-numérotage, le dernier mot, « quatre », est prononcé alors que l'enfant pointe le dernier objet, comme dans l'exemple précédent, mais dans ce cas l'enfant devrait comprendre que

« quatre », pour l'essentiel, ne réfère pas à cet objet parce qu'il désigne une propriété de l'ensemble des objets : ce mot précise quelle est la pluralité que l'enfant a devant lui, il dit le nombre d'unités de la collection.

Pointer un objet tout en prononçant un mot, alors que celui-ci désigne pour l'essentiel une propriété d'autre chose, correspond à un fonctionnement du langage complètement atypique (Markman, 1989 ; 1990). À vrai dire, on ne l'observe que dans le contexte de l'enseignement du comptage-numérotage. C'est donc l'insistance des pédagogues sur la correspondance 1 mot <-> 1 élément qui explique l'incompréhension des enfants : elle les conduit à concevoir les éléments successivement pointés comme « le un, le deux, le trois, le quatre… ». Les mots prononcés sont alors des sortes de numéros renvoyant chacun à un élément et un seul ; le dernier mot prononcé est lui aussi un numéro, comme les autres.

Cette signification des mots-nombres s'installe d'autant plus facilement que les jeunes enfants vivent dans un univers de numéros : en dehors de l'école, 4 est pour les enfants le numéro de l'étage où ils habitent, 28, celui de leur appartement, 3 celui de la chaîne télé... Lorsqu'un enfant appuie sur la touche « 3 » de la télécommande, il ne voit pas 3 images, il voit une seule image, celle de « la 3 ». Bref, un enseignement précoce du comptage-numérotage renforce la signification des mots-nombres en tant que numéros et ne favorise pas l'accès à leur signification en tant que noms de nombres, lorsqu'ils désignent des pluralités.

Enseigner le comptage-numérotage fait obstacle au progrès vers le calcul

Même lorsqu'un enfant répète le dernier mot d'un comptage (« un, deux, trois, quatre, quatre ») on n'a aucune assurance que ce dernier mot représente le nombre. En effet, Karen Fuson (1988) a montré que certains enfants ajoutent cette règle du « bien compter » à toutes les autres (dire les mots-nombres dans l'ordre…). Ils créent une nouvelle règle : « Après avoir attribué un numéro à chaque objet, il faut répéter le dernier numéro ». À force d'exercice, certains enfants se comportent exactement comme les adultes s'y attendent, ils répètent même le dernier mot-nombre de leur comptage, mais cela n'empêche pas ce comptage d'être un « comptage mécanique ».

Dans un petit livre récent (Brissiaud, 2013), j'ai montré que l'enseignement du comptage-numérotage est en rupture totale avec ce qu'était la culture pédagogique française depuis 1923 environ et jusqu'en 1986. On trouve d'ailleurs des textes pédagogiques dans lesquels cette pratique était évaluée de manière assez juste en ce qu'elle était considérée comme source de progrès à court terme, certes (sinon, on comprendrait mal que le sens commun s'y accroche), mais comme hypothéquant l'avenir des élèves les plus fragiles : « … cette façon empirique (*le comptage-numérotage*) fait acquérir à force de répétitions la liaison entre le nom des nombres, l'écriture du chiffre, la position de ce nombre dans la suite des autres, mais elle gêne la représentation du nombre, l'opération mentale, en un mot, elle empêche l'enfant de penser, de calculer » (Fareng & Fareng, 1966).

Comme le notaient ces auteurs, l'usage du comptage-numérotage permet certains progrès. Ainsi, pour comparer deux collections, certains enfants comptent l'une en disant : 1, 2, 3, 4 ; puis l'autre collection en disant : 1, 2, 3, 4, 5 et ils concluent correctement alors qu'ils ne savent pas répondre 4 et 5 à la question « Combien y a-t-il… ? » : ils ont compris que lorsque leur comptage-numérotage va plus loin, on peut dire : « Il y a plus là que là » (Droz & Paschoud, 1981).

L'usage du comptage-numérotage permet donc la comparaison de la taille de 2 collections. Cependant, ces quelques progrès risquent de se payer au prix fort ultérieurement car cet enseignement éloigne les élèves du calcul. En effet, la relation numérique « 5 et encore 3, c'est 8 » n'a aucun sens lorsqu'on interprète les chiffres comme des numéros. Regarder successivement les programmes de « la 5 » puis de « la 3 », ne dit rien de ceux de « la 8 ». L'entrée dans le calcul est évidemment impossible tant que les enfants n'ont pas compris que les mots qu'ils utilisent pour compter désignent des pluralités successivement engendrées par l'ajout d'une unité : « deux, c'est un et encore un » ; « trois, c'est un, un et encore un » ou bien : « trois, c'est deux et encore un ».

Faire le choix du comptage-numérotage, c'est contraindre les enfants à s'approprier les nombres et le calcul alors que les mots utilisés sont des numéros qui n'explicitent pas les nombres en jeu dans le calcul. L'entrée dans le calcul est alors une telle course d'obstacles que les élèves les plus fragiles y échouent en grand nombre. Toutes les études sur les enfants en difficulté grave et durable, ceux que certains chercheurs qualifient de « dyscalculiques », décrivent ces enfants comme enfermés dans le comptage 1 à 1 (Geary, 2005).

Henri Canac (1955), sous-directeur de l'ENS de Saint-Cloud et membre de la commission Langevin-Wallon, évoquant ces enfants qui, au cours moyen, sont incapables de retrouver le résultat d'une addition élémentaire sans compter 1 à 1, les qualifie d'« élèves mal débutés » parce que, plus jeunes, ils ont appris à compter de façon mécanique et se sont insuffisamment approprié les décompositions des premiers nombres. En leur enseignant le comptage-numérotage, l'école ne les a pas seulement conduits à un comptage mécanique, elle a aussi enclenché la mécanique de l'échec (Brissiaud, 2013).

Une autre possibilité : enseigner les décompositions des premiers nombres et le comptage-dénombrement

Mais il existe une autre façon de parler les nombres à l'école (Brissiaud, 1989 ; 2007 ; 2013). Il est évidemment fondamental que les enseignants d'école maternelle le sachent, mais il est important que ceux de CP ne le méconnaissent pas : en effet, dans presque toutes les classes de CP, en début d'année, quelques enfants n'ont pas encore compris les cinq premiers nombres et beaucoup d'élèves les comprennent insuffisamment (ils résolvent toutes les tâches à l'aide d'un comptage plutôt que de calculer).

L'autre façon de parler les nombres à l'école consiste à éviter toute utilisation par l'enseignant des mots-nombres en tant que numéros, afin de privilégier les décompositions des premiers nombres. Cette façon est décrite ci-dessous en pensant à des élèves de maternelle, mais c'est cette façon de s'exprimer qui doit inspirer un enseignant de CP lorsqu'il s'adresse en début d'année à ses élèves les plus fragiles qui, souvent, sont aussi les plus jeunes.

Ainsi, pour enseigner le nombre 2, l'enseignant utilise comme synonyme de deux : « un et encore un » ou, au CP, « un plus un », en faisant, bien sûr, les actions correspondantes : « Deux cubes, c'est un cube (l'enseignant prend 1 cube) et encore un (il en prend 1 autre), deux (il les montre tous les deux) » ; et il demande à l'enfant de donner de même : « deux crayons, un crayon et encore un », « deux petites voitures… » Il ne dit donc jamais : « un, deux » en pointant successivement les objets, il ne les numérote jamais. Puis, quand les enfants ont compris les nombres 1 et 2, il fait de même avec le nombre 3 en utilisant comme synonyme de trois : « un, un et encore un » ou bien « deux et encore un ».

C'est seulement lorsque les enfants ont une connaissance approfondie des 3 premiers nombres qu'il devient possible d'enseigner le comptage. Avoir cette connaissance approfondie, c'est réussir tout un ensemble de tâches mettant en jeu ces nombres : savoir dire directement ces nombres en face d'une collection correspondante ; savoir donner une collection ayant 1, 2 ou 3 éléments ; savoir reconnaître directement une collection de 3 parmi des collections de 2 et 4 ; savoir résoudre des problèmes où il s'agit d'anticiper le résultat d'ajouts et de retraits de 1 ou 2 dans le tout petit domaine numérique des 3 premiers nombres, etc.

Dès que les élèves connaissent les 3 premiers nombres, donc, il devient possible d'enseigner le comptage d'abord jusqu'à 4, plus tard jusqu'à 5. Et il est nécessaire et très facile que cet enseignement prenne une forme différente du comptage-numérotage.

Décrivons cette autre façon de l'enseigner en se plaçant dans la situation où, pour former une collection de 4 objets, l'enseignant montre aux élèves comment on les compte tout en les prélevant successivement d'un stock. L'enseignant dit « un » quand il a déplacé le 1er objet, il dit « deux » non pas au moment où il touche le 2e objet, mais quand celui-ci a été déplacé et, donc, quand la collection des deux objets a été formée (on vise à ce que l'enfant associe le mot « deux » à la pluralité : 2, c'est le résultat de 1 et encore 1), il dit « trois » non pas au moment où il touche le 3e objet, mais au moment où celui-ci a été déplacé et, donc, quand la collection de 3 objets a été formée (pour que l'enfant associe le mot « trois » à la pluralité : 3, c'est le résultat de 2 et encore 1). Idem pour « quatre » ; si les enfants ont compris les 3 premiers nombres (et il ne faut procéder à cet enseignement que quand c'est le cas), ils ont la possibilité d'accéder à la signification du mot « quatre » en généralisant celle de « un », de « deux » et de « trois » : si c'est le cas, ils apprennent d'emblée que 4, c'est 3 et encore 1.

