

4

Sections planes de surfaces



L'opéra de Sydney, qui comporte 5 100 places, possède un toit de plus d'un million de tuiles. Ce toit est composé de surfaces coupées par des plans ; ces surfaces sont semblables à celles qui seront étudiées au cours de ce chapitre. L'opéra est situé au bord de la mer et ces surfaces évoquent les voiles d'un immense navire.

Cet édifice de 180 m sur 120 m a été conçu en 1957 par Jorn Utzon, architecte danois d'avant-garde ; sa construction a duré 16 ans car les plans étaient trop ambitieux pour les moyens techniques de l'époque. C'est maintenant le monument le plus célèbre d'Australie.

Les notions étudiées dans ce chapitre

1. Section d'un cylindre d'axe $(z'z)$ par un plan
2. Section d'un cône d'axe $(z'z)$ par un plan
3. Des fonctions de deux variables
4. Des exemples de surfaces

Avant de commencer,

TESTEZ-VOUS !

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A. Savez-vous... reconnaître une surface ?

	A	B	C	D
1. L'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une équation	d'un cercle	d'une sphère	d'un cylindre	d'un cône
2. Le cylindre d'axe $(z'z)$ passant par $A(1; 2; 3)$	coupe $(x'x)$ en un point d'abscisse 2	a pour rayon $\sqrt{14}$	a pour rayon $\sqrt{5}$	passé par le point $B(-2; -1; 20)$
3. Le cône de sommet O et d'axe $(z'z)$, passant par $A(3; \sqrt{3}; 2)$	a pour équation $x^2 = 3y^2$	a pour équation $x^2 + y^2 = z^2\sqrt{3}$	passé par le point $B\left(3; 4; \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$	a pour angle $\frac{\pi}{3}$

B. Savez-vous... utiliser une équation d'un plan ?

4. Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe $(z'z)$ dans les cas suivants :	$\mathcal{P}$ a pour équation $x = 2$	$\mathcal{P}$ a pour équation $z = 0$	$\mathcal{P}$ a pour équation $y = 3$	$\mathcal{P}$ est orthogonal à $\vec{i}$
5. Si le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation $y + 10z = 11$ alors	$(x'x)$ est parallèle à $\mathcal{P}$	Le plan (xOy) est parallèle à $\mathcal{P}$	Le plan (yOz) est parallèle à $\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$ contient le point $A(11; 11; 0)$
6. Le plan passant par $B(1; 2; -4)$ et parallèle à (xOz)	a pour équation $x + z = -3$	admet pour vecteur normal $\vec{j}(0; 1; 0)$	a pour équation $y = 2$	contient le point $A(1; 2; 3)$

C. Savez-vous... utiliser une représentation paramétrique de droite ?

7. Si $A(1; 2; 3)$ et $B(4; 5; 6)$, alors (AB) admet pour représentation paramétrique :	$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 + 3t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
8. Si la droite d admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, alors	le point $A(-1; -2; 0)$ appartient à d	d admet pour vecteur directeur $\vec{v}(-3; -1; 1)$	la droite d coupe le plan (yOz) au point $C\left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$	la droite d rencontre l'axe $(x'x)$
9. Si d passe par $A(0; 0; 1)$ et admet $\vec{v}(-1; 2; -3)$ pour vecteur directeur, alors	d contient $B(4; -5; 6)$	d coupe l'axe $(x'x)$	d est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ d'équation $10x - 20y + 30z = 1$	d coupe la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 - 6t \\ z = t \end{cases}$

Activité 1

Rotation d'un segment autour de l'axe $(z'z)$

Soit un point S de l'axe $(z'z)$ et M un point quelconque. On cherche à faire tracer à l'aide du logiciel Géospace la surface engendrée par le segment $[SM]$ lorsqu'il tourne autour de l'axe $(z'z)$.

1. Pour réaliser ce mouvement de rotation autour de $(z'z)$, créer d'abord un plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $(z'z)$, qui coupe $(z'z)$ au point I .

• Créer le point $O(0; 0; 0)$, le point $S(0; 0; 2)$, puis le point $I(0; 0; -3)$ et enfin créer le plan $\mathcal{P}$ d'équation $Z = -3$.

• Créer le cercle $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$, de centre I et de rayon 1.

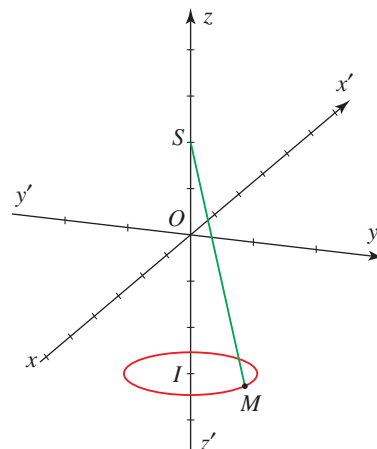
• Créer un point libre M sur le cercle $\mathcal{C}$.

• Créer le segment $[SM]$.

2. Faire alors tourner le point M sur ce cercle : on voit apparaître la surface engendrée par le segment $[SM]$.

3. Pour que cette surface s'imprime sur la figure, utiliser la procédure suivante : afficher « trace » ; mettre le segment $[SM]$ en surbrillance et cliquer sur le bouton **TRACE**.

En faisant pivoter M sur le cercle avec la souris, on obtient la surface conique souhaitée.



Activité 2

Des ensembles de points dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans le plan (xOy) , le point m a pour coordonnées $(x; y)$. Le point M de coordonnées $(x; y; z)$ se projette orthogonalement en m sur le plan (xOy) .

Si z s'exprime en fonction de x et y , à chaque couple $(x; y)$ correspondent une valeur de z et un point M .

Lorsque le point m se déplace dans le plan (xOy) , le point M décrit une surface d'équation : $z = f(x; y)$.

1. On suppose $z = x^2 + y^2$

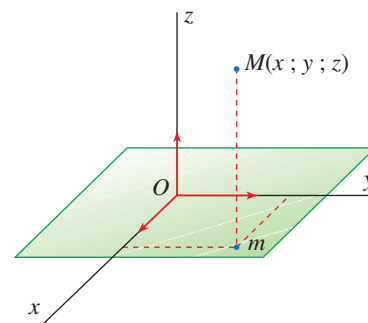
Préciser l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

- m décrit le cercle de centre O et de rayon 2 dans (xOy) ;
- m décrit l'axe $(x'x)$;
- m décrit la droite d'équation $y = x$ dans le plan (xOy) .

2. On suppose $z = xy$

Préciser l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

- m décrit l'axe $(x'x)$;
- m décrit la droite d'équation $y = x$ dans le plan (xOy) .
- m décrit l'hyperbole d'équation $xy = 2$ tracée dans le plan (xOy) .



Activité 3

Étudier une surface tracée avec un tableur

1. À l'aide du logiciel, on a fait tracer dans un repère orthonormal, l'ensemble F des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ de l'espace vérifiant la relation $z = xy$, avec x variant de 0 à 12 avec un pas de 1 et y variant de 0 à 15 avec un pas de 1.

Voir page 00 la procédure pour ce tracé.

2. Marquer les axes sur la figure.

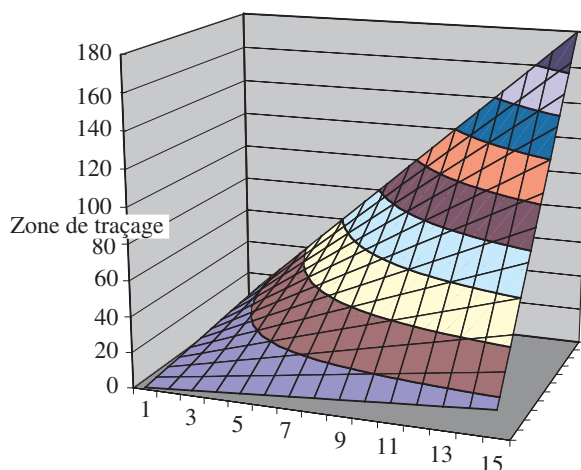
3. Quelle conjecture peut-on faire, en examinant le dessin, sur la nature de l'intersection de cette surface avec le plan d'équation $z = 0$?

Même question pour la section par le plan $z = 50$.

4. Vérifier ces conjectures par un calcul.

5. Où se situe l'ensemble F des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que :

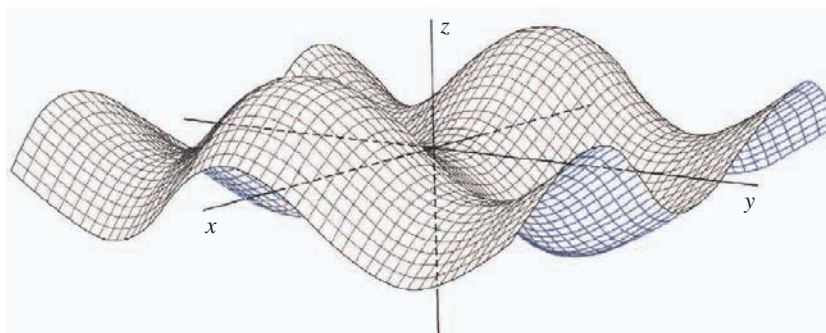
$$50 \leq xy \leq 100 ?$$



Activité 4

Une surface tracée avec le logiciel « dérive »

On a représenté, à l'aide d'un logiciel dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace dont les coordonnées satisfont à la relation $z = \cos y - \cos x$.



1. Quelle sont la cote maximale et la cote minimale des points de la surface S ?

2. Montrer que l'intersection du plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 0$ avec S est constituée de droites dont on donnera une équation dans un repère de $\mathcal{P}$ convenablement choisi.

3. On considère le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$; comment sont situés les points de S d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ dans ce plan $\mathcal{Q}$?

Dans ce chapitre, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tous les cylindres et les cônes envisagés sont de révolution.

1. Section d'un cylindre d'axe $(z'z)$ par un plan

Technique

On note que la variable z ne figure pas dans cette équation, ce qui veut dire que z est quelconque.

Rappel de 1^{re} : Un cylindre de révolution $\mathcal{C}$, ayant pour axe $(z'z)$ et pour cercle de base le cercle de centre O et de rayon R tracé dans le plan d'équation $z = 0$, a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$ (démonstration dans l'exercice 1 page 114).

A Intersection du cylindre $\mathcal{C}$ avec un plan parallèle au plan (xOy)

Propriété

L'intersection d'un cylindre de révolution d'axe $(z'z)$ et de rayon R avec un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle de rayon R .

Démonstration

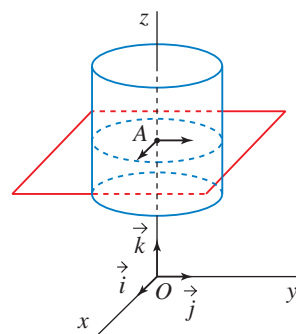
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = k$, où k est un réel donné et soit A le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe $(z'z)$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = k \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$M \in \mathcal{P} \text{ et } AM^2 = R^2.$$

L'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}$ est donc le **cercle** de centre A et de rayon R tracé dans le plan $\mathcal{P}$.



