CHAPITRE

8 Des lois de probabilité

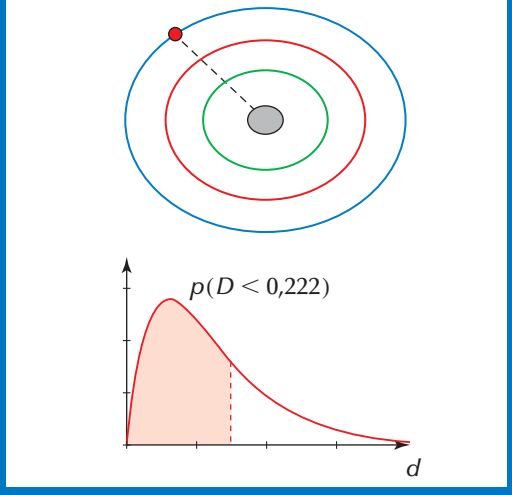


Le calcul des probabilités intervient de plus en plus souvent en physique, en chimie et en biologie dans la science moderne.

Concernant par exemple la position d'un électron autour du noyau de l'atome, on ne peut pas dire *exactement* à quelle distance du noyau se trouve cette particule.

La **mécanique quantique** nous apprend que la variable aléatoire D qui mesure la distance d'un électron au noyau est une *variable continue* car celle-ci peut prendre une infinité de valeurs.

Dans le *modèle de l'atome de Bohr*, la probabilité de trouver un électron à moins de 0,222 nanomètre du noyau est de 0,99.



Les notions étudiées dans ce chapitre

1. Combinaisons
2. Loi de Bernoulli et loi binomiale
3. Lois uniformes
4. Loi de durée de vie sans vieillissement
5. Adéquation de données à une loi uniforme

Avant de commencer,

TESTEZ-VOUS !

A. Savez-vous… dénombrer les parties d'un ensemble ?

Pour les questions 1 à 4, on utilise l'ensemble $A = \{a ; b ; c ; d\}$.

	A	B	C	D
1. Parmi ces ensembles, quels sont ceux qui sont des parties de l'ensemble A ?	$\{a ; b ; c ; d\}$	$\{a ; a ; c ; c\}$	$\{b ; c\}$	$\varnothing$
2. Quel est le nombre des parties de A ayant deux éléments ?	4	6	8	12
3. Quel est le nombre des parties de A ayant trois éléments ?	4	2	5	3
4. Quel est le nombre total des parties de A ?	2^4	16	12	8

B. Savez-vous… calculer une probabilité simple ?

Une urne contient quatre jetons indiscernables au toucher marqués 1 ; 2 ; 3 ; 4. On tire un premier jeton : c'est le chiffre des dizaines d'un nombre N. Sans remettre ce jeton dans l'urne, on tire un second jeton : c'est le chiffre des unités de N. X est le nombre de chiffres pairs qui figurent dans l'écriture de N.

5. Combien peut-on écrire de nombres N ?	4	6	8	12
6. La probabilité $p(X = 0)$ est égale à	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$p(X = 2)$	$p(X = 1)$
7. La probabilité $p(X = 1)$ est égale à	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
8. L'espérance $E(X)$ est égale à	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

C. Savez-vous… utiliser la fonction exponentielle ?

9. $1 - 0{,}99^x > 0{,}9$ équivaut à	$0{,}99^x > 0{,}1$	$0{,}99^x < 0{,}1$	$x > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99}$	$x < \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99}$
10. $e^{-1{,}5x} < 0{,}035$ équivaut à	$-1{,}5x < 0{,}035$	$x > \frac{\ln 0{,}035}{-1{,}5}$	$x < \frac{\ln 0{,}035}{-1{,}5}$	$x > \frac{\ln 0{,}035}{1{,}5}$
11. Soit $f(x) = -2{,}5e^{-2{,}5x+2}$, f est la dérivée de	$x \mapsto -e^{-2{,}5x}$	$x \mapsto e^{-2{,}5x+2}$	$x \mapsto e^{2{,}5x+2} + 10$	$x \mapsto e^{2{,}5x}$

D. Savez-vous… utiliser les paramètres d'une série statistique ?

Les éléments d'une série statistique étant désignés par x_i, on note M la médiane, D_1 le premier décile et D_9 le neuvième décile. Quel est le pourcentage des x_i dans chacun des cas suivants :