Lorsqu'il procède ainsi, l'enseignant enseigne une forme de comptage très différente du comptage-numérotage, parce que la correspondance terme à terme qu'il théâtralise n'est pas celle entre 1 mot et 1 objet mais la correspondance entre 1 mot et la pluralité des objets déjà pris en compte. Lorsqu'un enfant comprend cette forme de comptage, chaque mot prononcé désigne pour lui un vrai nombre puisqu'il désigne la nouvelle pluralité obtenue après l'ajout de 1 ; c'est la raison pour laquelle on peut alors parler de l'enseignement d'un « comptage-dénombrement ».

Enseigner un comptage-dénombrement explicite

Les enseignants peuvent aussi utiliser un « comptage-dénombrement explicite ». Il y a deux façons de rendre un comptage dénombrement explicite. La première consiste à dire : « 1 et encore 1, 2 ; et encore 1, 3 ; et encore 1, 4 ». Au CP, lorsque le signe « + » a été introduit en classe, on dit « 1 plus 1, 2 ; plus 1, 3 ; plus 1, 4 ». En effet, un comptage-dénombrement est un comptage où l'on cherche à faire comprendre le calcul sous-jacent au dénombrement ; verbaliser ce calcul ne peut que favoriser cette compréhension. Depuis la première édition de *J'apprends les maths CP*, on utilise un personnage qui incarne le comptage : l'écureuil. Dans cette nouvelle édition, l'écureuil utilise un comptage-dénombrement explicite et non un comptage-numérotage.

La seconde façon de rendre un comptage-dénombrement explicite consiste à exprimer le nombre total résultant de l'ajout successif des unités, en spécifiant la nature de cette unité : « un jeton, deux jetons, trois jetons… ». En effet, dans l'expression « trois jetons », la syntaxe de ce petit groupe nominal fait que le mot « trois » réfère à une pluralité, il n'est pas un numéro. Or, la signification des mots-nombres que le comptage-dénombrement cherche à privilégier est celle de pluralités, celle que l'on appelle aussi la signification cardinale des mots-nombres.

De même que les points cardinaux (nord, sud…) sont ceux qui servent de repères pour s'orienter dans l'espace, la signification cardinale des mots-nombres est celle qui doit guider la pratique pédagogique des enseignants de maternelle. On remarquera d'ailleurs que dans les décompositions d'un nombre (trois, c'est deux et encore un, par exemple), chacun des mots-nombres prononcés a une signification cardinale. Faire le choix de privilégier les décompositions et le comptage-dénombrement, c'est privilégier la signification cardinale des mots-nombres et, partant, c'est permettre un apprentissage explicite des nombres et du calcul.

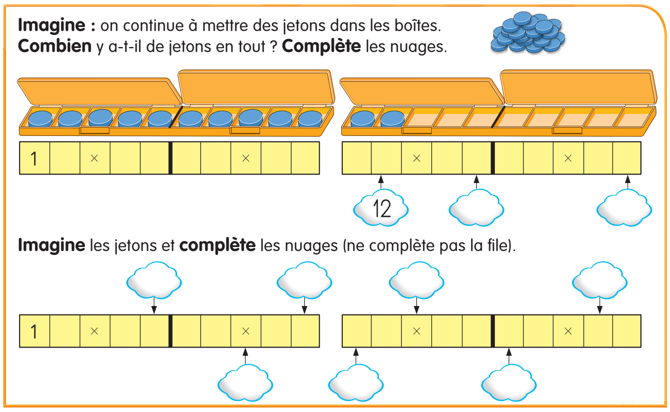
Se méfier de l'usage pédagogique d'une file numérotée

Depuis la fin des années 80, et non auparavant, les enseignants utilisent couramment une file numérotée pour apprendre aux enfants de GS et de CP à retrouver l'écriture chiffrée d'un mot-nombre à partir de son écoute. Dans une telle situation, s'il s'agit de « huit » par exemple, l'enfant dispose au départ de la sonorité de ce mot (on vient de le lui dicter) et il voudrait savoir comment se dessine le chiffre correspondant. Il peut alors prendre une file numérotée commençant par « 1 » et en compter les cases jusqu'à entendre « huit » : il voit alors un petit rond dessiné au-dessus d'un plus grand ; c'est le chiffre 8. Mais ce que l'enfant retrouve ainsi, c'est la case numéro « 8 » ; s'il s'était arrêté avant, ça aurait été « la 7 ». C'est donc la signification numéro qui fonctionne dans un tel contexte.

De plus, certains enfants deviennent dépendants de l'usage de cette file et les gestes graphiques leur permettant d'écrire les chiffres résultent alors systématiquement de cette copie des dessins figurant dans les cases de la file numérotée. Ils l'effectuent tantôt d'une façon, tantôt d'une autre et, pour chaque chiffre, ils ne mémorisent pas la trajectoire du geste qui, de façon stabilisée, leur permettra leur vie durant d'écrire le chiffre correspondant. Or, de nombreuses recherches récentes conduisent à penser que la mémorisation de cette trajectoire participe grandement à l'apprentissage de la lecture-écriture des chiffres (Fischer, 2010 ; Labat et col., 2010).

Concernant l'apprentissage du calcul, les conséquences sont pires. Même si dans *Comment les enfants apprennent à calculer* (Brissiaud, 1989), j'incitais à utiliser la file numérotée avec beaucoup de précautions, je suis convaincu aujourd'hui que toutes les précautions possibles n'empêcheront pas que son usage retarde le progrès vers le calcul. En effet, quand une file numérotée est affichée au-dessus du tableau, les élèves l'utilisent également pour retrouver le résultat d'une addition telle que 8 + 5. Ils procèdent comme le faisaient les élèves qu'Henri Canac qualifiait de « mal débutés » en comptant 5 franchissements de cases après la case numéro huit : 8, 9 (1), 10 (2), 11 (3), 12 (4), 13 (5). Puis, ils recopient le numéro de la case d'arrivée. Cette façon de faire retarde la mémorisation (Brissiaud, 1989). Cette file numérotée n'apparaissait d'ailleurs dans aucun manuel ou fichier de CP d'avant 1986, elle n'était jamais affichée dans les classes et les élèves calculaient bien mieux (Brissiaud, 2013).

Pour autant, nous n'avons pas renoncé dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CP* à organiser l'écriture des nombres en une file numérique. Mais celle-ci apparaît plus tardivement dans la progression, elle apparaît seulement sq 44, c'est-à-dire à un moment où l'on ne peut guère douter du fait que, pour les élèves, les écritures chiffrées désignent des pluralités, même lorsque ces écritures chiffrées figurent dans une suite de cases (voir ci-dessous le fac-similé).



Les élèves apprennent que dans une file numérotée, le numéro d'une case quelconque est le nombre de jetons nécessaire pour remplir toutes les cases jusqu'à celle-ci. Ils construisent la signification « numéro » des écritures chiffrées à partir de leur signification cardinale plutôt que d'emprunter le chemin inverse, celui qui conduit à tant d'échecs.

Une progression organisée autour de la distinction entre comptage et calcul

Présentons cette distinction en considérant le problème suivant : « J'ai 4 jetons dans ma poche gauche et 3 jetons dans la droite. Je vais les mettre sur la table. Combien y aura-t-il de jetons ? »

- Pour résoudre ce problème, certains enfants comptent 4 doigts sur une main, comptent 3 doigts sur l'autre, puis recomptent un à un ces 7 doigts.
- D'autres enfants trouvent le résultat sous la forme 4 + 1 + 2, en décomposant le deuxième nombre afin de s'appuyer sur un résultat connu (5 + 2 = 7) : c'est l'usage de ce type de stratégie de décomposition-recomposition que nous appelleront du calcul. Ce calcul peut éventuellement prendre la forme d'un « calcul sur les doigts ». C'est le cas lorsqu'après avoir sorti directement 4 doigts sur une main, 3 sur l'autre, l'enfant baisse un doigt de cette dernière pour compléter la première main ; le résultat lui apparaît alors sous la forme 5 + 2 : une main complète et encore 2 doigts.

Le comptage, qu'il s'agisse d'un comptage-numérotage ou d'un comptage-dénombrement, est une façon de faire dans laquelle les unités sont égrénées l'une après l'autre alors que le calcul correspond à l'usage d'une stratégie de décomposition-recompostion.

Apprendre à calculer est évidemment un objectif essentiel dès le CP. Mais il est moins évident de répondre à la question suivante : *comment favoriser l'apprentissage du calcul ?*

Comme nous l'avons vu, ce n'est pas à force de compter-numéroter que l'enfant apprend à calculer. Tous les professeurs de cycle 3 savent que leurs élèves en difficulté sont des « enfants compteurs ». Dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CP avec Picbille*, l'usage du comptage-numérotage n'est jamais valorisé (même l'écureuil, qui est le personnage incarnant le comptage, utilise un comptage-dénombrement et non un comptage-numérotage) ; de plus, l'usage de stratégies de décomposition-recomposition (calculer 4 + 3 sous la forme 4 + 1 + 2, par exemple) est systématiquement favorisé.