B Intersection du cylindre $\mathcal{C}$ avec un plan parallèle au plan (xOz)

Propriété

L'intersection d'un cylindre d'axe $(z'z)$ avec un plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (xOz) ou au plan (yOz) est constituée de deux droites parallèles à $(z'z)$ si la distance d de O à ce plan est inférieure à R . Ces droites sont confondues si cette distance est R . Si $d > R$, le plan $\mathcal{P}$ ne coupe pas le cylindre.

Démonstration

Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y = b$, où b est un réel donné. Une point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{Q}$ et au cylindre si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = b \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x^2 = R^2 - b^2 \\ y = b \end{cases}.$$

Si $b^2 > R^2$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{C}$ ne se coupent pas.

Si $b^2 \leq R^2$, c'est-à-dire si b appartient à l'intervalle $[-R; R]$, alors le système équivaut à :

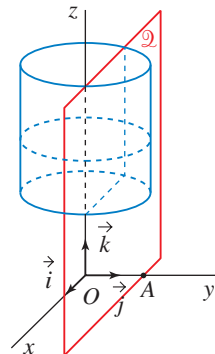
$$x = \sqrt{R^2 - b^2} \text{ et } y = b \quad (1) \text{ ou } x = -\sqrt{R^2 - b^2} \text{ et } y = b \quad (2),$$

la variable z étant quelconque.

R et b étant des réels donnés, en posant $a = \sqrt{R^2 - b^2}$, on reconnaît des représentations paramétriques de deux droites :

$$(1) \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = m \end{cases} \text{ ou } (2) \begin{cases} x = -a \\ y = b \\ z = m \end{cases}, m \text{ étant un réel quelconque.}$$

Ces droites ont pour vecteur directeur $(0; 0; 1)$; elles sont parallèles à l'axe $(z'z)$ et sont confondues si $b = R$, car on a alors $a = 0$.



Vocabulaire

Si la distance de O au plan $\mathcal{P}$ est égale à R , on dit que le plan est **tangent** au cylindre.

Technique

La démonstration est identique si on coupe le cylindre par un plan parallèle au plan (yOz) .

► Déterminer l'intersection d'un cylindre et d'un plan

Énoncé

Le cylindre $\mathcal{C}$ admet pour axe $(z'z)$ et contient le point $E(2 ; 3 ; 4)$.

a. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

b. Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (xOz) passant par $F(1 ; 2 ; 3)$.

Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{C}$.

c. Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $x = \sqrt{13}$; déterminer l'intersection de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{C}$.

Solution

a. Une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 = R^2$.

Puisque ce cylindre contient $E(2 ; 3 ; 4)$, on doit avoir $2^2 + 3^2 = R^2$, donc $R^2 = 13$.

Une équation de $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + y^2 = 13$.

b. Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation $y = k$; or, il passe par $F(1 ; 2 ; 3)$; une équation de $\mathcal{P}$ est donc $y = 2$.

Le point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = 2 \end{cases}$, ce qui

conduit à $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y = 2 \end{cases}$.

On obtient donc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = m \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = m \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

Ce sont des représentations paramétriques de deux droites ayant pour vecteur directeur $\vec{k}$ et passant respectivement par $A(3 ; 2 ; 0)$ et $B(-3 ; 2 ; 0)$.

c. On obtient de même le système $\begin{cases} x = \sqrt{13} \\ y = 0 \end{cases}$; l'intersection cherchée est donc la

droite ayant pour vecteur directeur $\vec{k}$ et passant par le point de coordonnées $(\sqrt{13} ; 0 ; 0)$; le plan $\mathcal{Q}$ est tangent à $\mathcal{C}$.

Méthode

Lorsqu'on obtient dans l'espace un système du type :

$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, on peut lui adjoindre l'équation $z = m$, car z est quelconque.

► Déterminer un cylindre d'axe $(z'z)$ dont l'intersection avec un plan est donnée

Énoncé

Le cylindre $\mathcal{C}$ a pour axe $(z'z)$. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $y = 5$; il coupe $(y'y)$ en A et coupe $\mathcal{C}$ selon deux droites Δ et Δ' , dont des systèmes d'équations cartésiennes sont respectivement :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Méthode

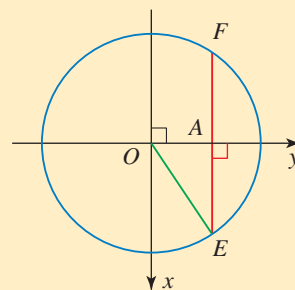
Faire un choix judicieux du plan dans lequel on pourra calculer le rayon du cylindre.

Solution

On prend pour plan de figure le plan (xOy) que l'on désigne par $\mathcal{Q}$. L'intersection de $\mathcal{C}$ avec ce plan est alors le cercle de centre O et de rayon R , R étant le rayon de $\mathcal{C}$. Les droites Δ et Δ' coupent $\mathcal{Q}$ en E et F . Dans le triangle rectangle OAE , on obtient :

$$OE^2 = OA^2 + AE^2.$$

Donc $R^2 = 25 + 4 = 29$. Une équation de $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + y^2 = 29$.



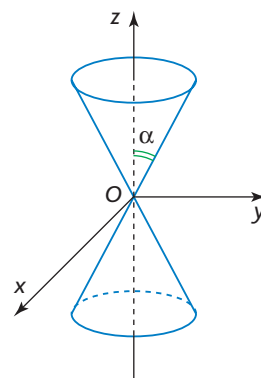
2. Section d'un cône d'axe ($z'z$) par un plan

Rappel de 1^{re} : Soit $\mathcal{C}$ un cône de révolution d'axe ($z'z$) et de sommet l'origine O du repère.

Si α est l'angle de ce cône, c'est-à-dire l'angle des génératrices avec son axe, alors une équation de ce cône dans le repère de l'espace s'écrit :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha.$$

(démonstration dans l'exercice 15 page xx).



Section par des plans parallèles aux plans de coordonnées

Technique

Dans le cas d'un cône dont le sommet est un point S de ($z'z$) autre que O , on a le même résultat en prenant ce point S comme origine.

Propriétés

1. La section d'un cône de révolution d'axe ($z'z$) par un plan parallèle au plan (xOy) et ne passant pas par l'origine est un cercle centré sur ($z'z$).

2. La section d'un cône de révolution d'axe ($z'z$) par le plan (xOz) ou le plan (yOz) est la réunion de deux génératrices du cône.

La section de ce cône par un plan strictement parallèle au plan (yOz) ou au plan (xOz) est une courbe formée de deux branches : cette courbe est une hyperbole.

Démonstrations

Prop. 1. On considère le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = k$ qui coupe ($z'z$) en A .

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la fois à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha \\ z = k \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \tan^2 \alpha \\ z = k. \end{cases}$$

Si on considère dans le plan $\mathcal{P}$ le repère ($A; \vec{i}, \vec{j}$), l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$ a pour équation dans ce repère $x^2 + y^2 = k^2 \tan^2 \alpha$.

On reconnaît une équation du cercle de centre le point A et de rayon $|k| \tan \alpha$.

Si le plan $\mathcal{P}$ passe par l'origine, alors $k = 0$: l'intersection est alors réduite à un point, l'origine O du repère.

Prop. 2. Une équation du plan (xOz) est $y = 0$.

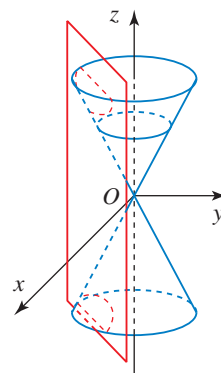
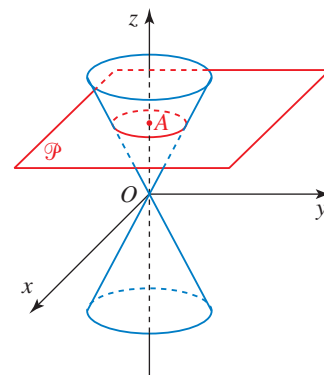
L'intersection de ce plan et de $\mathcal{C}$ est caractérisée par $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ et $y = 0$, soit $x^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ et $y = 0$, donc $x = z \tan \alpha$ ou $x = -z \tan \alpha$ et $y = 0$.

L'intersection cherchée est donc constituée de deux droites qui, dans le repère ($O; \vec{i}, \vec{k}$) du plan (xOz) ont des coefficients directeurs opposés.

Ce sont deux génératrices du cône.

Si $\mathcal{Q}$ est un plan parallèle au plan (zOy) ne passant pas par l'origine O du repère, l'intersection est une courbe qui comporte deux branches ; on admet que cette courbe est une hyperbole.

Ce résultat est démontré ci-contre dans un cas particulier.



Histoire

L'intersection d'un cône par un plan était connue d'Appolonius (260-190 av. J.-C.). Ce problème fut aussi étudié par Dandelin et Poncelet.

► Déterminer l'intersection d'un cône et d'un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées

Énoncé 1

Les cônes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent pour axe $(z'z)$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$. $\mathcal{C}$ a pour sommet O et $\mathcal{C}'$ a pour sommet $S'(0; 0; 2)$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $z = 3$.

- Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ puis de $\mathcal{C}'$.
- Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}'$.

Solution

a. $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \frac{\pi}{4}$, soit $x^2 + y^2 = z^2$; la translation t de vecteur $2\vec{k}$ transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$; or si on a $M(x; y; z)$ et $M' = t(M)$, alors $M'(x'; y'; z')$, avec $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + 2$. $\mathcal{C}$ devient donc par t la surface d'équation $x'^2 + y'^2 = (z' - 2)^2$.

Une équation de $\mathcal{C}'$ est donc $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$.

b. Soit $A(0; 0; 3)$; prenons dans $\mathcal{P}$ le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$; l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}'$ admet pour équation $x^2 + y^2 = 1^2$. Il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon 1 tracé dans $\mathcal{P}$.

Énoncé 2

Soit le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x = 1$.

- Soit $A(1; 0; 0)$. Déterminer une équation de l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A; \vec{j}, \vec{k})$.
- On pose $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{k} - \vec{j}$. Montrer que $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthogonal du plan $\mathcal{P}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme.
- Soit (x, y) les coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$ dans le repère $(A; \vec{j}, \vec{k})$ et $(X; Y)$ dans $(A; \vec{u}, \vec{v})$. Exprimer y et z en fonction de X et de Y .
- Montrer que l'équation trouvée à la question a. s'écrit dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ sous la forme $XY = k$, où k est une constante.
- En déduire la nature de l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}$.