12. $x_i < D_1$	90 %	10 %	50 %	25 %
13. $x_i > D_9$	90 %	10 %	50 %	25 %
14. $D_1 < x_i < M$	50 %	40 %	30 %	25 %

Réponses page 410

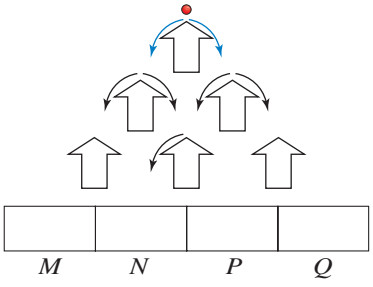
Découvrir

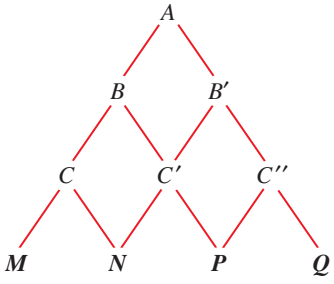
Activité 1 La planche de GALTON

Histoire

Galton, mathématicien anglais 1822-1911.

La bille rouge tombe sur un obstacle représenté par la flèche ⇧ : elle a autant de chances d'aller à droite que d'aller à gauche. Elle rencontre alors un nouvel obstacle, avec les mêmes probabilités de « chute » de part et d'autre, et ainsi de suite jusqu'à l'un des casiers M, N, P et Q qui récupère la bille. On laisse ainsi tomber 64 billes identiques, avec les mêmes règles de chute sur les obstacles successifs : on se demande combien de billes vont aboutir en M, en N, en P et en Q.





1. En utilisant le schéma dans lequel les obstacles sont les points A, B, B', C, C' et C'' calculer la probabilité qu'une bille arrive en B, puis en B'.

2. Calculer la probabilité que la bille arrive en C, puis la probabilité qu'elle arrive en C''.

3. Pour arriver en C', la bille est passée en B ou en B' avec la même probabilité : quelle est la probabilité pour que la bille parvienne en C' ?

4. Déterminer alors les probabilités d'arriver dans chacun des casiers M, N, P et Q pour l'une des 64 billes et faire une conjecture concernant le nombre des billes qui parviennent dans chaque casier.

5. Généraliser avec un, puis deux niveaux de plus.

Activité 2 À la découverte d'une loi continue

1. Dans cette partie, on tire au hasard un jeton dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 0 à 9. On note X la variable aléatoire égale au numéro du jeton tiré.

a. Déterminer la loi de la variable X.

b. Calculer $P(0 \leqslant X < 2)$, puis $P(0 \leqslant X < k)$ avec k entier compris entre 0 et 9.

c. Calculer $P(a \leqslant X < b)$, avec a et b entiers compris entre 0 et 9. Écrire $P(a \leqslant X < b)$ sous la forme d'une somme de probabilités.

2. Dans cette partie, on considère un axe d'origine O et I le point d'abscisse 1 de cet axe. On choisit au hasard un point M du segment $[OI]$. L'abscisse du point M définit une variable aléatoire Y qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0 ; 1]$.



a. Soit A l'événement : « l'abscisse de M est comprise entre 0 et 0,2 » et B l'événement « l'abscisse de M est comprise entre 0,2 et 0,4 ».

Expliquer pourquoi on peut admettre que $P(A) = P(B)$.

En déduire la valeur de $P(A)$, noté aussi $P(0 \leqslant Y \leqslant 0{,}2)$.

b. Soit A_k l'événement : « l'abscisse de M est comprise entre 0 et $\frac{k}{10}$ ». Calculer $P(A_k)$.

c. Soit l'événement « l'abscisse de M est égale à m » avec $m \in [0 ; 1]$. Supposons, comme cela a été vu dans le cas étudié dans la partie 1, que cette probabilité soit constante, égale à un réel q, avec $0 < q \leqslant 1$.

• Soit n un naturel non nul : calculer la probabilité de l'événement $B = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$.

• Montrer qu'on peut trouver n tel que $P(B) > 1$.