Ce n'est pas non plus à force de répéter les résultats de la table d'addition (ce qu'on appelle l'apprentissage « par cœur ») que les enfants apprennent à calculer. Les recherches montrent que ce qui est possible au CE avec la table de multiplication, parce que les enfants ont déjà une bonne connaissance des nombres, ne l'est pas avec la table d'addition.

Alors la question reste : comment favoriser l'apprentissage du calcul mental ?

Apprendre le calcul mental à l'aide des repères 5 et 10

Dès la première édition, nous avons choisi de favoriser un autre mode d'apprentissage où l'enfant apprend à représenter les nombres à l'aide des repères 5 et 10. Pour 7, par exemple, on utilise les trois représentations suivantes :

c'est-à-dire des configurations de points sous la forme 5 + 2 et un cadre matériel de 10 (une « boîte de Picbille* ») dans lequel 7 apparaît comme 5 jetons dans un compartiment dont le couvercle est fermé et 2 jetons dans l'autre.

Et pour 12, par exemple : 

Dès lors, des sommes telles que 5 + 2 et 10 + 2 sont connues précocement et ce sont leurs résultats mémorisés que l'enfant utilise dans les autres calculs. Ainsi :
– 4 + 3 est pensé comme 4 + 1 + 2 (*cf.* sq 30 et 34) ;
– 9 + 3 est pensé comme 9 + 1 + 2 (*cf.* sq 76), etc.
C'est ce qu'on appelle souvent le « calcul réfléchi ».

Un nouveau repère pour apprendre à calculer : le repère 3

Dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CP avec Picbille*, les élèves utilisent également une schématisation de la main qui fait apparaître 5 sous la forme 2 + 1 + 2. Les nombres 5, 7 et 10, par exemple, sont représentés ainsi :

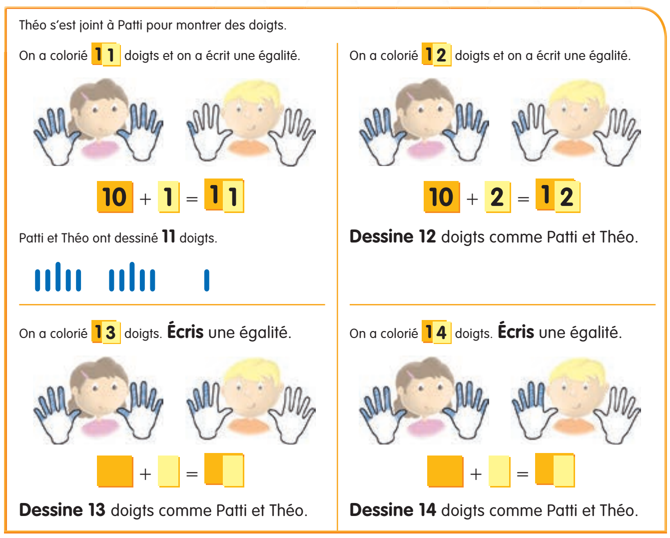

5 7 10

En cohérence avec ce choix pédagogique, on repère d'une croix les jetons correspondants dans la représentation des nombres « comme Picbille » : ●●⊗●● ●●

C'est donc un nouveau repère que nous introduisons : le repère 3. La raison de ce choix est triple :
a) Notre représentation mentale des nombres est linéaire ;
b) Or, lorsque des unités sont alignées, on n'en reconnaît immédiatement le nombre exact que jusqu'à 3. Ce nombre est en effet la limite supérieure d'un phénomène que l'on appelle le *subitizing* (Fischer, 1991) et qui est la capacité de l'être humain à traiter plusieurs unités en un seul focus de l'attention. Dès qu'une collection contient 4 unités ou plus, il faut la décomposer pour en connaître rapidement le nombre.
c) Un enfant qui ne ne sait pas utiliser le repère 3 ne peut ni utiliser le repère 5 pour calculer, ni utiliser la dizaine pour se représenter les grands nombres !

Apprendre 11 comme 10 + 1, 12 comme 10 + 2, etc.

Les nombres de onze à seize, ceux dont le nombre d'unités est masqué à l'oral (dans « vingt-six », en revanche, on entend « six »), sont à l'origine de bien des difficultés. L'apprentissage de ces nombres est une étape cruciale du CP : les enfants qui n'apprennent pas les décompositions du type « douze, c'est dix et encore deux » risquent d'avoir des difficultés durables avec ces nombres et, au-delà, avec la compréhension de la numération décimale. Nous avons vu que, de façon générale, comprendre un nombre, c'est en connaître les décompositions. Savoir décomposer les nombres entre onze et seize à l'aide de 10 est une compétence cruciale. Un grand nombre de décisions pédagogiques de *J'apprends les maths CP* visent à assurer le progrès sur ce point. L'une des principales est que les élèves rencontrent l'écriture chiffrée de ces nombres en lien avec leur décomposition décimale et non au sein d'une file numérotée (*cf.*, ci-dessous, le fac similé de la sq 33).



* Le matériel collectif appelé « Boîte de Picbille » est édité chez Retz (voir p.18).

Il est important de mettre d'emblée l'écriture des nombres après 10 en relation avec leur décomposition : douze, c'est « dix plus deux » et ce nombre s'écrit sous forme chiffrée en juxtaposant les chiffres « 1 » et « 2 » : « 12 ».

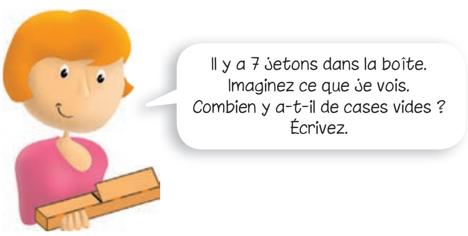
Mais comment justifier aux élèves que le nombre dix de « dix plus deux » est noté « 1 » dans cette écriture chiffrée ?
Il est classique de justifier ce remplacement en disant aux élèves que douze s'écrit ainsi parce que c'est « 1 groupe de dix et encore 2 ». En fait, cette justification se comprend bien mieux lorsqu'on aborde les nombres au-delà de vingt : vingt-quatre, par exemple, s'écrit sous forme chiffrée en juxtaposant les chiffres « 2 » et « 4 » (« 24 ») parce que c'est 2 groupes de dix et encore 4. En revanche, il est difficile de faire appel à la notion de « groupe » quand il n'y a qu'un seul groupe : souvent, on ne parle de groupe que lorsqu'on a constitué 2 groupes au moins. La justification précédente (« 12 », c'est 1 groupe de dix et encore 2) peut éventuellement être avancée dès cette sq, mais nous avons choisi d'utiliser principalement le procédé pédagogique popularisé par Maria Montessori : l'écriture de douze, par exemple, s'obtient en masquant le chiffre « 0 » de « 10 » par un chiffre « 2 » et, inversement, le nombre qui s'écrit « 12 », c'est 10, dont l'écriture est partiellement masquée, et encore 2.

On notera par ailleurs qu'afin de mieux favoriser l'appropriation de ces décompositions, divers supports de représentation sont mis à la disposition des élèves : les doigts de deux enfants, les groupes de 10 « comme Dédé », les boîtes de Picbille, les billets de 10 €, les groupes de 10 « quelconques » tels que des paquets de gâteaux ou encore des bouquets de fleurs…

Apprendre le calcul mental dans des situations d'anticipation

Pourquoi des situations d'anticipation ?

Donnons d'abord un exemple de situation d'anticipation* :



Phase d'anticipation.

Phase de validation : l'enseignant bascule la boîte.

Dans ce cas, il s'agit d'anticiper le nombre de cases vides d'un cadre matériel de 10 cases lorsque 7 d'entre elles sont remplies. Ou encore : il s'agit d'anticiper le nombre de jetons qu'il faudrait ajouter pour qu'il y en ait 10.

Les élèves prennent conscience de la différence entre ce type de tâche et la devinette : contrairement à la devinette, l'élève qui raisonne correctement réussit systématiquement. Par ailleurs, la situation est autocorrective : comme l'enjeu du raisonnement arithmétique est d'anticiper le résultat d'actions avant qu'elles ne soient effectivement réalisées, il suffit de procéder à ces actions (ici, ajouter 3 jetons et observer que la boîte est pleine) pour valider ou non l'anticipation.
Les enfants prennent ainsi conscience que l'enjeu des tâches arithmétiques se situe dans les transactions avec le monde des objets. Il ne s'agit pas seulement de deviner la réponse verbale qui ferait plaisir à l'enseignant. **La résolution de problèmes prend ainsi du sens** pour les élèves.
Il est important que les situations d'anticipation soient privilégiées au CP parce que c'est l'une des classes où les enfants construisent leur rapport à l'activité mathématique.

Apprendre à calculer en simulant mentalement l'action du maître

Mais les situations d'anticipation utilisées dans *J'apprends les maths CP* favorisent l'apprentissage du calcul mental pour une autre raison, plus fondamentale encore. Considérons par exemple la situation utilisée pour enseigner le « passage de la dizaine » : 8 + 4 = (8 + 2) + 2.

Phase d'anticipation (début).

Phase d'anticipation (suite).