Solution

a. Soit $A(1; 0; 0)$. On prend dans $\mathcal{P}$ le repère $(A; \vec{j}, \vec{k})$. Le point $M(x; y; z)$ est à la fois sur $\mathcal{P}$ et sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $x^2 + y^2 = z^2$ et $x = 1$, donc si, et seulement si, M est dans $\mathcal{P}$ avec $z^2 = y^2 + 1$.

b. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{k} - \vec{j}) = \vec{k}^2 - \vec{j}^2 = 0$, car $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

De plus $\|\vec{u}\| = \|\vec{j} + \vec{k}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = \|\vec{k} - \vec{j}\| = \sqrt{2}$.

c. On a $\vec{AM} = y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{AM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$. On en déduit :

$$y\vec{j} + z\vec{k} = X(\vec{j} + \vec{k}) + Y(-\vec{j} + \vec{k}) = (X - Y)\vec{j} + (X + Y)\vec{k}.$$

Ces deux vecteurs étant égaux, ils ont les mêmes coordonnées dans le repère $(A; \vec{j}, \vec{k})$, d'où le système : $y = X - Y$ et $z = X + Y$.

d. Un point M de $\mathcal{P}$ est sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si, ses coordonnées y et z dans $(A; \vec{j}, \vec{k})$, vérifient $z^2 = y^2 + 1$, donc si, et seulement si, ses coordonnées X et Y dans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ satisfont à $(X + Y)^2 = (X - Y)^2 + 1$, donc si, et seulement si, $XY = \frac{1}{4}$. On reconnaît alors l'équation $Y = \frac{1}{4X}$ d'une hyperbole ayant pour asymptotes les axes du repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Méthode

Si un point M a des coordonnées dans deux repères de même origine A , on peut établir une relation entre ces coordonnées en exprimant les coordonnées de $\vec{AM}$ dans chacun des deux repères.

3. Des fonctions de deux variables

Technique

L'ensemble de définition de f est l'ensemble de couples $(x; y)$ pour lesquels $f(x; y)$ est calculable.

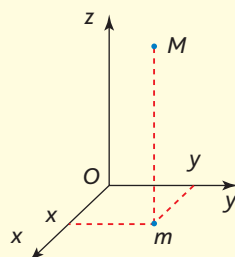
Définitions

Si au couple de réels $(x; y)$, on associe un réel z , on définit ce que l'on appelle une **fonction des deux variables** x et y . On écrit $f : (x; y) \mapsto z = f(x; y)$.

Dans un repère de l'espace, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ avec $z = f(x; y)$ est en général une **surface**.

On dit qu'une **équation** de cette surface est :

$$z = f(x; y).$$



Exemple : L'aire d'un rectangle de côtés x et y définit une fonction de deux variables x et y dont l'ensemble de définition est l'ensemble des couples $(x; y)$, de réels positifs. On écrit $s : (x; y) \mapsto z = xy$.

4. Des exemples de surfaces

Technique

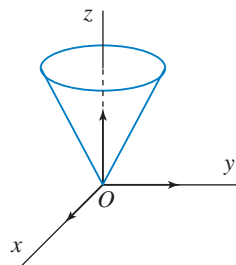
On réalise une représentation graphique d'une surface au moyen de logiciels tels que dérive-Geospace-Excel.

- La fonction $(x; y) \mapsto ax + by + c$ admet comme représentation graphique le plan d'équation :

$$ax + by - z + c = 0.$$

- La fonction $(x; y) \mapsto z = \sqrt{x^2 + y^2}$ est telle que $z \geq 0$ et $z^2 = x^2 + y^2$.

Sa représentation graphique est un demi-cône de révolution d'axe $(z'z)$.



- La fonction $(x; y) \mapsto z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ a pour représentation graphique une demi-sphère de centre O , de rayon 4, car $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ et $z > 0$.

Définition

On appelle **section plane** d'une surface l'intersection de cette surface par un plan.

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $z = f(x; y)$ une équation d'une surface S . La section plane de S par le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(x; y; z)$ soient solutions du système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ z = f(x; y) \end{cases}.$$

On étudie cette section en choisissant un repère dans le plan $\mathcal{P}$.

On découvre alors certaines propriétés de la surface S en étudiant des sections de S par des plans particuliers bien choisis.

Exemple : Surface S d'équation $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Si $0 \leq k \leq 4$, la section de S par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = k$ est le cercle qui a pour équation $x^2 + y^2 = 16 - k^2$ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$, avec $A(0; 0; k)$.

Si $k < 0$ ou si $k > 4$, S et $\mathcal{P}$ sont sans point commun.

Si $-4 \leq a \leq 4$, la section de S par le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x = a$ est le demi-cercle qui a pour équation $z = \sqrt{16 - a^2 - y^2}$ dans le repère $(B; \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{Q}$, avec $B(a; 0; 0)$.

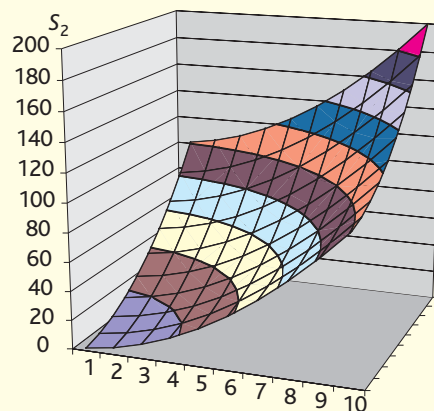
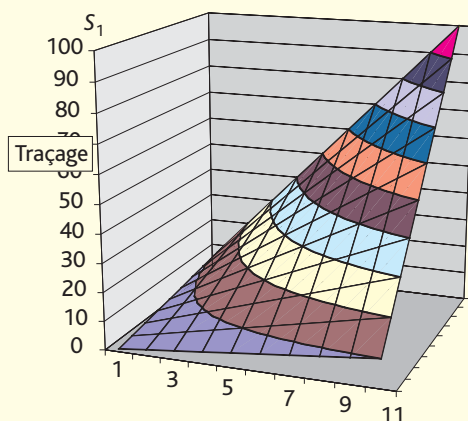
Si $a < -4$ ou $a > 4$, S et $\mathcal{Q}$ sont sans point commun.

► Découvrir les surfaces d'équations $z = xy$ et $z = x^2 + y^2$

Énoncé

On a tracé ci-dessous les surfaces S_1 d'équation $z = xy$ et S_2 d'équation $z = x^2 + y^2$, pour x et y compris entre 0 et 10 avec le logiciel Excel.

1. Reconnaître, en examinant leurs intersections avec le plan d'équation $z = 0$, laquelle est la surface S_1 et laquelle est la surface S_2 .
2. a. Quelle est l'intersection de S_1 avec le plan d'équation $y = 2$? avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = \lambda$, où λ est un réel strictement positif ?
b. Indiquer la nature des lignes qui ont été tracées sur S_1 à l'aide d'Excel.
3. Quelle est l'intersection de S_2 avec le plan d'équation $z = \lambda$ avec $\lambda > 0$?



Solution

1. La surface S_1 admet deux droites de cote nulle ; l'axe ($x'x$) et l'axe ($y'y$), car $xy = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $y = 0$; c'est ce qui permet de reconnaître S_1 sur la figure de gauche. La surface S_2 n'admet qu'un seul point commun, à savoir le point O , avec le plan d'équation $z = 0$, car $x^2 + y^2 = 0$ équivaut à $x = y = 0$.

Ces deux remarques permettent d'identifier S_1 et S_2 .

2. a. Le point $M(x ; y ; z)$ appartient à l'intersection de S_1 avec le plan d'équation $y = 2$ si, et seulement si, $y = 2$ et $z = 2x$.

On reconnaît un système d'équations cartésiennes de la droite passant par les points $A(0 ; 2 ; 0)$ et $B(1 ; 2 ; 2)$, donc de vecteur directeur $\vec{V}(1 ; 0 ; 2)$.

Le point $M(x ; y ; z)$ appartient à l'intersection de S_1 avec le plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} xy = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ c'est-à-dire si } x \neq 0, \begin{cases} y = \frac{\lambda}{x} \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Cette intersection est donc une hyperbole tracée dans le plan $\mathcal{P}$.

b. Les lignes tracées par Excel sur S_1 sont les intersections de S_1 avec des plans parallèles aux plans (yOz), (xOz) et (xOy), c'est-à-dire respectivement des droites perpendiculaires à ($x'x$), des droites perpendiculaires à ($y'y$) et des hyperboles.

3. Le point $M(x ; y ; z)$ appartient à l'intersection de S_2 avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = \lambda$ si, et seulement si, $z = \lambda$ et $x^2 + y^2 = \lambda$.

Puisque $\lambda > 0$, cette intersection est le cercle, tracé dans le plan $\mathcal{P}$, ayant son centre sur ($z'z$) et pour rayon $\sqrt{\lambda}$.

Méthode

Le système d'équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

caractérise une droite lorsque a, b, c ne sont pas proportionnels à a', b', c' .

Exercices et Problèmes

Pour s'entraîner

Dans tous les exercices ci-dessous, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Cylindre

1 Soit $\mathcal{C}$ le cylindre de révolution ayant pour base le cercle de centre O et de rayon R tracé dans le plan (xOy) . Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque, P son projeté orthogonal sur $(z'z)$.

Montrer que $M \in \mathcal{C}$ équivaut à $PM = R$ et en déduire la démonstration de la formule donnant une équation d'un cylindre.

2 $\mathcal{C}$ est le cylindre d'axe $(z'z)$ passant par $A(1; 2; 3)$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = -1$.

3 Soit $\mathcal{C}$ un cylindre d'axe $(x'x)$.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ sachant que son intersection avec le plan d'équation $z = 2$ est constituée de deux droites admettant respectivement pour représentations paramétriques :

$$(x = k; y = 3; z = 2) \quad \text{et} \quad (x = m; y = -3; z = 2).$$

PISTE Un cylindre d'axe $(x'x)$ admet une équation du type $y^2 + z^2 = R^2$.

4 $\mathcal{C}$ est le cylindre d'axe $(z'z)$ et de rayon 3.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

2. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2$.

Indiquer la nature de l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$.

3. Définir dans $\mathcal{P}$ un repère utilisant deux des vecteurs du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et donner une équation cartésienne dans ce repère de l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$.

5 Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x = -5$. On considère le point $A(-5; 0; 0)$ et on choisit dans $\mathcal{P}$ le repère

$$\mathcal{R} = (A; \vec{j}, \vec{k}).$$

Le cylindre $\mathcal{C}$ d'axe $(z'z)$ coupe le plan $\mathcal{P}$ suivant deux droites ayant pour équations respectives dans le repère $\mathcal{R}$: $y = 3$ et $y = -3$.

Déterminer une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}$.

6 La sphère S a son centre sur $(z'z)$ et passe par les points $A(2; 2; 2)$ et $B(\sqrt{3}; 2; 3)$.

Déterminer une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}$ d'axe $(z'z)$ circonscrit à S .

7 La droite D admet pour représentation paramétrique $(x = -1 + k; y = 7 + 2k; z = 1 + 3k)$.

Le cylindre $\mathcal{C}$ a pour axe $(z'z)$ et contient le point A de coordonnées $(9; 0; 7)$.

Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de D .

8 La droite D passe par les points $A(1; 2; 3)$ et $B(4; 5; 6)$. Le cylindre $\mathcal{C}$ a pour axe $(x'x)$ et coupe $(z'z)$ aux points de cotes -2 et 2 .

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite avec le cylindre $\mathcal{C}$.

9 $\mathcal{C}$ est un cylindre d'axe $(y'y)$. Il coupe la droite D ayant pour représentation paramétrique

$$(x = 1 + 2t; y = 1 - t; z = t)$$

en un point A d'abscisse 3. Déterminer les coordonnées de son second point d'intersection avec D .

10 Le cylindre $\mathcal{C}$ admet pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 25$.

Soit A le point de coordonnées $(3; 4; 2)$ et B le point de coordonnées $(0; 5; 3)$.