• En déduire que $q = 0$. Comparer avec le résultat trouvé dans la première partie.

d. Calculer alors $P(0 \leqslant Y < 0{,}2)$, puis $P\left(0 \leqslant Y < \frac{k}{10}\right)$.

e. Calculer $P(a \leqslant Y < b)$, où a et b sont des réels de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Activité 3 Durée de vie et vieillissement

A. On considère 1 000 composants électroniques d'un même type. À l'occasion d'une étude expérimentale, on constate que, chaque année, 10 % des composants en fonctionnement tombent en panne : ils ne sont pas réparés. En fin de l'année n° 1, il en reste donc 900.

1. a. Combien tombent en panne au cours de l'année 2 ? Et au cours de l'année 3 ?

b. Dresser un tableau indiquant le nombre de pannes chaque année et le nombre de composants en fonctionnement à la fin de chaque année pour les années 1 à 6 (arrondir à l'unité la plus proche).

c. On désigne par u_n le nombre de composants encore en fonctionnement à la fin de l'année n : on a $u_0 = 1\,000$. Écrire u_n en fonction de n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2. Soit T la variable aléatoire donnant la durée de vie d'un composant électronique de ce type.

a. À l'aide de la question **1. b**, dresser un tableau donnant les valeurs de $P(T \geqslant n)$ pour n entier compris entre 0 et 6.

b. Donner l'expression de $P(T \geqslant n)$, puis calculer $\frac{P(T \geqslant n+1)}{P(T \geqslant n)}$.

c. En déduire la probabilité qu'un composant soit encore en fonctionnement à la fin de l'année $n+1$, sachant qu'il fonctionne à la fin de l'année n.

d. Calculer de même la probabilité qu'un composant soit encore en fonctionnement à la fin de l'année $n+2$, sachant qu'il fonctionne à la fin de l'année n.

e. Ces probabilités dépendent-elles de l'âge du composant ?

B. Dans une entreprise de fabrication d'ampoules, on veut étudier expérimentalement la durée de vie de ces ampoules : on a installé 1 000 ampoules d'un même type.

Chaque semaine, 100 ampoules tombent en panne et on ne les remplace pas.

3. Dresser un tableau de valeurs indiquant chaque semaine le nombre d'ampoules qui restent en fonctionnement en fin de semaine (de une à 6 semaines).

4. Soit T' la variable aléatoire donnant la durée de vie d'une ampoule de ce type.

a. Calculer $P_{T' \geqslant 1}(T' \geqslant 2)$, puis $P_{T' \geqslant 2}(T' \geqslant 3)$, et $P_{T' \geqslant 3}(T' \geqslant 4)$. Comparer avec les résultats trouvés en **A. 2. c**.

b. Calculer $P_{T' \geqslant 1}(T' \geqslant 3)$, puis $P_{T' \geqslant 2}(T' \geqslant 4)$ et $P_{T' \geqslant 3}(T' \geqslant 5)$. Comparer avec les résultats trouvés en **A. 2. d**.

le Cours

1. Combinaisons et parties d'un ensemble fini

A Propriétés préliminaires

1. Étant donné p objets, le nombre de façons de les ranger de toutes les manières possibles est :

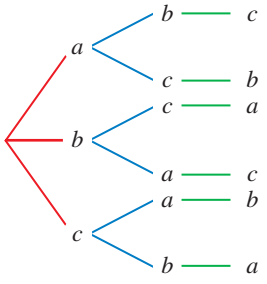
$$p(p-1)\times(p-2)\times\ldots\times 2\times 1.$$

C'est le produit de **tous les entiers naturels** de 1 à p.

Il est noté $p!$, qui se lit « p factorielle ».

Vocabulaire

$p!$ se lit aussi : « factorielle p ».
Par convention : $0! = 1$ et $1! = 1$.



Exemple : Prenons les lettres a, b et c. Il y a six façons de ranger ces trois lettres de toutes les manières possibles, car $3\times 2\times 1 = 6$ et on a de plus $3! = 6$.

2. Étant donné n objets, le nombre de façons de ranger p de ces objets ($p \leqslant n$) de toutes les manières possibles est $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(p-1))$.

Ce nombre s'écrit aussi : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple : Prenons les lettres a, b, c et d. Le nombre de façons de ranger **deux** de ces **4 lettres** de toutes les manières possibles est 4×3, soit 12.