Les élèves sont conduits à simuler mentalement l'action que l'enseignant réalise de façon masquée. Or les recherches en neuropsychologie montrent que l'apprentissage repose grandement sur ce type de processus mentaux (Rizzolatti & Sinigaglia, 2008). Au-delà des travaux scientifiques, on en comprend bien les raisons en considérant la phase de validation :

Phase de validation : l'enseignant reconstitue la situation initiale tout en basculant la boîte et en ouvrant la main.
Il peut ensuite réaliser l'action de manière visible en la commentant : « Il y a 8 jetons dans la boîte, donc 2 cases vides. Les 4 jetons que j'ajoute, c'est 2 jetons pour les cases vides et encore… 2 jetons qui restent dans la main. Le résultat est 12. »

Lorsque les élèves sont seulement confrontés à une situation comme celle qui est utilisée ici pour la validation, c'est-à-dire une situation où le complément à 8 est visible, où la collection ajoutée est visible et donc facilement décomposable, la plupart d'entre eux se trouvent en grande

* Remarquons que l'enseignant tient la boîte de façon que les élèves voient les nombres croissant de gauche à droite lors de la phase de validation et qu'ils les imaginent ainsi lors de la phase d'anticipation ; c'est en effet le sens de leur « file numérique mentale » et il doit être privilégié. L'enseignant, lui, voit les nombres grandir « à l'envers » mais c'est ce que les élèves voient qui importe.

difficulté dès que le matériel n'est plus présent. Simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de manière masquée oblige à reconstituer mentalement les données correspondant aux différentes étapes de la procédure et à enchaîner ces étapes : devenir capable de le faire rend autonome dans la mise en œuvre de cette procédure.

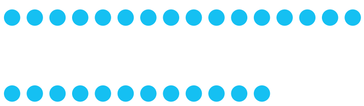
Calcul mental, résolution de problèmes et compréhension des opérations

On commencera dans cette section par rappeler la définition classique de la compréhension des opérations : comprendre une opération arithmétique, c'est en maîtriser les différents sens ou usages. Puis on présentera une autre « face » de cette compréhension : comprendre une opération, c'est savoir la calculer de différentes façons.

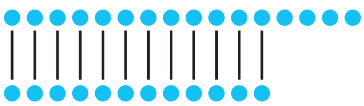
Comprendre une opération (1) : maîtriser ses différents sens ou usages

Qu'est-ce que comprendre une opération arithmétique ? Comprendre la soustraction, par exemple, c'est avoir acquis « les sens » de cette opération. Illustrons cette pluralité des sens d'une même opération en prenant pour exemple la soustraction. On sait que la différence entre 2 quantités (entre 2 collections, entre 2 longueurs, entre 2 aires, etc.) peut se définir comme « ce qui dépasse lorsqu'on met en correspondance ce qui est pareil dans les 2 quantités ».

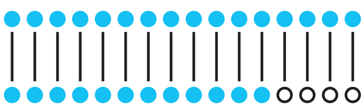
Deux collections, deux nombres…



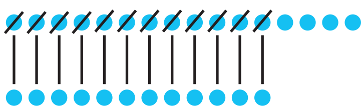
… et leur différence :



Mais la différence, c'est aussi ce qu'il faut ajouter au petit nombre pour obtenir le grand :



C'est aussi ce qui reste quand on retire le petit nombre au grand :



Grâce à cette mise en correspondance, on comprend que « ce qui est différent » est à la fois ce qu'il faut ajouter à la petite quantité pour obtenir la grande et ce qui reste lorsqu'on retire la petite quantité à la grande. Comprendre cela, que ce soit explicitement ou de manière intuitive, conduit à l'idée que la soustraction permet à la fois de :

- Comparer deux quantités (lorsqu'on cherche ce qui est différent).
- Déterminer le complément qu'il faut ajouter à la petite quantité pour obtenir la grande.
- Déterminer ce qui reste lorsqu'on retire la petite quantité à la grande.

Qu'en est-il de la compréhension des opérations arithmétiques que sont l'addition et la multiplication ? Une propriété commune à ces deux opérations est leur commutativité : « a + b = b + a » et « a x b = b x a ». Avoir acquis la commutativité de l'addition conduit, par exemple, à savoir que 10 ans après l'an 2000, ou 2000 ans après l'an 10, sont deux façons différentes de désigner la même année. Pour calculer 10 + 2000, on peut effectuer un autre ajout que celui qui correspond au déroulement temporel de l'« histoire » ou un autre ajout que celui correspondant à une lecture de gauche à droite de cette addition. De même, avoir acquis la commutativité de la multiplication conduit à comprendre que le nombre 2, lorsqu'il est répété 28 fois (2 + 2 + 2…) conduit au même résultat que 28 répété 2 fois : 28 + 28 (on peut donc effectuer une autre répétition que celle dont on parle dans un énoncé de problème). Ainsi, dans le cas de l'addition et de la multiplication, la pluralité des sens de ces opérations renvoie pour l'essentiel à la pluralité des sens de leur utilisation : on peut calculer dans un sens ou dans l'autre.

Comprendre une opération (2) : calculer mentalement de différentes façons

Un adulte n'utilise pas la même stratégie de calcul mental pour déterminer 102 – 6 et 102 – 94. Pour calculer 102 – 6, les adultes procèdent généralement par retraits successifs, c'est-à-dire en reculant sur leur file numérique mentale ; ils font : (102 – 2) – 4 = 96. En revanche, pour calculer 102 – 94, ils calculent par compléments successifs, c'est-à-dire en avançant sur leur file numérique mentale : à partir de 94, il faut 6 pour aller à 100 ; et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout.

Les deux faces de la compréhension des opérations ont partie liée

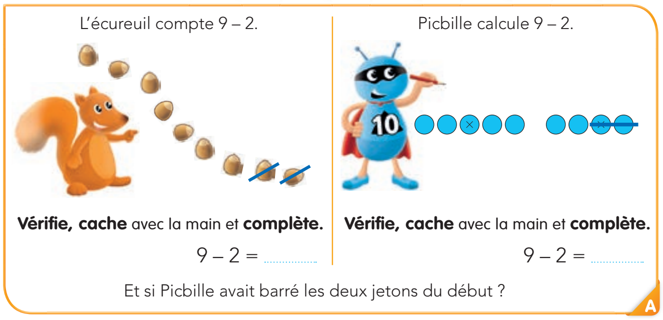
On comprend intuitivement que savoir calculer une soustraction telle que 102 – 94 en avançant, c'est-à-dire en cherchant le complément de 94 à 100, aide à comprendre que la soustraction permet de résoudre des problèmes de recherche de la valeur d'un complément. Calcul mental et résolution de problèmes arithmétiques ont ainsi partie liée. C'est ce qui explique que les élèves qui sont performants en calcul mental, le sont également en résolution de problèmes arithmétique et, plus généralement, en mathématiques. De manière générale, un grand nombre de recherches montrent que le calcul mental est une sorte de passeport vers la réussite en mathématiques.

Les opérations arithmétiques et la résolution de problèmes : les choix de *J'apprends les maths*

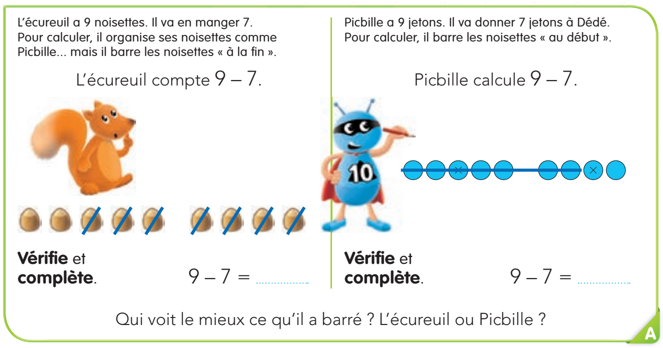
Apprendre, dès le CP, le calcul mental d'une soustraction

Dès le CP, il est donc crucial d'enseigner que 9 – 2 ne se calcule pas de la même manière que 9 – 7. L'adulte qui a automatisé ces calculs ne s'en rend plus compte mais, à son insu, son activité mentale reste différente. Le mode de représentation des nombres comme Picbille est particulièrement bien adapté pour cet enseignement.

Le calcul de 9 – 2, par exemple, est enseigné de la manière suivante (*cf.* sq 39) :



En revanche, le calcul de 9 – 7 l'est ainsi (*cf.* sq 53) :



Dès le CP, donc, les élèves commencent à s'approprier les deux grandes stratégies de calcul d'une soustraction : *en reculant* (ou encore : en « barrant à la fin ») lorsque le nombre retiré est petit et *en avançant* (ou encore : en « barrant au début ») lorsqu'il est grand.

Lorsqu'on retarde cet enseignement, les élèves privilégient la stratégie *en reculant* ; les plus fragiles d'entre eux s'enferment dans cette stratégie et ne développeront pas de bonnes compétences en calcul mental d'une soustraction. De plus, comme le calcul mental et la compréhension des opérations arithmétiques ont partie liée, diverses recherches mettent en évidence que l'utilisation de cette seule stratégie aura des répercussions négatives en résolution de problèmes.