Montrer que l'on peut trouver deux points E et F appartenant au cylindre $\mathcal{C}$ et tels que $ABFE$ soit un parallélogramme dont aucun côté n'est parallèle à $(z'z)$ et dont le sommet E a pour cote 7.

11 $\mathcal{C}$ est un cylindre d'axe $(x'x)$. Soit A le point de coordonnées $(1; 2; 3)$ et B le point de coordonnées $(4; 5; 6)$. La droite (AB) coupe $\mathcal{C}$ en un point E tel que $\vec{AE} = 3\vec{AB}$. Déterminer le second point d'intersection F de la droite (AB) avec le cylindre $\mathcal{C}$.

12 Soit $\mathcal{C}$ le cylindre d'axe $(x'x)$ et de rayon R . D est la droite dont une représentation paramétrique est $(x = t + 1; y = t\sqrt{3}; z = -t)$.

D' est la droite dont une représentation paramétrique est $(x = k - 1; y = k\sqrt{3}; z = -k)$.

Comment choisir R pour que D coupe $\mathcal{C}$ en A et B , et que D' coupe $\mathcal{C}$ en A' et B' tels que le quadrilatère $ABB'A'$ soit un losange. Ce quadrilatère est-il alors un carré ?

Cône

13 Soit $\mathcal{C}$ le cône de révolution d'axe $(z'z)$, de sommet O , dont les génératrices font l'angle α avec (Oz) . Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque et P son projeté orthogonal sur $(z'z)$. Montrer que $M \in \mathcal{C}$ équivaut à $PM = PO \tan \alpha$. En déduire une démonstration de la formule donnant une équation d'un cône de révolution.

14 Déterminer une équation cartésienne du cône de sommet O , d'axe $(z'z)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

15 Déterminer une équation cartésienne du cône de sommet O , d'axe $(y'y)$ passant par le point A de coordonnées $(1; 2; 3)$.

PISTE Un cône de sommet O et d'axe $(y'y)$ admet une équation du type $x^2 + z^2 = y^2 \tan^2 \alpha$.

16 Déterminer une équation cartésienne du cône de sommet O , d'axe $(z'z)$, passant par le point A de coordonnées $(1; 2; -3)$.

17 Le cône $\mathcal{C}$ a pour sommet O et pour axe $(z'z)$; il coupe le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 3$ suivant un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 9. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.

18 $\mathcal{C}$ est un cône de sommet O et d'axe $(x'x)$. Il passe par $A(2; 4; 6)$. Donner une équation de $\mathcal{C}$.

19 Le cône $\mathcal{C}$ a pour sommet $S(0; 0; 1)$, pour axe $(z'z)$ et pour angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Soit $(x'; y'; z')$ les coordonnées d'un point M dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quelle relation doivent vérifier x' , y' et z' pour que M appartienne à $\mathcal{C}$?

2. Soit $(x; y; z)$ les coordonnées d'un point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(x'; y'; z')$ les coordonnées de ce même point M dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Indiquer les formules permettant de calculer x' , y' et z' en fonction de x , y , et z et en déduire une équation de $\mathcal{C}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

20 Le cône $\mathcal{C}$ a pour axe $(z'z)$ et pour sommet O . Il contient le point $A(1; 2; 1)$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

2. Déterminer l'intersection Γ de $\mathcal{C}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 2$.

3. Donner une représentation paramétrique de cette intersection dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(B; \vec{i}, \vec{j})$ où B est l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $(z'z)$.

21 Le cône $\mathcal{C}$ a pour axe $(z'z)$; son sommet est O et son angle est $\frac{\pi}{3}$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

2. Peut-on déterminer le réel λ pour que le plan d'équation $z = \lambda$ coupe le cône $\mathcal{C}$ suivant un cercle de rayon $2\sqrt{3}$? Le problème admet-il plusieurs solutions?

22 La surface S admet pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}(z - 2)^2.$$

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 0$.

1. a) Soit $A(0; 0; 2)$ et $M(x; y; z)$. Déterminer les coordonnées de $\vec{AM}$.

b) En déduire une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et en déduire que $\mathcal{C}$ est un cône.

2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{C}$.

23 Dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y = 0$, on choisit pour repère $\mathcal{R}: (O; \vec{i}, \vec{k})$.

Le cône $\mathcal{C}$, d'axe $(z'z)$ et de sommet O coupe $\mathcal{P}$ suivant deux droites qui ont pour équations dans le repère $\mathcal{R}: z = 2x$ et $z = -2x$.

Déterminer une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

24 Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $z = 5$. Le cône $\mathcal{C}$, d'axe $(z'z)$, de sommet O et d'angle 30° coupe $\mathcal{P}$ suivant un cercle Γ .

Le cylindre $\mathcal{C}_1$ d'axe $(z'z)$ coupe $\mathcal{P}$ suivant le même cercle Γ .

1. Déterminer une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$.

2. En déduire une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}_1$.

25 Le cône $\mathcal{C}$ d'axe $(z'z)$ a pour sommet $A(0; 0; 2)$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En déduire une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. Un plan parallèle au plan (xOy) coupe $\mathcal{C}$ suivant un cercle de rayon 5.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. Le problème a-t-il plusieurs solutions?

26 Le cône $\mathcal{C}$ d'axe $(z'z)$ a pour angle $\frac{\pi}{6}$ et pour sommet un point A situé sur $(z'z)$.

Il est coupé par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 6$ suivant un cercle de centre B et de rayon 3.

1. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. Calculer AB , puis OA ; y a-t-il plusieurs possibilités?

3. En déduire une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

27 Le cône $\mathcal{C}$ d'axe $(z'z)$ a pour sommet un point S situé sur $(z'z)$.

Le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 4$ coupe $\mathcal{C}$ suivant un cercle Γ_1 ; le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $z = 2$ coupe $\mathcal{C}$ suivant un cercle Γ_2 . Ces cercles sont tels que l'aire de Γ_1 est le quart de l'aire de Γ_2 et que la somme de leurs rayons est 9.

1. Quel est le rapport des rayons des deux cercles?

2. Déterminer une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$.

3. Déterminer à un degré près l'angle de $\mathcal{C}$.

28 La surface $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = 2(z - 1)^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cône d'axe $(z'Oz)$.

2. Ce cône est coupé par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 4$ suivant un cercle Γ_1 .

Déterminer par son équation un plan $\mathcal{Q}$ coupant le cône $\mathcal{C}$ suivant un cercle dont le périmètre est la moitié de celui de Γ_1 . Le problème admet-il plusieurs solutions?

Exercices et Problèmes

Sections de surfaces

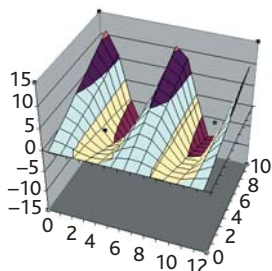
29 Soit S la sphère de centre O et de rayon 3 et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 2$.

1. Déterminer une équation de S .
2. Déterminer l'intersection de S et de $\mathcal{P}$.

30 La sphère S de centre O est coupée par le plan d'équation $z = 3$ suivant un cercle de rayon 4. Déterminer une équation de S .

31 La sphère S de centre O et de rayon R est coupée par le plan d'équation $y = 3$ suivant un cercle de rayon $\frac{R}{2}$. Déterminer le rayon R de la sphère S .

32 La surface S a pour équation $z = x \cos y$. Le dessin ci-dessous en donne une représentation partielle qu'on a obtenue en faisant varier x de 0 à 11 et y de 0 à 12.



1. Déterminer, par le calcul, l'intersection de S avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = \pi$, puis avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = 2\pi$.

2. Déterminer de façon générale l'intersection de S avec le plan $\mathcal{P}_k$ d'équation $y = k\pi$.

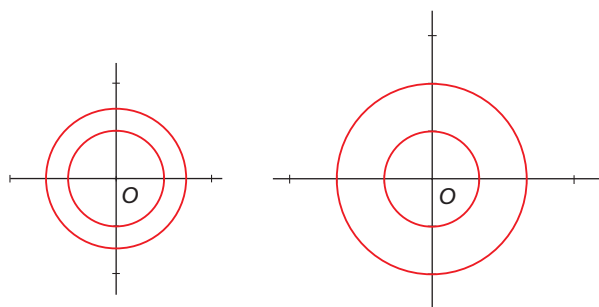
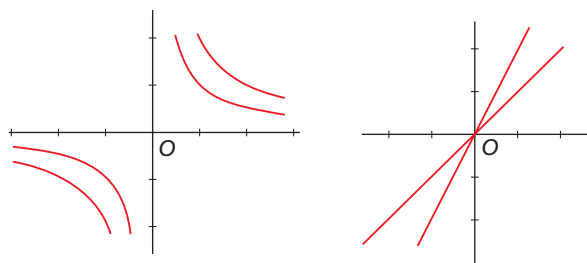
33 On considère les surfaces S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ayant respectivement pour équation cartésienne :

$$z = xy; \quad z = x^2 + y^2; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad z = \frac{y}{x}.$$

On a représenté sur les quatre figures ci-dessous les intersections L_1 et L_2 de chacune de ces surfaces par les plans d'équations $z = 1$ et $z = 2$.

L_1 et L_2 ont été tracées, pour chaque surface dans le même repère.

Indiquer, pour chacune des coupes ci-dessous, à quelle surface elle correspond.



34 Soit S la surface d'équation $z = 3xy$.

1. a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?

b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.

2. Sur la figure ci-dessous sont représentées trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan (xOy) de trois courbes de niveau de cote constante k .

Préciser, en justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.

3. Le point A' représenté sur la courbe $\mathcal{C}_2$ de la figure 1 est la projection orthogonale dans le plan (xOy) du point $A(x; y; z)$, de la surface S .

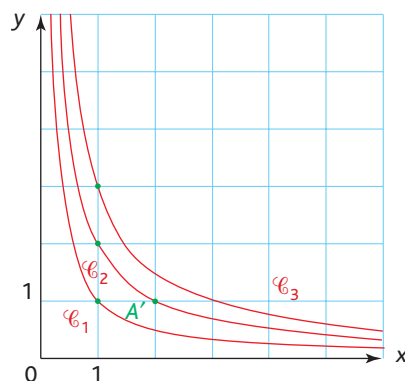
a) Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b) Préciser les coordonnées du point A'' , projeté orthogonal de A dans le plan (yOz) .

4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.

a) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient le point A ainsi que la courbe de niveau d'abscisse 2.

b) Démontrer que l'intersection de la surface S et du plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.

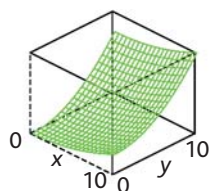


35 On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0; 10]$ et $y \in [0; 10]$ respectivement par :

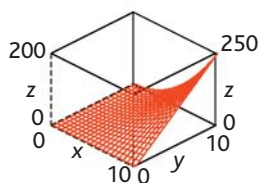
$$f(x; y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad h(x; y) = \frac{1}{4} x^2 y.$$

f et h sont dites fonctions de Cobb-Douglas.