B Combinaisons

Soit F un ensemble fini de cardinal n et p un naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Vocabulaire

Deux combinaisons à p éléments ne diffèrent que par leurs éléments, mais non par l'ordre de ces éléments.

Définitions

Une combinaison de p éléments choisis parmi n est une partie contenant p éléments pris parmi les n éléments de F.
Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n se note :

$$\binom{n}{p} \text{ ou } C_n^p \text{ qui se lit « } p \text{ parmi } n \text{ ».}$$

Propriété

Pour tout entier naturel n et tout entier p avec $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{p} = \frac{\text{produit de } p \text{ entiers consécutifs décroissants à partir de } n}{\text{produit de tous les entiers de 1 à } p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstrations

Si l'on ordonne p éléments choisis dans F de toutes les façons possibles, le nombre de ces rangements est :

$$L = n\times(n-1)\times(n-2)\ \ldots\ (n-(p-1)).$$

Or, une combinaison de ces p objets, partie non ordonnée de F, conduit à $p!$ rangements différents.

Pour obtenir le nombre des combinaisons, il faut donc diviser L par $p!$.

Soit $\binom{n}{p} = \dfrac{L}{p!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times p}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit :

$(n-p)\times(n-p-1)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$, c'est-à-dire par $(n-p)!$,

on obtient au numérateur le produit de tous les entiers de 1 à n, noté $n!$, et au dénominateur, le produit de $p!$ par $(n-p)!$.

D'où la seconde formule.

Technique

Toute calculatrice permet d'obtenir ces coefficients.

Pour obtenir $\binom{10}{3}$:

- sur TI, taper : 10 puis : Math-PRB-nCr3
- sur CASIO, taper : OPTN-PROB-10nCr3

Utiliser des factorielles

Énoncé

On considère les neuf chiffres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.

a. Avec ces chiffres, combien peut-on former de nombres de neuf chiffres tous différents ?

b. Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres commençant par un nombre impair ?

Méthode

Pour résoudre de tels problèmes, on peut imaginer un arbre.

Solution

a. Le nombre de façons de ranger ces neuf chiffres est 9!, soit 362 880.

b. Il y a cinq façons de choisir le premier chiffre. Le nombre de façons de ranger les deux autres chiffres pris parmi les 8 chiffres qui restent est 8×7.

Donc, il y a $5 \times 8 \times 7$, soit 280 nombres demandés.

Utiliser les coefficients $\binom{n}{p}$

Énoncé 1

a. Un damier contient 16 cases. Combien y a-t-il de façons de placer 3 jetons sur ces cases à raison d'un seul jeton par case ?

b. On marque 16 points dans un plan de telle sorte que trois quelconques ne soient pas alignés : combien peut-on former de triangles ayant leurs sommets parmi ces points ?

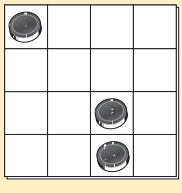
Méthode

Dans les deux cas, on se ramène au dénombrement des parties à 3 éléments dans un ensemble de 16 éléments.

Solution

a. Choisir trois cases parmi 16 revient à choisir une partie à trois éléments dans un ensemble qui en comporte 16.

Le nombre de ces choix est $\binom{16}{3}$, soit $\dfrac{16 \times 15 \times 14}{1 \times 2 \times 3}$, qui est égal à 560.



b. On utilise le même modèle de dénombrement que dans la première question. On peut donc tracer 560 triangles différents.

Énoncé 2

Une urne contient 10 boules blanches et 15 rouges.
On choisit simultanément quatre boules de l'urne.

a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien de tirages comportent deux blanches et deux rouges ?

Méthode

Lorsque le nombre p est petit, éviter d'utiliser la formule qui contient des factorielles.

Solution

a. Le nombre de ces choix est $\binom{25}{4}$, soit $\dfrac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 12\,560$: c'est le nombre de parties à 4 éléments dans un ensemble de 25 éléments.

b. On choisit 2 blanches parmi 10 : il y a $\binom{10}{2}$ choix, soit 45.

On choisit 2 rouges parmi 15 : le nombre de ces choix est $\binom{15}{2}$, soit 105.

À chacun des 45 choix de boules blanches, on peut associer l'un des 105 choix de boules rouges : le nombre total de choix est 45×105, soit 4 725.