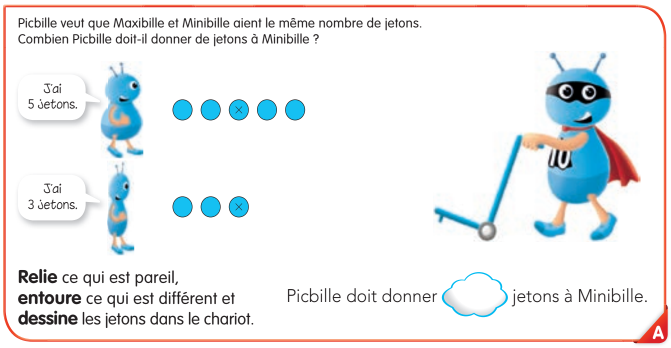
Comme dans le cas de l'addition, les élèves apprennent d'abord à calculer les soustractions en dessinant des points « comme Picbille » avant de barrer ceux qui doivent être ôtés. Cependant, très vite, l'enseignant favorise une mentalisation de ce calcul en proposant une situation d'anticipation qui conduit les enfants à simuler mentalement un retrait que l'enseignant effectue de manière masquée (cette situation est analogue à celle qui a été décrite précédemment, où l'enseignant réalise un ajout de manière masquée).

Pour enseigner le calcul mental de 8 – 2, par exemple (sq 41), il prend un carton avec 8 doigts dessinés* et, avec un autre carton, il cache 2 doigts « à la fin », c'est-à-dire sur sa gauche. Pour enseigner celui de 8 – 6 (sq 55), il cache 6 doigts « au début », c'est-à-dire sur sa droite.

Dans tous les cas, la validation se fait en basculant le carton contenant les 8 points et en cachant les doigts de façon visible.

Faire, dès le CP, le lien entre la soustraction et la différence

Dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CP avec Picbille*, la notion de différence est étudiée dès le début de l'année dans un contexte simple : la différence, c'est ce qu'il faut ajouter au petit nombre pour avoir le grand nombre (sq 7 et 8). Les enfants sont fréquemment confrontés à des problèmes dont l'énoncé dit, par exemple, que Maxibille a 5 jetons et que Minibille en a 3. Ils doivent chercher le nombre de jetons que Picbille doit donner à Minibille pour qu'ils en aient autant l'un que l'autre (ce nombre doit être écrit dans le chariot).



Là encore, les élèves sont rapidement face à une situation d'anticipation : en effet, dans les exercices proposés ensuite, les jetons ne sont plus dessinés et les enfants doivent les imaginer. En revanche, le dessin des jetons de chacun des personnages et leur mise en correspondance terme à terme permet aux enfants de vérifier leur anticipation

* Là encore, les nombres apparaissent à l'enseignant comme croissant de droite à gauche : l'important est que les élèves les imaginent derrière le carton comme croissant de gauche à droite, c'est-à-dire dans le sens de leur ligne numérique mentale.

On notera que pendant la plus grande partie de la progression, la recherche du résultat d'une comparaison n'est pas mise en relation avec la soustraction et son signe « – » : en effet, il est difficile à un élève de CP de faire le lien entre ces deux types de situations parce qu'elles apparaissent très différentes. En effet, dans une situation de comparaison (comparaison de 5 lapins et de 8 carottes, par exemple), deux collections sont d'emblée en jeu dans l'énoncé du problème (des lapins et des carottes), alors que dans le second type (retrait) on s'intéresse le plus souvent à la transformation d'une seule collection dont la taille diminue. De plus, lorsqu'on interprète la différence dans les termes d'une soustraction, on semble, dans l'exemple précédent, retrancher un nombre de lapins à un nombre de carottes. Or, rappelons-nous ce conseil méthodologique fréquent : « On ne peut pas additionner des lapins et des carottes ». On comprend mal pourquoi on pourrait retrancher un nombre de lapins à un nombre de carottes !

Il existe cependant un type de problèmes qui facilite grandement le traitement d'une situation de comparaison à l'aide d'une soustraction : ce sont celles qui évoquent un manque. Celles, par exemple, où il y a plus de lapins que de carottes, plus d'enfants que de crayons, plus de bouteilles que de bouchons, etc. (*cf.* sq 74). Dans le premier de ces cas, en effet, la correspondance terme à terme permet d'interpréter le nombre de carottes comme exprimant aussi le nombre de lapins qui seront satisfaits parce qu'ils peuvent avoir une carotte ; dans le second exemple, le nombre de crayons comme exprimant aussi le nombre d'enfants qui peuvent avoir un crayon, etc. Et la soustraction conduit alors à un calcul qui a du sens : en calculant le nombre total de lapins moins le nombre de lapins satisfaits parce qu'ils auront une carotte, on obtient le nombre de lapins en manque de carottes ; de même, en calculant le nombre total d'enfants moins le nombre d'enfants qui auront un crayon, on obtient le nombre d'enfants en manque de crayons. Ainsi, la notion de manque, d'une part, suscite la correspondance terme à terme et, d'autre part, permet d'interpréter la soustraction : elle est grandement facilitatrice.

Ainsi, dès le CP, les élèves ont la possibilité de comprendre que la soustraction permet de résoudre d'autres types de problèmes que ceux où l'on perd, où l'on retire, etc. On évite de les enfermer dans la signification typique de la soustraction (Brissiaud & Sander, 2010).

Travailler l'addition répétée d'un même nombre, mais pas la multiplication

La commutativité de la multiplication est une notion difficile. Il ne va pas de soi, par exemple, que pour calculer le prix total de 50 objets à 3 € l'un, on peut raisonner comme s'il s'agissait de 3 objets à 50 € l'un (calcul de 50 + 50 + 50). Il convient donc de réserver l'étude de cette propriété au CE1. En revanche, il est important, dès le CP, de préparer cette étude en confrontant les élèves à des problèmes qui se résolvent par une addition répétée : les problèmes dans lesquels on connaît un nombre de groupes de 2, 5 ou 10 objets (4 groupes de 5 objets, par exemple) et où l'on s'interroge sur le nombre total d'objets.

Rémi Brissiaud

Bibliographie

Brissiaud R. (1989). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle*. Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2013). *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone*. Paris : Retz.

Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : a situation strategy first framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-107.

Canac, H. (1955). L'initiation au calcul entre 5 et 7 ans. *In* F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (ed.), *L'Enfant et le nombre*, p.9-27. Paris : Didier.

Fareng R. & Fareng, M. (1966). *Comment faire ? L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7 ans*. Paris, Fernand Nathan.

Droz, R. & Paschoud, J. (1981). Le comptage et la procédure « (+1)-itérée » dans l'exploration intuitive de l'addition. *Revue suisse de psychologie*, 40, 219-237.

Fischer, J. P. (2010). Vers une levée du mystère des écritures en miroir (des chiffres) chez l'enfant. *L'Année psychologique*, 110, 227-251.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York : Springer.

Geary, D. C. (2005). Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. *In* M.-P. Noël (Ed.), *La Dyscalculie.* Marseille : Solal.

Labat, H., Ecalle, J., & Magnan, A. (2010). Effet d'entraînements bi-modaux à la connaissance des lettres. Étude transversale chez des enfants de 3 et 5 ans. *Psychologie française*, 55 (2), 113-127.

Markman, E. M. (1989). *Categorisation and naming in children.* Cambridge, MA: MIT Press.

Markman, E. M. (1990). Constraints children place on word meanings. *Cognitive Science*, 14, 57-77.

Rizzolatti, G. & Sinigaglia, C. (2008). *Les Neurones miroirs.* Paris : Odile Jacob.

Schaeffer, B., Eggleston, V. H. & Scott, J.-L. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psychology*, 6, p. 357-379.

Chapitre 2

La géométrie : quelles continuités, quelles nouveautés ?

Dans *J'apprends les Maths CP*, l'enseignant trouvera pour l'essentiel trois grands types d'activités :

– Celles dont l'objectif est le développement d'habiletés dans l'espace de la feuille de papier : divers tracés géométriques (tracés à la règle et sur quadrillage, d'une part, tracés avec des formes géométriques prédécoupées, les « formographes », d'autre part), repérage de positions de manière absolue (en haut à droite dans la feuille, dans la case B4, etc.) ou relative (à droite de tel personnage, par ex.).

– Des activités de mesure de longueurs.