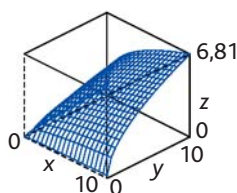
1. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques ci-dessous. Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.



représentation 1

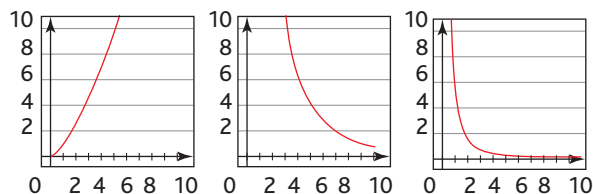


représentation 2

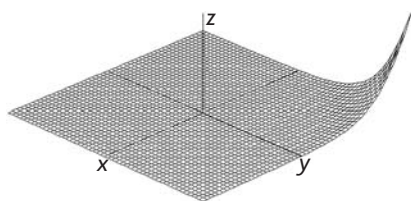


représentation 3

2. Quelle est, parmi les trois représentations graphiques suivantes, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4}x^2y$?



36 La surface S ci-dessous est la représentation graphique de la fonction définie par $z = e^{y-x}$.



1. Comment expliquer la forme ascendante qui apparaît sur la partie droite de la figure ?

2. Comment expliquer que S apparaît presque plane dans la partie correspondant à $x > 0$ et $y < 0$?

3. Quelle est la position de la surface S par rapport au plan d'équation $z = 0$?

4. Déterminer l'intersection du plan d'équation $z = 1$ avec S .

5. Montrer qu'il existe un plan parallèle au plan (xOy) qui coupe $(z'z)$ en A et qui coupe S suivant une droite admettant pour équation dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ $y = x - \ln 3$.

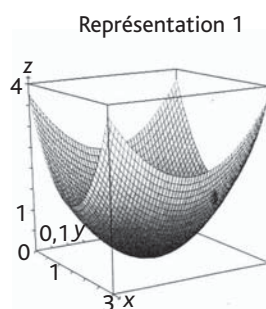
37 On considère la fonction f des variables x et y définie par $f(x; y) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5xy$.

La surface S est la représentation graphique de f .

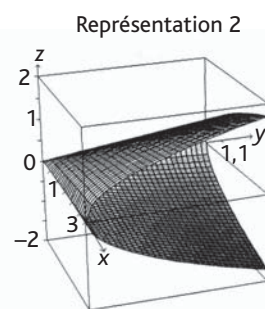
1. Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse :

- S contient l'origine du repère ;
- S contient le point $A(0; 1; 2)$;
- S contient la demi-droite $[Ox)$;
- S contient la demi-droite $[Oy)$.

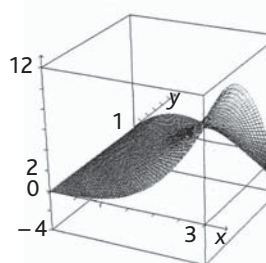
2. La représentation graphique de S pour $x \in [0; 3]$ et $y \in [0; 1]$ figure parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous. La déterminer en justifiant votre choix.



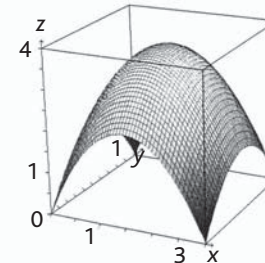
Représentation 1



Représentation 2



Représentation 3



Représentation 4

38 Vrai ou faux ?

Faites votre choix

- L'intersection du cylindre d'axe (Oz) et de rayon 2 et du plan d'équation $y = 3$ est formée de deux droites.
- La section d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon 1 par le plan d'équation $z = 1$ est formée d'une droite.
- La section du cône d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ par le plan d'équation $z = \sqrt{2}$ est un cercle.
- $x^2 = (z-y)(z+y)$ est l'équation d'un cône de révolution.
- La section d'un cône d'axe (Oz) par le plan d'équation $y = 0$ est une hyperbole de centre O .
- La section de la surface d'équation $z = xy$ par le plan d'équation $z = 2$ est formée de deux droites.
- La section de la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ par le plan d'équation $z = -2$ est un cercle.
- La section de la surface d'équation $z = x - y + 1$ par le plan d'équation $y = 5$ est réduite à un point.

Pour approfondir

39 Le cylindre $\mathcal{C}$ admet pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 25$.

1. Soit A le point de $\mathcal{C}$ situé dans le plan (xOy) , ayant pour abscisse 3 et ayant une ordonnée positive. Donner les coordonnées de A .

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire en A à (OA) .

b) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{C}$ suivant une droite d que l'on caractérisera.

On dit alors que le plan $\mathcal{P}$ est tangent au cylindre $\mathcal{C}$ suivant la génératrice (OA) .

2. On utilise dans cette question la notion de plan tangent à un cylindre rencontrée dans la question précédente.

a) Déterminer une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}$ d'axe $(z'z)$ sachant que ce cylindre est tangent au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y = 3$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite commune à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{C}$.

40 La surface $\mathcal{C}$ admet pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(z - 1).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un cône dont on précisera le sommet.

2. $\mathcal{C}$ est coupé par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2$ suivant une courbe Γ . Soit A l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $(y'y)$. Le but de l'exercice est d'identifier cette courbe et de la tracer correctement en prenant pour plan de figure le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère convenable.

a) Montrer que, si l'on prend $(A; \vec{i}, \vec{k})$ pour repère dans $\mathcal{P}$, Γ est la réunion de deux courbes ayant pour équations :

$$z = 1 + \sqrt{x^2 + 4} \quad \text{et} \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + 4}.$$

b) Soit $f: x \rightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 4}$ définie sur $\mathbb{R}$ et Γ_1 son graphique dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{k})$.

Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$ et montrer que Γ_1 admet la droite $z = 2x + 1$ pour asymptote oblique. En déduire la construction de Γ_1 .

3. Soit $g: x \rightarrow 1 - \sqrt{x^2 + 4}$ définie sur $\mathbb{R}$ et Γ_2 son graphique dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{k})$.

a) Pour un point $M(x; z)$ quelconque du plan $\mathcal{P}$, déterminer les coordonnées $(x'; y')$ de son symétrique M' par rapport au point Ω de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(0; 1)$.

b) Montrer alors que M est sur Γ_2 si et seulement si son symétrique par rapport à Ω est sur Γ_1 . En déduire la construction de Γ_2 .

4. On prend dans $\mathcal{P}$ le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\Omega(0; 1)$, $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$. Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$; on désigne par $(X; Y)$ les coordonnées de M

dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ et par $(x; z)$ ses coordonnées dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{k})$.

a) Montrer qu'on a les relations
$$\begin{cases} x = X + Y \\ z = 2X - 2Y + 1 \end{cases}$$

b) En déduire l'équation de Γ dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$. Quelle est la nature de Γ ?

41 Soit Γ le cercle de rayon R et de centre O tracé dans le plan (xOy) et A le point de coordonnées $(0; 0; a)$. A et Γ définissent un cône de révolution K .

Soit C le point de coordonnées $(R; 0; 0)$. Le but du problème est de chercher s'il existe une génératrice de K perpendiculaire à (AC) .

1. Si une telle génératrice existe, déterminer l'abscisse x_B du point B où cette génératrice coupe le cercle Γ .

2. Quelle relation doit lier a et R pour qu'une telle génératrice existe ?

3. Dans le cas particulier où $a = R$, où se situe le point B ?

42 Le cône $\mathcal{C}$ admet pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$. Soit Ω le point de coordonnées $(0; 0; 6)$.

1. le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 6$ est rapporté au repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$; déterminer dans ce repère, l'équation de l'intersection Γ de $\mathcal{P}$ avec le cône $\mathcal{C}$. Quelle est, dans ce repère, l'équation de la droite d , tangente à Γ en son point A d'abscisse 3 et d'ordonnée positive ?

2. Montrer que d et (OA) déterminent un plan $\mathcal{Q}$. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3. Écrire un système d'équations caractérisant l'ensemble des points communs à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{Q}$.

Montrer que ce système peut s'écrire :
$$\begin{cases} z = x + y \\ (x + y)^2 = 4xy \end{cases}$$

Résoudre alors le système.

4. En déduire que l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{Q}$ est réduite à la droite (OA) .

On dit que $\mathcal{Q}$ est le plan tangent à $\mathcal{C}$ le long de la génératrice (OA) .

Pour prendre des initiatives

43 Minimaliser et maximiser

A et B sont deux points distincts de $(z'z)$; on pose $AB = a$.

1. a) Quel est l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de l'espace tels que le triangle MAB ait une aire donnée $\mathcal{I}$?

b) Quel est l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ pour lesquels le périmètre du triangle MAB est le plus petit possible ?

2. On suppose que le triangle MAB a un périmètre p donné.

Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que l'aire du triangle MAB soit la plus grande possible ?

Pour aller plus loin

44 On a représenté ci-dessous la surface S d'équation $z = \ln(xy)$.

1. Expliquer les « dépressions » que l'on voit au voisinage de $(x'x)$ et de $(y'y)$.

2. Quelle est l'équation de l'intersection $\mathcal{C}_0$ de S avec le plan $z = 0$?

3. On désigne par $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ les points situés sur $(z'z)$ d'ordonnées respectives $1, 2, 3, \dots, n$ et on désigne par $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_n$ les plans d'équations respectives $z = 1, z = 2, z = 3, \dots, z = n$.

Donner l'équation de l'intersection $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{P}_1$ avec S dans le repère $(A_1; \vec{i}, \vec{j})$ puis l'équation de l'intersection $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{P}_2$ avec S dans le repère $(A_2; \vec{i}, \vec{j})$, puis l'équation de l'intersection $\mathcal{C}_3$ de $\mathcal{P}_3$ avec S dans le repère $(A_3; \vec{i}, \vec{j})$, ..., puis l'équation de l'intersection $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{P}_n$ avec S dans le repère $(A_n; \vec{i}, \vec{j})$.

4. On désigne par $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y = x$ et on désigne par $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ les intersections de $\mathcal{Q}$ avec les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$.

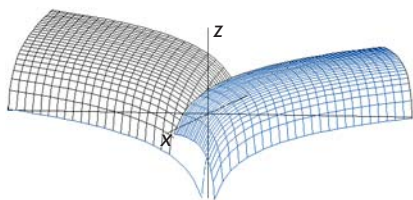
a) Déterminer les coordonnées des points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OM_n}$ s'exprime à l'aide de $\vec{u}$ et de $\vec{k}$.

En déduire les coordonnées des points M_p dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{k})$ pour p allant de 0 à n .

c) Montrer que les points M_p appartiennent à une courbe du plan $\mathcal{Q}$ dont on donnera l'équation dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{k})$.



45 L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0; 5; 5)$ et $B(0; 0; 10)$.

1. Dans cette question, on se place dans le plan $\mathcal{P}_0$ d'équation $x = 0$ rapporté au repère $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre B passant par A . Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

2. On nomme $\mathcal{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathcal{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz) .

a) Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.

b) Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathcal{S}$. Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c) Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x = 1$. Dans $\mathcal{P}_1$, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection. Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.



Figure 1



Figure 2

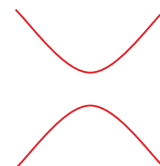


Figure 3

4. Soit $M(x; y; z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls.

Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

46 L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface T d'équation $x^2y = z$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$.