Propriétés

n et p sont des entiers positifs avec $p \leqslant n - 1$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \ (n \geqslant 1)$.

4. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

Avec la notation C_n^p, ces formules s'écrivent :

1. $C_n^0 = C_n^n$.

2. $C_n^p = C_n^{n-p}$.

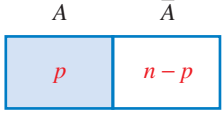
3. $C_n^1 = C_n^{n-1}$.

4. $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Démonstrations

Prop. 1. L'ensemble F ne comporte qu'une partie « vide » et une seule partie ayant n éléments, l'ensemble F lui-même, donc : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Prop. 2. Si une partie A de F possède p éléments, la partie complémentaire de A, c'est-à-dire la partie contenant les éléments de F non éléments de A, en possède $n - p$: il y a donc autant de parties à p éléments que de parties à $n - p$ éléments.



Prop. 3. Il y a n parties ayant 1 élément et il y a aussi n parties à $n - 1$ éléments.

Prop. 4. F est un ensemble de n éléments, a est l'un d'eux ; F contient donc $n - 1$ éléments autres que a. Soit A une partie de F ayant p éléments.
Deux cas peuvent se produire : soit $a \in A$, soit $a \notin A$.
Si $a \in A$, les $p - 1$ autres éléments de A sont choisis parmi $n - 1$ éléments de F.
Si $a \notin A$, les p éléments de A sont choisis parmi $n - 1$ éléments de F, d'où la formule 4.

Cette formule 4 peut aussi se démontrer algébriquement ; on transforme la somme :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}.$$

La réduction au même dénominateur des deux fractions conduit à :

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ c'est-à-dire } \binom{n}{p}.$$

Exemple :

- Pour calculer $\binom{8}{5}$, il est plus facile de calculer $\binom{8}{3}$.
- Pour calculer $\binom{8}{7}$, il est plus facile de calculer $\binom{8}{1}$.
- Se souvenir que $\binom{8}{3}$ est égal à $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$ d'après **4.**

Histoire

Ce triangle, dit « de Pascal », était connu des mathématiciens chinois bien avant Pascal.

Le triangle de Pascal permet de retrouver les premiers nombres $\binom{n}{p}$.

La ligne 2 contient $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$.

En appliquant **4**, on obtient de proche en proche les nombres sur les lignes suivantes.

D'après la propriété **4**, on a :

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1},$$

on obtient le 6 de la ligne 4 en ajoutant deux nombres de la ligne 3 et ainsi de suite de proche en proche.

$p \rightarrow$	0	1	2	3	4
$n = 0$	1				
$n = 1$	1	1			
$n = 2$	1	2	1		
$n = 3$	1	3 + 3		1	
$n = 4$	1	4	6	4	1

Calculer des nombres $\binom{n}{p}$

Énoncé 1

1. Calculer tous les nombres $a_p = \binom{8}{p}$, p prenant les valeurs entières de 0 à 8.

2. Vérifier que la somme de ces 9 entiers est égale à 2^8.

3. En déduire les nombres $b_p = \binom{9}{p}$, p variant de 0 à 9 et calculer leur somme.

Solution

a. D'après la formule 1, on sait déjà que $a_0 = a_8 = 1$.

De même, d'après la formule 3, on sait que $a_1 = a_7 = 8$.

On a :

$$a_2 = \binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{1\times 2} = 28 ; \quad a_3 = \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56 \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3\times 4} = 70.$$

Méthode

Penser qu'un seul calcul donne à la fois $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{n-p}$.

On sait par ailleurs, d'après la formule 2 que $a_6 = a_2 = 28$ et $a_5 = a_3 = 56$.

Voici la suite de ces nombres :

$$1 ; \quad 8 ; \quad 28 ; \quad 56 ; \quad 70 ; \quad 56 ; \quad 28 ; \quad 8 ; \quad 1.$$

b. La somme des neuf nombres précédents vaut 256, soit 2^8.

c. De même, on a $b_0 = 1 = b_9$ et $b_1 = b_8 = 9$.

D'après la propriété 4 : $b_2 = a_2 + a_1 = 28 + 8 = 36$ et $b_7 = b_2 = 36$.