– Enfin, des activités visant à une première découverte du vocabulaire de la géométrie plane et de l'espace ; les élèves doivent notamment apprendre à considérer les carrés comme des rectangles particuliers et les cubes comme des pavés particuliers. Ces dernières activités ne figurent au programme du CP que depuis 2008 et elles constituent donc une nouveauté de cette édition de *J'apprends les maths CP.*

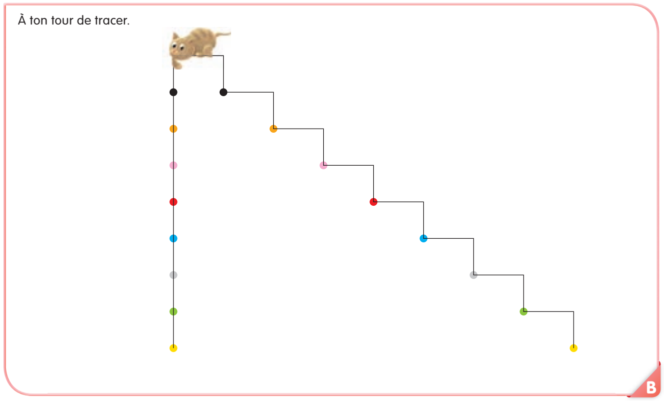
PLAN DU CHAPITRE

- Développer des habiletés géométriques dans l'espace de la feuille de papier
- Une nouvelle approche de la mesure des longueurs
  - Quelques généralités sur la mesure
  - La progression la plus fréquente : d'un étalon quelconque au cm
  - Mesurer des longueurs en cm et, dans le même temps, en allumettes…
- Rectangles et carrés, pavés et cubes : une nouvelle façon de les enseigner
  - Quand les connaissances quotidiennes font obstacle à la compréhension
  - Le carré est un « rectangle régulier »
- Les « formographes » : des outils pour développer de nombreux savoir-faire géométriques

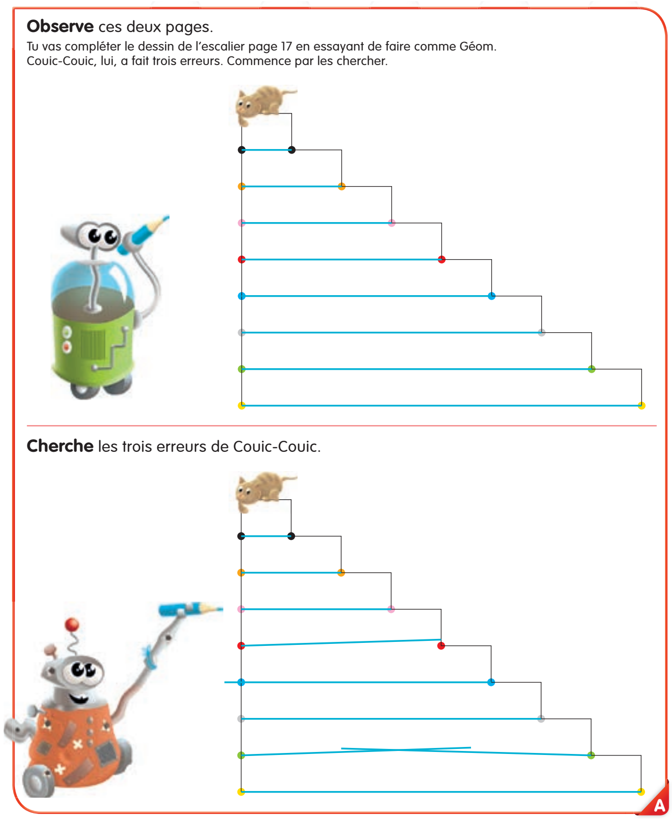
Développer des habiletés géométriques dans l'espace de la feuille de papier

Au-delà de leur contenu (tracés à la règle ou tracés de figures géométriques, par exemple), un grand nombre de séances de géométrie ont, dans *J'apprends les maths CP*, une forme commune qu'il convient de présenter. Les élèves sont souvent amenés à analyser la façon dont deux personnages, Géom et Couic-Couic, ont réalisé la tâche qui va leur être proposée.

Considérons, par exemple, la séquence 6 de la page 16, où les élèves doivent tracer à la règle les traits horizontaux qui permettent de compléter cet escalier :



Ils sont auparavant amenés à analyser la réalisation de cette tâche par Géom et Couic-Couic :



En fait, les réalisations de Géom sont toujours correctes tandis que celles de Couic-Couic comportent toujours **3 erreurs**. Lors de la découverte de l'activité, le travail de Géom permet ainsi aux élèves de découvrir ce vers quoi ils devront tendre : le personnage de Géom délivre aux élèves le but de la tâche. En début de séance, on procède à l'analyse collective des erreurs de Couic-Couic : dans l'exemple précédent, il a mal joint deux des points (4e marche en partant du haut), il a tracé un trait « qui dépasse à gauche » (5e marche en partant du haut) et, enfin, il a tracé une marche en tentant de raccorder deux traits (avant-dernière marche). Le personnage de Couic-Couic permet ainsi aux élèves de prendre conscience des contraintes de la tâche : les traits doivent *joindre* les points *sans les dépasser* et ils doivent résulter d'*un seul tracé* de crayon.

Ce procédé pédagogique a pour objectif d'amener les élèves à anticiper les actions qui leur permettront de réussir les tâches qui leur sont proposées. En effet, il est toujours plus facile à un jeune enfant de comprendre « ce qu'il faut faire » en le comparant à « ce qu'il ne faut pas faire ». Lorsqu'on présente seulement une exécution correcte, les contraintes qu'il faut gérer pour accéder à la réussite restent implicites. En comparant en grand groupe, avec l'aide de l'adulte, le travail de Géom et celui de Couic-Couic, les enfants verbalisent les différentes contraintes de la tâche. Du coup, au cours de l'activité elle-même, ils régulent leur action différemment : on les voit plus souvent commenter leur travail, gommer, reprendre, etc.

Une nouvelle approche de la mesure des longueurs

Précisons d'abord que la progression qui va être présentée ci-dessous était « nouvelle » lors de la première édition de *J'apprends les maths CP*. Depuis, en effet, elle a été reprise dans de nombreux autres ouvrages. On trouve ci-desssous les raisons qui ont présidé à l'élaboration d'une telle progression.

Quelques généralités sur la mesure

Rappelons d'abord quelques généralités concernant la mesure des grandeurs. Trois sortes d'entités doivent en effet être distinguées :

– **Les supports des grandeurs :** on parlera, par exemple, de la longueur d'un segment de droite ou d'une ligne brisée, mais de l'aire d'un triangle ou d'un rectangle. Plus généralement, on ne peut parler d'un type de grandeur donné que relativement à un certain type de support : on parle de longueurs concernant des segments de lignes droites ou courbes, on parle d'aires concernant des surfaces délimitées (qu'elles soient planes ou courbes), on parle de volumes concernant des solides, etc.

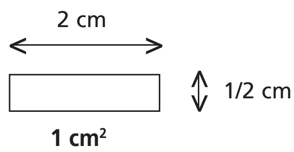
– **Les grandeurs elles-mêmes** (les longueurs, les aires, les volumes par exemple) ne doivent évidemment pas être confondues avec l'un des supports qui les réalisent : une même longueur correspond à des segments de lignes dont certaines sont droites, d'autres sont brisées et d'autres courbes, une même aire peut être celle d'un triangle ou d'un rectangle, etc.

– Enfin, **une mesure** d'une longueur donnée (d'une aire donnée, etc.) est **un nombre** qui exprime le rapport de cette longueur (de cette aire, etc.) à une autre longueur (à une autre aire, etc.) qu'on appelle unité.

À une même longueur (respectivement une même aire) correspondent donc diverses mesures de cette longueur (de cette aire) selon l'unité qui est choisie.

Un mot manque dans ce glossaire : celui d'**étalon**. L'étalon est à l'unité ce que le « mètre-étalon » construit en platine et « déposé au pavillon de Breteuil » est au mètre : l'étalon est une réalisation (une matérialisation) de l'unité. L'unité est une grandeur (le cm, par exemple, est une longueur), mais dans un étalon d'1 cm, cette grandeur est attachée à un support : une bande de 1 cm de long, par exemple.

Le passage d'une unité à un étalon qui réalise cette unité peut réserver des surprises : un rectangle de largeur 1/2 cm et de longueur 2 cm, par exemple, est un étalon du cm^2.



Les enfants de CM sont souvent surpris en présence « d'un centimètre carré qui n'est pas carré », mais on aura compris que c'est l'étalon qui n'est pas carré car le cm^2, qui est une aire, n'a aucune forme qui lui soit attachée. De même, si le mètre-étalon du pavillon de Breteuil est droit, c'est uniquement pour des considérations pratiques !

La notion d'étalon est importante pour comprendre la didactique de la mesure à l'école primaire. En effet, l'activité qui, classiquement, sert à introduire la mesure des longueurs est la suivante : on a choisi un étalon de longueur et on arpente divers segments à l'aide de cet étalon. La mesure obtenue s'exprime alors soit par un nombre entier, soit par un *encadrement entre deux entiers successifs*.

Ce procédé d'arpentage est fondamental car c'est lui qui permet de donner aux enfants l'intuition de ce qu'est une mesure : ce segment est long comme 3 allumettes, par exemple. Il est par ailleurs adapté aux jeunes enfants parce qu'il conduit à un encadrement par des mesures entières alors que la mesure est un rapport qui, généralement, ne peut pas s'exprimer par un nombre entier (la diagonale du carré dont le côté mesure 1 a pour mesure $\sqrt{2}$).

La progression la plus fréquente : d'un étalon quelconque au cm

Examinons la progression qui est très souvent adoptée dans les ouvrages d'autres collections. On propose successivement aux enfants les deux sortes d'activités suivantes :

A 

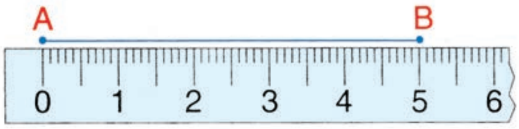
U 

Si l'unité est U, la bande A mesure…

V 

Si l'unité est V, la bande A mesure…

Puis :



Le trait AB mesure …… cm.

Il n'y a pratiquement pas de transition entre une activité et l'autre : l'enfant procède d'abord à des arpentages avec des unités quelconques, et lorsqu'il rencontre une unité conventionnelle de longueur, c'est directement avec la règle graduée en cm, c'est-à-dire sous une forme très élaborée où l'arpentage qui a permis la mesure n'est pas facile à reconstituer mentalement.