1. a) Déterminer la nature des intersections de T avec les plans parallèles au plan (xOz) .

b) Déterminer la nature des intersections de T avec les plans parallèles au plan (yOz) .

2. a) Déterminer l'intersection de la surface T et du plan d'équation $z = 0$.

b) Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0; 0; k)$. Déterminer, dans le repère $(K; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe d'intersection de T et du plan d'équation $z = k$.

c) Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K; \vec{i}, \vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

3. On appelle (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface T , c'est-à-dire :

$(D) = \{M(x; y; z) \in (E) \text{ avec } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq x^2y\}$.

a) Pour $0 < k \leq 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question 3.c. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x, y, z) tels que $y \geq \frac{k}{x^2}$ et $z = k$.

Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$, exprimée en unités d'aire, de cette surface.

b) On pose $S(0) = 1$, calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D) .

On rappelle que $V = \int_0^1 S(k) dk$.

A. Utilisation de « Excel »

1 Construction d'une portion de la surface d'équation $z = xy$

a. Construction de la portion de la surface d'équation $z = xy$ correspondant à $x \in [0 ; 12]$ et $y \in [0 ; 10]$

– Entrer les valeurs de x sur la 1^{re} ligne, de 0 à 12, avec un pas de 1 par exemple. On commencera par inscrire 0 dans la cellule B1.

– Entrer les valeurs de y dans la colonne A, de 0 à 10, avec le même pas, en commençant par inscrire 0 dans la cellule A2.

– Calculer tous les produits xy correspondants : expliquer pourquoi la formule à écrire pour cela dans la cellule B2 est la suivante :

$$= B\$1 * \$A2$$

– Recopier cette formule sur toute la ligne, puis dans tout le tableau. 

– Cliquer sur l'icône de l'assistant graphique, représentée ci-contre, puis sélectionner *surface*.

– À l'étape notée 2 par l'assistant graphique, cocher *série en ligne*.

– À l'étape notée 3, cocher *quadrillage principal*, puis cliquer sur *terminer*.

Le graphique apparaît alors sur la feuille. On peut y voir les intersections de la surface par des plans parallèles au plan (xOy) ; ces intersections sont représentées par des lignes de changement de couleur.

– Faire un clic droit dans le cadre contenant la figure, cliquer sur *vue 3D* et valider *axes à angle droit*.

– Modifier les graduations sur les axes : faire un clic droit sur un axe, puis cliquer sur *format de l'axe, échelle* et choisir les unités pour cet axe.

– Faire tourner la figure : faire un clic gauche sur un des angles du dessin ; lorsque le mot *coin* s'affiche, on peut manœuvrer la figure en tournant la souris.

b. Obtention du projeté de la surface sur le plan (xOy)

– Revenir à la feuille de calculs et la sélectionner à nouveau.

– Cliquer sur l'icône de l'assistant graphique et valider encore *surfaces*, puis sélectionner l'icône ci-dessous.



– À l'étape 2, cliquer sur *séries en colonne*.

– À l'étape 3, cliquer sur *quadrillage principal*, puis *terminer*.

La figure obtenue fait apparaître les projetés, sur le plan (xOy) des lignes de changement de couleur de la figure précédente. On peut reconnaître des portions d'hyperbole ayant pour asymptotes les axes $(x'x)$ et $(y'y)$: ce sont les projetées des courbes d'équation $y = \frac{k}{x}$ tracées dans le plan d'équation $z = k$ pour différentes valeurs de k .

On peut modifier les graduations des axes comme plus haut.

2 Construction d'une portion de la surface d'équation $z = (x + y)^2$

a. Appliquer la méthode précédente pour construire, la portion de la surface S d'équation $z = (x + y)^2$ correspondant à $x \in [-10 ; 10]$ et $y \in [-10 ; 10]$; on prendra ici encore un pas de 1 pour les valeurs de x et de y .

b. D'après la figure obtenue, quelle semble être l'intersection de la surface S avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 0$? Justifier ce résultat par le calcul.

c. Quelle semble être de même l'intersection de S avec le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $z = 100$? Justifier ce résultat par le calcul.

d. Déterminer de même, graphiquement, puis par calcul, l'intersection de S avec les plans $\mathcal{R}$ et S d'équations respectives $x = 10$ et $y = 10$.

B. Utilisation de « Dérive »

– Dans le bandeau inférieur, taper par exemple x^2+y^2 , puis valider.

– Cliquer sur l'icône ci-contre située en haut à droite. Apparaît alors le cube à l'intérieur duquel sera tracée la surface.



– Cliquer sur la même icône que précédemment ; elle est située cette fois en haut à gauche.

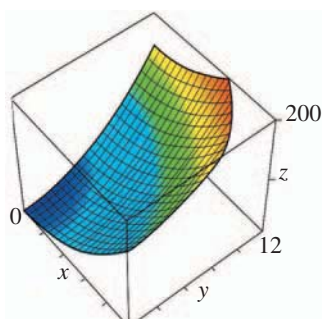
La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ apparaît.

– Faire tourner la figure en agissant sur les icônes comportant des flèches. En cliquant sur l'icône comportant un œil, on peut voir la position de l'observateur par rapport au repère.

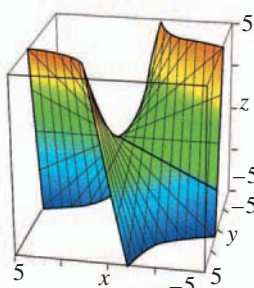
– Modifier la zone de tracé de la surface en agissant sur l'icône comportant le dessin d'un parallépipède.

On peut ainsi obtenir les figures suivantes :

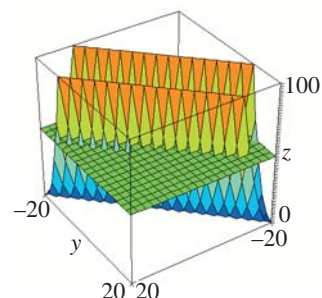
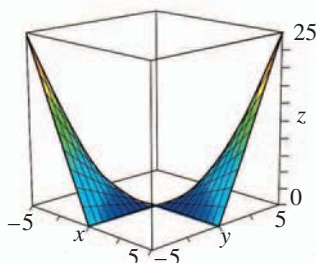
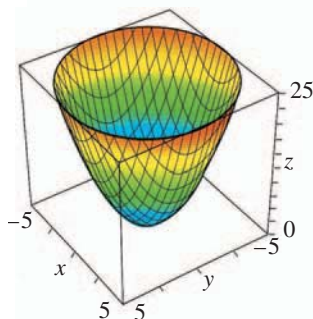
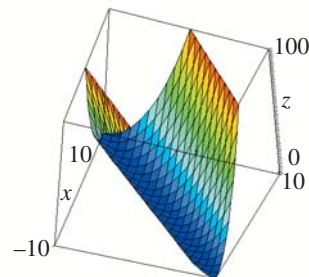
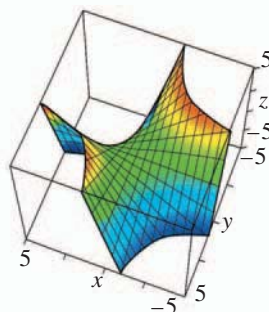
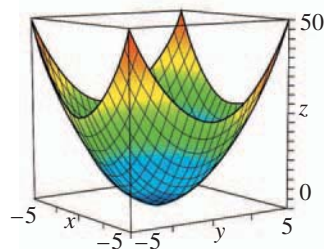
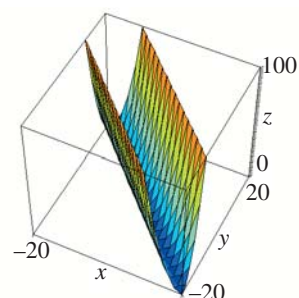
Surface $z = x^2 + y^2$



Surface $z = xy$



Surface $z = (x + y)^2$ et plan $z = 50$



Pour préparer le Bac

Exercice A

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté (E) , des points de l'espace équidistants de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires et orthogonales. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de coordonnées $(0; 0; 1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

La droite $\mathcal{D}'$ passe par le point B de coordonnées $(0; 0; -1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1. Vérifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point O appartient à (E) .

2. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$$

Soit M le point de coordonnées $(x; y; z)$; calculer la distance de M à la droite $\mathcal{D}$.

3. Calculer de même la distance de M à la droite $\mathcal{D}'$.

4. En déduire que M appartient à (E) si et seulement si $xy + 2z = 0$

5. Déduire de cette relation :

a) Que les intersections de (E) avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.

b) La nature des intersections de (E) avec des plans orthogonaux à l'axe $(O; \vec{i})$ puis à l'axe $(O; \vec{j})$.

Exercice B

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2; seule l'équation de Γ donnée en 1. c) intervient à la question 4.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives : $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

c) On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

Montrer que Γ a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles en justifiant avec soin votre réponse.

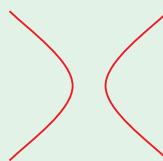


Figure 1



Figure 2

3. a) Montrer que l'équation $x^2 = 3 [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.

b) Montrer la propriété suivante :

pour tous entiers relatifs a et b , si 7 divise $a^2 + b^2$, alors 7 divise a et 7 divise b .

4. a) Soit a, b et c des entiers relatifs non nuls.

Montrer la propriété suivante :

Si le point A de coordonnées $(a; b; c)$ est un point du cône Γ , alors a, b et c sont divisibles par 7.

b) En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet du cône.



pour **chacun**
des **exercices**

Vers l'oral

I/ Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont respectivement pour équations $z = 1$ et $z = -3$. Ils coupent $(x'x)$ respectivement en A et B .

$\mathcal{C}$ est un cône d'axe $(z'z)$.

$\mathcal{P}_1$ coupe $\mathcal{C}$ suivant un cercle dont une équation cartésienne dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}_1$ est $x^2 + y^2 = 18$.

$\mathcal{P}_2$ coupe $\mathcal{C}$ suivant un cercle dont une équation cartésienne dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}_2$ est $x^2 + y^2 = 2$.

Donner une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

II/ S est la surface définie par la relation $z = f(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$.

a) Y a-t-il des couples $(x; y)$ pour lesquels f n'est pas définie ?

b) Déterminer l'intersection de S avec le plan d'équation $z = k$ où k est un réel donné.

c) Déterminer l'intersection de S avec le plan (yOz) et tracer cette intersection dans le repère $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

III/ Soit $\mathcal{C}$ le cylindre d'axe $(x'x)$ est de rayon 2 et $\mathcal{P}$ le plan admettant $\vec{n}(0; 1; 1)$ pour vecteur normal et contenant le point $A(1; 1; 1)$.

a) Déterminer des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}$.

b) Quelle est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{C}$?

Et maintenant,

TESTEZ-VOUS !

Choisissez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Savoir déterminer des sections planes de surfaces ?