$b_3 = a_3 + a_2 = 28 + 56 = 84$ et $b_6 = 84$ $b_4 = b_5 = 56 + 70 = 126$.

Calculons leur somme :

$$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9.$$

Énoncé 2

1. Une urne contient 8 boules : 4 rouges et 4 blanches. On tire simultanément 4 boules. Combien de tirages contiennent i boules rouges, i variant de 0 à 4 ?

2. En déduire la relation $\binom{8}{4} = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}^2$.

3. Généraliser si l'on tire n boules d'une urne contenant $2n$ boules, dont n rouges et n blanches.

Solution

a. Voici un tableau donnant les nombres de tirages demandés :

0R et 4B	1R et 3B	2R et 2B	3R et 1B	4R et 0B
$\binom{4}{0}\binom{4}{4} = \binom{4}{0}^2$	$\binom{4}{1}\binom{4}{3} = \binom{4}{1}^2$	$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = \binom{4}{2}^2$	$\binom{4}{3}\binom{4}{1} = \binom{4}{3}^2$	$\binom{4}{4}\binom{4}{0} = \binom{4}{4}^2$

Méthode

Lorsque l'on tire 4 boules, on a soit 0R, soit 1R, soit 2R, soit 3R, soit 4R, les autres étant blanches.

b. Le nombre total de ces tirages n'est autre que $\binom{8}{4}$, d'où l'égalité demandée.

c. On tire n boules sans remise : le nombre total de ces tirages est $\binom{2n}{n}$.

Chacun de ces tirages contient k rouges et $n-k$ blanches, k variant de 0 à n.

Le nombre de tirages (k rouges et $n-k$ blanches) est $\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k}$ ou $\binom{n}{k}^2$, d'où la relation qui généralise le résultat du **a** :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

2. Formule du binôme de Newton

Technique

Cette formule s'applique pour tout naturel n non nul, a et b étant des réels ou des complexes.
En particulier,
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Propriétés

Le nombre $\binom{n}{k}$ est le coefficient du produit $a^{n-k}b^k$ dans le développement de $(a+b)^n$, appelé binôme de Newton. Pour tout naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n,$$

c'est-à-dire : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$.

Démonstration

Utilisons un raisonnement par récurrence. La formule est vérifiée pour $n = 1$.
Supposons la formule vraie pour $(a+b)^{n-1}$; écrivons ce développement.

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^{n-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^{k-1} + \binom{n-1}{k}a^{n-k-1}b^k + \cdots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}.$$

Pour obtenir $(a+b)^n$, il suffit de multiplier $(a+b)^{n-1}$ par $a+b$.
Dans $(a+b)^n$, le terme $a^{n-k}b^k$ s'obtient alors de deux façons :

soit en multipliant $\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^{k-1}$ par b,

soit en multipliant $\binom{n-1}{k}a^{n-k-1}b^k$ par a,

Or, d'après la formule 4 de la page 232, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Ainsi le coefficient de $a^{n-k}b^k$ est bien $\binom{n}{k}$ au rang n : la propriété est héréditaire. Comme elle est vraie au rang $n = 1$, elle est vraie pour tout n.

Remarque : le développement de $(a-b)^n$ s'obtient en remplaçant b par $-b$ dans le développement de $(a+b)^n$.

3. Loi de Bernoulli

Histoire

Jacques Bernoulli (1654-1705) est resté célèbre en particulier pour ses travaux en probabilité et leurs applications à l'économie et aux questions « sociales ».

Soit E une expérience aléatoire présentant deux issues : l'une S, que l'on appelle « succès » de probabilité p et l'autre $\overline{S}$, appelé « échec » de probabilité q, avec $q = 1 - p$.

Définitions

La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée **variable de Bernoulli**.

X	0	1
Probabilité	$1-p$	p

La loi de probabilité de cette variable X est appelée **loi de Bernoulli**.

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

Propriété

$E(X) = p$.
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$.
$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Utiliser la formule du binôme de Newton

Énoncé 1

1. Donner le développement de chacun des binômes suivants, a, b et x étant des réels quelconques :

$$(a+b)^8 ; \quad (a-b)^8 ; \quad (x+1)^8 ; \quad (x-1)^8.$$

2. Développer $(1+\mathrm{i})^8$, i étant le nombre complexe de carré -1.

Solution

a. Dans le premier développement, les coefficients de $a^{8-k}b^k$ sont les nombres calculés dans l'énoncé 1 de la page 233 ; on obtient :

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Méthode
Attention aux puissances d'exposant impair des nombres négatifs.