Cette progression présente un double inconvénient :
– lorsqu'ils arpentent avec une unité quelconque, beaucoup d'enfants n'ont pas conscience qu'ils mesurent parce qu'ils ont déjà une connaissance sociale du phénomène de la mesure et que pour eux, mesurer, ça se fait « avec la règle et avec des cm » ;

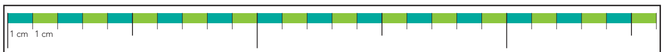
– lorsqu'ils mesurent avec la règle graduée, ils ne font aucun lien entre cet outil et le résultat d'un arpentage à l'aide d'un étalon d'1 cm.

Du coup, lorsqu'on demande aux enfants de « montrer 1 cm sur la règle », ils montrent le plus souvent l'intervalle entre 0 et 1, mais la longueur d'un intervalle entre 2 numéros successifs n'est pas aussi facilement interprétée comme 1 cm. En fait, de nombreux enfants apprennent à se servir d'un double décimètre par répétition de la « bonne séquence d'actions » (je pose le 0 sur une extrémité du segment, je regarde à l'autre extrémité, etc.), sans réellement comprendre la structure de cet outil. De nombreuses erreurs attestent d'ailleurs de la nature de cet apprentissage : certains enfants font coïncider une extrémité du segment avec le 1 (et non le 0), d'autres avec le bord de la règle.

Mesurer les longueurs en cm et, dans le même temps… en allumettes

C'est une autre progression qui a été adoptée dans *J'apprends les maths*. On y utilise de manière conjointe l'allumette et une bande de longueur 1 cm comme *étalons de longueur*. C'est ainsi que les enfants disposent de 2 règles graduées, l'une en allumettes et l'autre en cm (voir en haut de la colonne de droite).
On leur propose de mesurer des longueurs d'abord en allumettes, puis en centimètres.

Cette règle est graduée en allumettes.



Cette règle est graduée en centimètres (cm).

Ces utilisations successives de 2 étalons doivent amener les élèves à mieux se représenter ce qu'est une longueur de 1 cm. En effet, l'arpentage est explicite dans la règle graduée en allumettes (de manière évidente, on y a mis « bout à bout des allumettes »). Or, une règle graduée en cm est construite de la même manière : on y a mis « bout à bout des cm ».

Les enfants s'approprient d'autant mieux cette structure de la règle graduée en cm qu'elle est, dans un premier temps, dépourvue de toute numérotation. Pour mesurer la longueur d'un segment, ils sont ainsi amenés à « compter les cm ». On veut par là qu'ils comprennent qu'une longueur de 6 cm est équivalente à 6 longueurs de 1 cm mises bout à bout. Lorsqu'ils utiliseront un double décimètre numéroté, il leur sera plus facile de comprendre que, depuis le trait du 0 jusqu'au trait du 6, il y a 6 longueurs de 1 cm.

Remarquons que certaines expressions qui viennent d'être employées sont incorrectes, mais ce n'est pas toujours en s'exprimant d'emblée de la façon la plus correcte qu'on favorise le mieux l'apprentissage. Ainsi, examinons ces « incorrections » :
– Il est incorrect de dire qu'on met « bout à bout des cm », car ce sont des bandes de longueur 1 cm qui sont juxtaposées et non des cm. Cette façon de s'exprimer relève de la confusion entre « unité » et « étalon » !
– Il est incorrect de dire qu'« un segment mesure 2 allumettes », car l'allumette est un étalon ; il serait préférable de dire que « ce segment mesure 2 quand l'unité est la longueur de l'allumette ». Encore une confusion entre « unité » et « étalon » !

En fait, ces « incorrections » nous semblent avoir une grande valeur didactique. En effet, en choisissant deux entités dont l'une est un étalon (l'allumette) et l'autre une unité (le cm), et en acceptant le « jeu de langue » qui consiste à s'exprimer tantôt avec l'unité comme si elle était un étalon (« on met bout à bout des cm ») et tantôt avec l'étalon comme s'il était une unité (« un segment mesure 2 allumettes »), on aide l'enfant à s'appuyer sur ce qu'il connaît le mieux, l'allumette-étalon, pour concevoir l'entité la plus abstraite, *le cm-unité*.

Par ailleurs, en utilisant deux étalons de longueurs différentes, on aide les enfants à prendre conscience que pour penser une mesure, il faut penser à la fois un nombre et une unité. Ainsi, l'erreur qui consiste à répondre que « 2 allumettes c'est moins long que 8 cm », du fait que $2 < 8$, est fréquente chez les débutants. Ces élèves doivent apprendre que pour comparer deux longueurs dont chacune est donnée par une mesure, la comparaison des nombres ne suffit pas car à chaque nombre est attachée une unité. De même, pour savoir quelle est la longueur exprimée par une mesure donnée (8 cm par exemple), il ne suffit pas de s'intéresser au nombre, il faut coordonner l'unité (le cm et non l'allumette) et le nombre de fois qu'elle est répétée (8).

Là encore, on remarquera l'utilisation didactique qui est faite de la différence de nature entre l'allumette (plus proche de l'étalon) et le cm (qui est une unité) : « le changement d'unité » sous-jacent à l'activité précédente (comparer 2 allumettes et 8 cm) serait très difficile s'il s'agissait de deux unités conventionnelles (le cm et le dm, par exemple) ; il est beaucoup plus simple lorsque l'une des unités (la longueur d'une allumette) correspond à un étalon familier.

L'approche didactique de la mesure des longueurs qui est exposée ici est donc nouvelle en ce sens que les activités d'arpentage avec un étalon familier ne précèdent pas l'introduction d'une unité conventionnelle. Bien au contraire, les longueurs sont **dans le même temps mesurées en cm et en allumettes**. L'interaction entre ces deux sortes de mesure est considérée ici comme un **facteur essentiel de l'apprentissage**.

Rectangles et carrés, pavés et cubes : une nouvelle façon de les enseigner

Quand les connaissances quotidiennes font obstacle à la compréhension

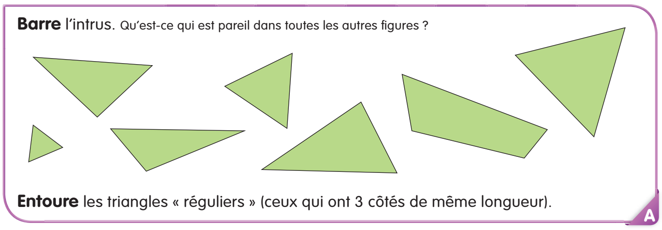
Pour concevoir une progression visant à enseigner les figures planes élémentaires, il convient tout d'abord de remarquer que, bien évidemment, les élèves de CP ne sont pas dépourvus de toute connaissance les concernant : ils savent notamment reconnaître un rectangle et un carré quand ces figures sont dans une position typique (2 côtés sont horizontaux et les 2 autres verticaux). De même, face à un rectangle et un carré dans une position typique, ils savent dire laquelle des deux figures est un carré.

Malheureusement, ces connaissances quotidiennes constituent pour certains élèves un obstacle important. En effet, dès qu'un carré a l'un de ses sommets comme point le plus bas (lorsqu'il est dans cette position : ◇, par exemple), ils ne le considèrent plus comme un carré. Un autre obstacle important réside dans le fait que, pour les jeunes enfants, il est très difficile d'admettre que le carré est un rectangle. Or, l'objectif de la scolarité est que les élèves considèrent le carré comme un rectangle particulier : c'est un rectangle qui a tous ses côtés de même longueur.

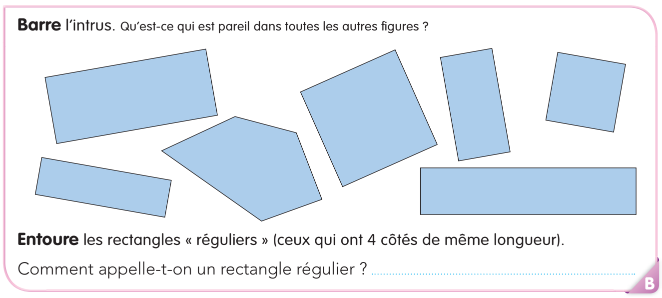
Expliquons l'origine de cette difficulté en considérant les deux propriétés suivantes d'un polygone : « il a *n* côtés » et « les *n* côtés ont la même longueur » ; pour *n* = 3, il faut dire deux mots différents pour exprimer ces deux idées : les mots « triangle » et « régulier » (ou équilatéral) ; en revanche, pour *n* = 4, le mot « carré » rassemble en un seul mot ces deux idées différentes. Or, dans la conversation courante, on s'efforce d'être précis et concis : on utilise donc le mot « carré » plutôt que « rectangle régulier » ; ce faisant, on n'utilise pas le mot « rectangle » pour désigner un carré. À l'école, il faut le faire. Le pire des choix pédagogiques consisterait à renforcer la conception naïve selon laquelle les carrés ne sont pas des rectangles parce que sur le long terme, cet obstacle deviendrait insurmontable pour certains élèves.

Le carré est un « rectangle régulier »

Dans *J'apprends les maths*, avant de découvrir ce que sont des « rectangles réguliers », les élèves découvrent ce que sont des « triangles réguliers ». Dans l'activité A ci-dessous (sq 101), ils cherchent d'abord la forme qui constitue un « intrus », ce qui permet la construction mentale de l'ensemble des triangles ; puis ils repèrent les triangles réguliers, ceux dont tous les côtés ont la même longueur.