	A	B	C	D
1. La surface d'équation : $y^2 + z^2 = 29$	est un cône d'axe $(x'x)$	coupe le plan (zOy) suivant deux droites sécantes	coupe le plan (xOz) suivant un cercle	contient la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$
2. Soit $\mathcal{C}$ le cône de révolution de sommet O , d'axe $(y'y)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$;	$\mathcal{C}$ admet pour équation $x^2 + z^2 = \frac{1}{3}y^2$	$\mathcal{C}$ coupe le plan d'équation $x = 0$ suivant un cercle de rayon 2	$\mathcal{C}$ coupe le plan d'équation $z = 3$ suivant un cercle de rayon 3	$\mathcal{C}$ coupe le plan (xOy) suivant deux droites qui font un angle de 60°
3. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0 ; 3 ; 0)$ et de rayon 1 tracé dans le plan d'équation $y = 3$ fait partie	du cône d'équation $y^2 = 3x^2 + 3z^2$	de la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{10}$	du cylindre d'axe $(y'y)$ et de rayon 1	du cône d'axe $(y'y)$, de sommet $\omega(0 ; 1 ; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$
4. $\mathcal{C}$ est le cône d'équation $y^2 + z^2 = x^2$ et t la translation de vecteur $-2\vec{i}$	$\mathcal{C}$ a pour angle 45°	$\mathcal{C}$ coupe le plan (xOy) suivant deux droites perpendiculaires	$\mathcal{C}$ coupe la sphère de centre O et de rayon 2 suivant deux cercles de rayon 1	$\mathcal{C}$ donne le cône d'équation $y^2 + z^2 = (x - 2)^2$ par la translation t
5. $\mathcal{C}$ est le cylindre d'axe $(x'x)$, et de rayon 3, $\mathcal{H}$ le cône d'axe $(x'x)$, de sommet $\Omega(3 ; 0 ; 0)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 6$	Une équation de $\mathcal{H}$ est $y^2 + z^2 = (x + 3)^2$	Le cercle de centre $\omega(6 ; 0 ; 0)$ et de rayon 3 du plan $\mathcal{P}$ fait partie de $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$	$\mathcal{P} \cap \mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$	$\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ est la réunion de deux cercles de rayon 3 dont l'un est centré en O
6. S est la surface d'équation $z = xy$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 1$	$\mathcal{P} \cap S$ est une droite	Le plan (xOy) coupe S suivant deux droites parallèles	L'intersection de S avec le plan (xOz) est $(z'z)$	L'intersection de S avec le plan d'équation $z = 1$ est une hyperbole
7. Si S est la surface d'équation $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, alors l'intersection de S	avec le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales	avec le plan d'équation $z = 1$ est un cercle	avec le plan d'équation $y = 0$ est une droite	avec le plan d'équation $x = 0$ est la réunion de deux droites
8. S est la surface d'équation $z = (x - y)^2$ et S' la surface d'équation $z = x^2 + y^2$	$S \cap S'$ est composé de deux droites perpendiculaires	S coupe le plan (xOy) suivant deux droites perpendiculaires	S coupe le plan d'équation $z = 1$ suivant un cercle	S coupe le plan d'équation $y = 0$ suivant une parabole

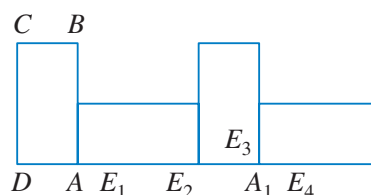
Problèmes de Révision

Problème 1

Rotation, translation
Équation dans $\mathbb{Z}$

Chapitres 2 et 3

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.



9. Faire une figure : construire $ABCD$, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- 10.a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(A) = N$ et $r'(B) = P$. Déterminer l'angle de r' .
- b. Montrer que l'image de $ABCD$ par r' est $AMNP$.
- c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.
11. On considère les images successives des rectangles $ABCD$ et $AMNP$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$. Sur la demi-droite $[DA)$, on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k \geq 1}$ vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.
 - a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k ; A_{k+1}]$. Que vaut la longueur $A_k E_{120}$ en cm ?
 - b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k .
Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$. Vérifier que les nombres $n = 7\ 100$ et $k = 3\ 100$ forment une solution de cette équation. Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

Problème 2

Similitude indirecte
Congruences
Équation dans $\mathbb{Z}$

Chapitres 1, 2 et 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3 + 4i}{5}z + \frac{1 - 2i}{5}.$$

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y' = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
 - a. Donner une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
 - b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' .
Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (On pourra utiliser les congruences modulo 5).

Chapitre 1 Divisibilité

Test de début

1. B-D ; 2. A-B ; 3. B ; 4. C ; 5. D ; 6. A-B-D ; 7. C ; 8. B ; 9. B-C ; 10. C ; 11. C ; 12. C ; 13. C.

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Si $2|a^2 + b^2$, comme $2|2ab$, alors $2|a^2 + b^2 + 2ab$, donc $2|(a+b)^2$.

18. Soit P_n la propriété : « $3^{6n-4} - 2$ est divisible par 7 ». P_1 est vraie, car $3^2 - 2 = 7$, donc $3^2 - 2$ est divisible par 7.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 tel que P_n est vraie. On a alors : $3^{6n-4} - 2 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit encore : $3^{6n-4} = 7k + 2$.

$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)-4} - 2 &= 3^{6n+4+6} - 2 = 3^6 3^{6n+4} - 2 \\ &= 3^6(7k + 2) - 2 \\ &= 729 \times 7k + 1456 \\ &= 7(729k + 208) : \text{ainsi, } 3^{6(n+1)-4} - 2 \end{aligned}$$

est divisible par 7, et P_{n+1} est vraie.

Ainsi : P_n est vraie pour tout entier $n, n \geq 1$.

23. $n = 41q + 5$, avec q entier. Comme $0 \leq n \leq 100$, alors $0 \leq q \leq 2$, d'où $q \in \{0 ; 1 ; 2\}$. On en déduit : $n \in \{5 ; 46 ; 87\}$.

34. a. $2(n+2) + n - 3 = 2n + 4 + n - 3 = 3n + 1$.

b. Puisque $n \geq 3$, on a : $n - 3 \geq 0$.

De plus : $(n+2) - (n-3) = 5$, donc $n+2 > n-3$.

On a $3n+1 = 2(n+2) + n-3$ avec $0 \leq n-3 < n+2$, donc $n-3$ est le reste de la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$.

41. Si $n = 2$, alors $n+7 = 9$, qui n'est pas premier. Si $n \geq 3$, alors n est impair, et $n+7$ est pair, différent de 2, donc il n'est pas premier.

47. $n^2 + 8n + 15 = (n+3)(n+5)$, et on a : $n+3 \geq 3$ et $n+5 \geq 5$, donc $n^2 + 8n + 15$ n'est jamais premier, car il est produit de deux entiers différents de 1.

56. $x^2 - y^2 = p \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = p$ (1)

$x+y$ est positif, car x et y le sont.

Les diviseurs de p dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 1 \\ x+y = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+1}{2} \\ y = \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

($p+1$ et $p-1$ sont pairs, car p est impair).

60. $n = 7k + 4$, avec k entier et $0 \leq n \leq 30$.

On en déduit : $0 \leq k \leq 3$, d'où : $n \in \{4 ; 11 ; 18 ; 25\}$.

73. a.

$\times 2$	0	1	2	3	4
	0	2	4	1	3

b. $2x \equiv 3 \pmod{5} \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod{5}$. Les entiers solutions sont de la forme $x = 5k + 4$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

78. Si $n \equiv 0 \pmod{6}$, alors $N \equiv 0 \pmod{6}$.

Si $n \equiv 1 \pmod{6}$, alors $2n+1 \equiv 3 \pmod{6}$ et $7n+1 \equiv 2 \pmod{6}$, d'où $N \equiv 6 \pmod{6} \equiv 0 \pmod{6}$.

On traite les 6 cas possibles, et on note les congruences modulo 6 dans un tableau.

n	0	1	2	3	4	5
N	0	0	0	0	0	0

Dans tous les cas : $N \equiv 0 \pmod{6}$, donc N est divisible par 6.

86. On a : $5 + 3 + x + 4 = x + 12$.

53×4 est divisible par 9 si et seulement si $x + 12$ est divisible par 9. Comme $0 \leq x \leq 9$, la seule solution est : $x = 6$.

94. Vrai ou faux ?

A. Faux ; B. Vrai ; C. Faux ;
D. Faux ; E. Faux ; F. Vrai ;
G. Vrai ; H. Faux ; I. Faux ; J. Vrai.

Test final

1. B ; 2. A ; 3. C ; 4. C ; 5. D ; 6. D ; 7. B-C-D ; 8. D ; 9. C ; 10. A.

Chapitre 2 PGCD et PPCM

Test de début

1. A-B-C ; 2. B ; 3. D ; 4. A ; 5. C ; 6. B ; 7. D ; 8. A-C-D ; 9. C-D ; 10. A-C-D ; 11. D ; 12. B-D.

3. Comme $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, le PGCD de n et de 360 est égal à 5 si et seulement si $n = 5k$, avec k entier non multiple de 2 et de 3. Or, $1 \leq k \leq 20$, d'où $k \in \{1 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19\}$, et ainsi : $n \in \{5 ; 25 ; 35 ; 55 ; 65 ; 85 ; 95\}$.

6. C'est 1, car $2n+3 = (2n+1) + 2$, donc $\text{pgcd}(2n+3 ; 2n+1) = \text{pgcd}(2n+1 ; 2) = 1$, et $2n+1$ n'est pas divisible par 2.

18. On pose : $a = 18a'$ et $b = 18b'$, avec $\text{pgcd}(a' ; b') = 1$. Alors : $ab = 6480 \Leftrightarrow a'b' = 20 \Leftrightarrow (a' ; b') \in \{(1 ; 20) ; (4 ; 5) ; (5 ; 4) ; (20 ; 1)\}$. D'où les couples solutions : $(18 ; 360), (72 ; 90), (90 ; 72)$ et $(360 ; 18)$.

25. Comme $a + b = a \times 1 + b$, alors :
 $\text{pgcd}(a + b ; a) = \text{pgcd}(a, b) = 1$. De même :
 $\text{pgcd}(a + b ; b) = 1$. D'où $a + b$ est premier avec le produit ab (propriété du paragraphe 3).

36. On pose : $a = 12a'$ et $b = 12b'$,
avec $\text{pgcd}(a', b') = 1$.
Alors : $a + b = 72 \Leftrightarrow a' + b' = 6$.
Ainsi :
 $(a', b') \in \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$.
D'où : $(a, b) \in \{(12; 60), (24; 48), (36; 36),$
 $(48; 24), (60; 12)\}$.

42. a. $3x - 13y = 1 \Leftrightarrow 3(x - 9) = 13(y - 2)$.
 $3 \mid 13(y - 2)$, avec $\text{pgcd}(13; 3) = 1$, donc, d'après le théorème de Gauss : $3 \mid y - 2$. D'où : $y = 3k + 2$, puis
 $x = 13k + 9$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
b. $3x \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow 3x = 1 + 13k$, où $k \in \mathbb{Z}$.
D'où : $x = 13k + 9$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

53. 1. Une solution particulière est $(7; 1)$.
 $13x - 84y = 7 \Leftrightarrow 13(x - 7) = 84(y - 1)$.
 $84 \mid 13(x - 7)$ et $\text{pgcd}(13; 84) = 1$, d'où : $84 \mid x - 7$.
Ainsi : $x - 7 = 84k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y - 1 = 13k$. D'où :
 $(x; y) = (84k + 7; 13k + 1)$, avec k entier.
2. Si $d = \text{pgcd}(x; y)$, alors $d \mid x$ et $d \mid y$ donc
 $d \mid 13x - 84y$, soit $d \mid 7$. Ainsi : $d = 1$ ou $d = 7$.
3. $\text{pgcd}(x; y) = 7 \Leftrightarrow 7 \mid y$ (car $7 \mid x$).
 $7 \mid y \Leftrightarrow 13k + 1 \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{7}$.
Ainsi : $k = 1 + 7t$, avec t entier.
 $\text{pgcd}(x; y) = 7 \Leftrightarrow (x; y) = (84k + 7; 13k + 1)$,
avec $k \equiv 1 \pmod{7}$. On en déduit :
 $\text{pgcd}(x; y) = 1 \Leftrightarrow (x; y) = (84k + 7; 13k + 1)$,
avec $k \equiv 1 \pmod{7}$.

58. Le produit de deux multiples de 3 consécutifs est
 $3k(3k + 3)$, avec k dans $\mathbb{Z}$.
 $3k(3k + 3) = 9k(k + 1)$. Comme $k(k + 1)$ est pair, ce
nombre est divisible par 2 et par 9, donc par 18.

67. a. On trouve : DMROAEMO.
b. Tout élément a de $\mathcal{E}$ est l'image par f d'un unique élément de $\mathcal{E}$: $a - 10$ si $a \geq 10$, et $a + 16$ si $a \leq 9$.
c. Décodage : OLOMOUC (*petite ville de Tchèque*!).

79. Soit $d = \text{pgcd}(x; 18)$. Ainsi, d divise 18.
 $18x = 630d \Leftrightarrow x = 35d$, avec
 $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. Les naturels cherchés sont :
35, 70, 105, 210, 315, 630.

83. Soit $a = da'$ et $b = db'$, avec $d = \text{pgcd}(a; b)$.
 $504d = ab \Leftrightarrow da'b' = 504$.
De plus : $a + b = 204 \Leftrightarrow d(a' + b') = 204$.
 d divise 204 et 504, donc leur PGCD 12.
D'où : $d \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Pour $d = 12$, on a $a'b' = 42$ et $a' + b' = 17$.
Si on choisit $a' = 14$ et $b' = 3$, on obtient deux naturels solutions : $a = 168$ et $b = 36$.

85. $7^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, d'après Fermat, et
 $7^{2521} = (7^{10})^{252} \times 7$, donc $7^{2521} \equiv 7 \pmod{11}$.

91. A. Vrai ; B. Faux ; C. Vrai ; D. Vrai ;
E. Vrai ; F. Faux ; G. Faux ; H. Vrai.

Test final

1. B-D ; 2. A-B ; 3. A-B-C-D ; 4. C-D ; 5. D ; 6. B ;
7. B ; 8. D ; 9. B-C ; 10. A-C-D.

Chapitre 3 Similitudes planes

Test de début

1. B-C ; 2. A-B-C ; 3. B ; 4. A-C ; 5. B-C ; 6. A-C-D ;
7. A-B ; 8. B ; 9. B-C ; 10. A ; 11. A ; 12. C.

3. 1. $M'N' = \sqrt{2}MN$.
2. L'équation $z = (1 + i)z + 4$ admet une solution unique 4i. C'est l'affixe du point A.
3. $\frac{AM'}{AM} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.
4. $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{C'D'}{CD} = \sqrt{2}$ d'après a. Les triangles
BCD et B'C'D' sont donc semblables.

5. 1. Le rapport est égal à $\frac{AK}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et l'angle est égal à $\frac{\pi}{4}$.

2. Le rapport est égal à $\sqrt{2}$ et l'angle est égal à $\frac{\pi}{4}$.

3. Le rapport est égal à $\sqrt{2}$ et l'angle est égal à $\frac{\pi}{4}$.

11. L'angle de la similitude S est $\frac{3\pi}{4}$ et le rapport est $\sqrt{2}$.

14. a. Le centre a pour affixe $\omega = \frac{1 + 2i}{5}$; le rapport k
est égal à 2 et l'angle θ est égal à $\frac{\pi}{2}$.

b. $\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $k = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$;

c. $\omega = 0$, $k = \sqrt{2}$ et $\theta = -\frac{3\pi}{4}$.

15. a. $z' = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)z$.

b. $z' = \left(-\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{6\sqrt{3} + 5}{2} - \frac{3\sqrt{3} - 10}{2}i$.

c. $z' = -\left(\frac{1}{3}\right)z + 4$.

19. a. Les points A et B d'affixes respectives -2 et $-2 + i$ appartiennent à Δ . L'image de Δ par s est une droite Δ' . Δ' est la droite $(A'B')$.

b. Le cercle a pour image par s le cercle de centre $A' = s(A)$ qui a pour affixe $2 - 7i$; son rayon est $3\sqrt{5}$.

21. Pour $s_1 \circ s_2: z' = (-1 + i)z; k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Pour $s_2 \circ s_1: z' = (-1 + i)z + 3 + i; k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Pour $s_1^{-1}: z' = z \frac{(1-i)}{2} + 1 + i; k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Pour $s_2^{-1}: z' = -iz + i - 1; k = 1$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

30. 1. $z' = 2\bar{z}$;

2. $z' = 3\bar{z} - 2 - 6i$;

3. $z' = \bar{z} + 4i$.

31. 1. $z' = i\bar{z}$.

2. $S \circ T$ est la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = y$.

35. Pour $s_1 \circ s_2: z' = 2z - 1 + i; k = 2$.

Pour $s_2 \circ s_1: z' = 2z + 1 - i; k = 2$.

Pour $s_1^{-1}: z' = i\bar{z}; k = 1$.

Pour $s_2^{-1}: z' = \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1-i}{2}; k = \frac{1}{2}$.

37. 1. Le rapport de s est égal à 1.

2. L'ensemble des points fixes de s est la droite Δ d'équation $x - y = 1$.

La similitude s est donc la symétrie axiale par rapport à la droite Δ .

40. La droite Δ d'équation $y = 2$ a pour image la droite Δ' d'équation $x = 7$.

42. Vrai ou faux ?

A. faux B. faux C. faux D. vrai E. vrai
F. faux G. faux H. vrai I. faux J. vrai.

Test final

1. B, C ; 2. A, C-D ; 3. B-D ; 4. C ; 5. C-D ; 6. A-B ;
7. A-C ; 8. B-D ; 9. A-D.

Chapitre 4

Sections planes de surfaces

Test de début

1. C ; 2. C-D ; 3. C-D ; 4. A-C-D ; 5. A-D ; 6. B-C-D ;
7. C-D ; 8. B-D ; 9. C-D.

2. 1. $x^2 + y^2 = 5$.

2. $\mathcal{P}$ coupe $(z'z)$ en $A(0; 0; -1)$. On obtient le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$ tracé dans le plan $\mathcal{P}$.

5. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 3$ dans le repère R . $\mathcal{D}$ coupe le plan (xOy) en $B(-5; 3; 0)$. Le rayon du cylindre est alors OB tel que $OB^2 = 25 + 9 = 34$. $\mathcal{C}$ admet donc pour équation $x^2 + y^2 = 34$.

9. $x = 3 \Rightarrow 1 + 2t = 3 \Rightarrow t = 1$; donc $A(3; 0; 1)$.

Soit $x^2 + z^2 = R^2$ une équation de $\mathcal{C}$.

$A \in \mathcal{C} \Rightarrow 3^2 + 1^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = 10$; d'où une équation de $\mathcal{C}$: $x^2 + z^2 = 10$.

$\mathcal{C}$ recoupe $\mathcal{D}$ en un point B tel que :

$(1 + 2t)^2 + t^2 = 10$, soit $5t^2 + 4t - 9 = 0$.

Les solutions sont $t = 1$ qui correspond à A et $t = -\frac{9}{5}$

qui donne le point $B\left(-\frac{13}{5}; \frac{14}{5}; -\frac{9}{5}\right)$.

14. Puisque $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, l'équation cherchée est $x^2 + y^2 = z^2$.

18. Une équation de $\mathcal{C}$ est du type $y^2 + z^2 = x^2 \tan^2 \alpha$. Les coordonnées $(2; 4; 6)$ vérifient cette équation, donc $4^2 + 6^2 = 2^2 \tan^2 \alpha$; on en déduit $\tan^2 \alpha = 13$; d'où l'équation: $y^2 + z^2 = 13x^2$.

21. 1. Une équation de $\mathcal{C}$ est: $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \frac{\pi}{3}$, d'où $x^2 + y^2 = 3z^2$.

2. Intersection avec le plan d'équation $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3\lambda^2 \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ d'où } 3\lambda^2 = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4$$

donc $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.

29. 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. L'intersection est un cercle de rayon r tel que $r^2 + 2^2 = 3^2$, donc $r = \sqrt{5}$; il est tracé dans ?? et son centre est le point de coordonnées $(2; 0; 0)$.

Test final

1. D ; 2. A-D ; 3. B-C ; 4. A-B ; 5. B-C-D ; 6. A-D ;
7. A-C ; 8. A-D.

Index

A		G-H-I	
Algorithme d'Euclide	44, 54	GAUSS	16, 48
Angle (d'une similitude)	82	Homothétie	76
Angle orienté	82	Isométrie	80
B		L-M-N	
BACHET de MEZIRIAC	46	LAGRANGE	36
BEZOUT	46	Multiple d'un entier	10
Bijection	76, 82	Nombre premier	12
C		P	
Centre de similitude	82	Petit théorème de Fermat	52
Composition de transformations	76	PGCD	42
Cône de révolution	110	Point fixe ou invariant	88
Congruences	18	PONCELET	122
Contraposée	14	PPCM	50
Critère de divisibilité	20	Q-R	
cryptographie	53	Quotient d'une division	12
Cylindre de révolution	108	Rapport de similitude	78, 82
D		Reste d'une division	12
Décomposition en facteurs premiers	16	S	
Déplacement	86	Section plane	108, 110
Diviseur d'un entier	10	Similitude directe	80
Divisibilité	10	Similitude indirecte	80, 86
Division euclidienne	12	Similitude plane	78
E		Surfaces	108, 110, 112
Écriture complexe	82	T	
Ensemble des diviseurs	10	Test de primalité	14
Entier composé	12	Théorème de Bezout	46
Entiers premiers entre eux	44	Théorème de Gauss	48
EUCLIDE	14, 36, 48, 70	Transformation du plan	76
F		Transformation réciproque	76
FERMAT	54, 70	Triangles directement semblables	80
Fonction complexe	82	Triangles semblables	76
Fonction de deux variables	112	W	
Forme réduite d'une similitude	82	WILES	52

Crédits photographiques :

Page 6 : Ph. © Photos12.com/Oasis
 Page 36 : ht d, © Harlingue-Viollet
 Page 36 : m d, Ph. Jeanbor © Archives Larbor
 Page 38 : Ph. © AKG
 Page 70 : Ph. Coll. Archives Larbor
 Page 72 : Ph. © Cosmos
 Page 104 : Ph. © C. Karnow/Cosmos

Recherche iconographique : Laure Bacchetta

Fabrication : Jean-Philippe Dore

Imprimé par MATEU CROMO (Espagne)
 N° d'éditeur : 10127834 Dépôt légal : avril 2006