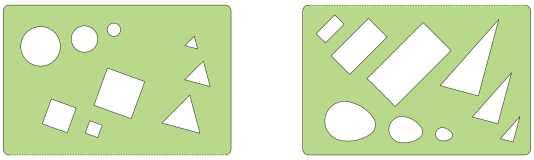
Puis, dans l'activité B, ils sont invités à barrer un intrus dans un ensemble de rectangles : toutes les autres figures, quelle que soit la longueur de leurs côtés, sont qualifiées de « rectangles ». Et de même qu'ils ont distingué des « triangles réguliers », ils distinguent des « rectangles réguliers » dont tous les côtés ont la même longueur : ce sont ces rectangles qu'on appelle des carrés.



Ainsi, avec une telle progression, le carré apparaît d'emblée à l'école comme un rectangle particulier. Le même type de progression est adopté, sq 106, concernant les pavés particuliers que sont les cubes.

Les « formographes » : des outils pour développer de nombreux savoir-faire géométriques

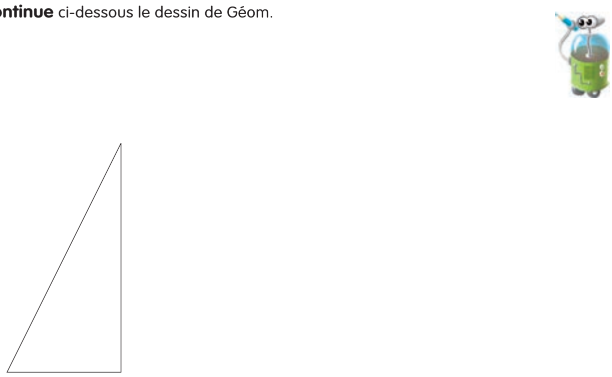
Avec leur fichier, les élèves disposent de deux gabarits en plastique transparent que nous appelons « formographes ». Des formes géométriques simples y sont évidées. On y retrouve 3 rectangles, 3 carrés, 3 triangles rectangles, 3 triangles équilatéraux, 3 cercles et 3 ovales. Dans chaque série, il y a un petit exemplaire de la figure, un moyen et un grand (les 3 figures sont homothétiques).



De plus, les dimensions ont été prévues pour que certaines conjonctions soient possibles, par exemple, pour une même catégorie de tailles : le rectangle est construit à partir de deux carrés ou de deux triangles rectangles ; les côtés du carré, ceux du triangle équilatéral et le petit côté du triangle rectangle sont de même longueur…

Les élèves vont s'efforcer de reproduire, avec ces instruments, des constructions proposées sur le fichier. La tâche est proposée en utilisant Géom et Couic-Couic. Sq 107 par exemple (facs-similés ci-dessous), les élèves doivent reproduire dans le cadre A la figure réalisée correctement par Géom en haut du cadre B et réalisée en faisant 3 erreurs par Couic-Couic, en bas du même cadre.

Dans le cadre **B**, **observe** le dessin de Géom et **trouve** les 3 erreurs de Couic-Couic.
Continue ci-dessous le dessin de Géom.



A

Calcule en barrant « au début ».

11 – 7 = ………… 12 – 9 = …………

Calcule en barrant « à la fin ».

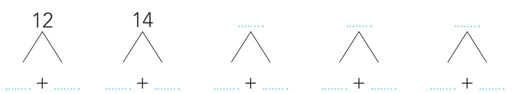
11 – 3 = ………… 13 – 4 = …………

Calcule en choisissant ta stratégie.

12 – 8 = ………… 11 – 2 = ………… 12 – 5 = ………… 15 – 8 = …………

C

Écris la table des moitiés après 10.



Calcule en choisissant ta stratégie.

12 – 6 = ………… 16 – 8 = ………… 18 – 9 = ………… 14 – 7 = …………

D

À travers cette tâche, on cherche à favoriser plusieurs savoir-faire géométriques :

– évidemment, les élèves se familiarisent avec ces figures simples et leur dénomination ;

– la présentation de l'activité avec Géom et Couic-Couic les conduit à observer et décrire le tracé qu'il faut reproduire, à chercher et à formuler les erreurs de Couic-Couic ; ils apprennent ainsi à analyser et « à mettre en mots » une construction complexe ;

– c'est, par là même, une nouvelle occasion d'employer le vocabulaire de la topologie (le triangle « au-dessus de » la petite fusée, la petite fusée « entre » les deux autres, la moyenne fusée trop « loin de » la grande, trop « à droite », etc.) ;

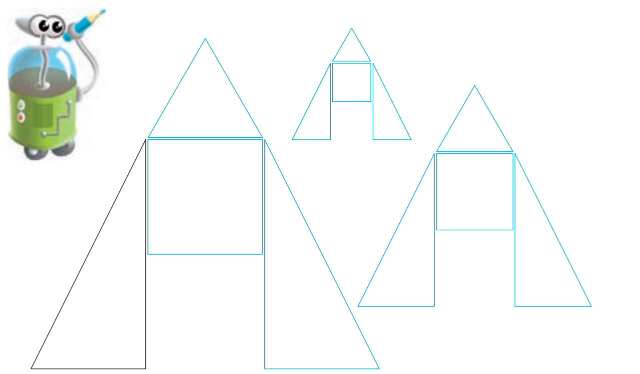
– les élèves apprennent à « gérer » l'espace de la feuille (il faut prévoir l'encombrement de la construction) et la contrainte de repères préexistants (ici, un grand triangle rectangle, déjà tracé, impose le point de départ) ;

– comme il faut comparer les côtés des figures pour choisir celles qui conviennent, c'est une nouvelle occasion de comparer des longueurs (« Ici, faut-il utiliser le petit ou le moyen triangle ? ») ;

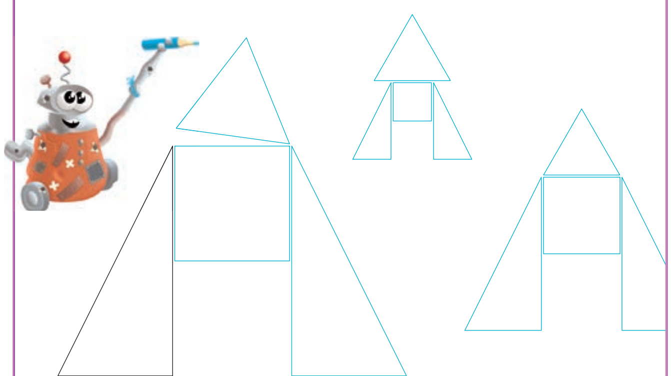
– comme aucune des figures évidées dans le formographe n'a ses côtés parallèles à un bord de cet outil, les élèves apprennent à reconnaître le carré et le rectangle dans des orientations non prototypiques.

Rémi Brissiaud

Les trois fusées



Couic-Couic a voulu faire le même dessin que Géom. Il a fait 3 erreurs. Lesquelles ?



B

Rémi Brissiaud
François Lelièvre
André Ouzoulias
Florence Suire

Chaque double page de ce guide correspond à une double page du fichier de l'élève.

Ce guide pédagogique décrit, d'une part, comment animer les activités du fichier de l'élève, et contient, d'autre part, un ensemble d'activités complémentaires dont l'index figure en dernière page.
Dans chaque double page, les objectifs principaux sont rappelés et précisés dans la colonne de gauche.
Le fichier est structuré en 5 périodes qui constituent 5 phases dans la progression en arithmétique. De ce fait, ces périodes ne coïncident pas avec les « périodes » de l'année scolaire, telles qu'elles résultent des dates des congés. Le guide pédagogique reprend cette organisation.
Le fichier a été conçu de telle façon que, le plus souvent, une page corresponde à une journée (certaines séances utilisent une double page), et un groupe de quatre pages à une semaine.

Périodes	Nombres et calcul	Géométrie et mesure	Pages
rouge 1	**Calcul jusqu'à 5** décompositions, additions et soustractions **Les 10 premiers nombres** 5 + 1 = 6 ; 5 + 2 = 7 ; 5 + 3 = 8, etc.	Tracés à la règle	8 à 35
jaune 2	**Calcul jusqu'à 10** décompositions, additions et soustractions **Les 20 premiers nombres** comprendre 14 comme 10 et 4; groupes de 2 et 5	Tracés à la règle (suite)	36 à 67
verte 3	**Calcul jusqu'à 20** additions (ajouter 5 ; les doubles) ; soustractions **Numération décimale jusqu'à 59** les nombres jusqu'à 59 ; groupes de 2, 5 et 10	Tableaux cartésiens ; repérage et tracés sur quadrillage	68 à 95
bleue 4	**Calcul et numération jusqu'à 79** la soustraction pour calculer une différence ; additions du type 9 + 7 (passage de la dizaine) ; du type 35 + 27 en dessinant puis sans dessiner	Mesure des longueurs ; le centimètre.	96 à 121
violette 5	**Calcul et numération jusqu'à 100** calcul d'additions à partir des écritures chiffrées (addition naturelle puis addition en colonnes); soustractions avec des nombres de 2 chiffres	Solides ; figures simples ; heures et demi-heures ; masses (le kg)	122 à 151
	ARP Atelier de Résolution de Problèmes		49 ; 57 ; 65 ; 75 ; 85 ; 105 ; 113 ; 127 ; 143 ; 149