Il suffit de remplacer b par $(-b)$ pour obtenir $(a-b)^8$.

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8.$$

Pour obtenir $(x+1)^8$ ou $(x-1)^8$, on remplace a par x et b par 1 dans $(a+b)^8$ et dans $(a-b)^8$:

$$(x+1)^8 = x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1.$$

$$(x-1)^8 = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1.$$

b. Reprenons le développement de $(a+b)^8$ et remplaçons a par 1 et b par i, en remarquant que :

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^6 = -1 ; \quad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^7 = -\mathrm{i} ; \quad \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^8 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}.$$

On obtient $(1+\mathrm{i})^8 = 1 + 8\mathrm{i} - 28 - 56\mathrm{i} + 70 + 56\mathrm{i} - 28 - 8\mathrm{i} + 1 = 16$.

On aurait pu trouver ce résultat plus rapidement en remarquant que :

$$(1+\mathrm{i})^8 = ((1+\mathrm{i})^2)^4 \text{ et que } (1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}.$$

Énoncé 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$ (n naturel non nul).

1. Écrire le développement de $f(x)$ et en déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. En utilisant la dérivée de f, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ en fonction de n.

Solution

a. $f(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$

En remplaçant x par 1, on obtient immédiatement $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Méthode
On dérive chacune des deux formes de f.

Ainsi 2^n est le nombre de toutes les parties d'un ensemble fini de n éléments.

b. La dérivée de f s'écrit de deux façons possibles, soit :

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + k\binom{n}{k}x^{k-1} + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

En posant $x = 1$, on obtient :

$$n \times 2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + k\binom{n}{k} + \cdots + n\binom{n}{n}.$$

Au second membre, on reconnaît la somme S, d'où :

$$S = n \times 2^{n-1}.$$

le Cours

4. Loi binomiale

Vocabulaire

On appelle aussi parfois schéma de Bernoulli une telle répétition d'épreuves identiques et indépendantes.

Définitions

On répète n fois et de **manière indépendante** une même expérience qui présente deux issues, S et $\overline{S}$, de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.
La loi de probabilité de la variable X égale au nombre des succès au cours de ces n expériences s'appelle **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple : On lance un dé normal dix fois de suite et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on obtient un multiple de 3. La variable X prend les valeurs entières de 0 à 10.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

Technique

Programmer le calcul de :
$P(X = k)$
sur une calculatrice.

Propriété

Pour tout entier k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

Démonstration

L'événement $(X = k)$ est réalisé si l'on obtient k succès et $(n - k)$ échecs.
En raison de l'indépendance de ces expériences, la probabilité d'obtenir k succès est p^k, celle d'obtenir $n - k$ échecs est q^{n-k} et ceci quel que soit l'ordre d'arrivée des succès.
Donc la probabilité d'obtenir k succès et $n - k$ échecs dans un ordre donné est le produit $p^k \times q^{n-k}$.
Le nombre de manières d'obtenir k succès au cours de n expériences est égal au nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi n : ce nombre est $\binom{n}{k}$.

S S S E E E E
S E S E S E E
S S E E E E S
……

D'où la formule donnée pour $P(X = k)$.
Par contre, dans le cas d'un tirage sans remise, la probabilité du « succès » n'est pas la même d'un tirage à l'autre. Il ne s'agit pas d'une loi binomiale (voir une exception à l'exercice 26).

Exemple : Dans le cas du lancer de dé cité en exemple, on utilise la loi $\mathcal{B}\left(10 ; \frac{1}{3}\right)$.

On a par exemple : $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{210 \times 64}{3^{10}} \approx 0{,}2276$.

Propriétés admises

$E(X) = np$; $V(X) = np(1 - p) = npq$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Si on lance 60 fois un dé, on peut s'attendre à obtenir 10 fois un « 6 » en moyenne : c'est l'espérance de la loi binomiale avec $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$.

Si on lance 100 fois une pièce, on peut s'attendre à obtenir 50 « pile » en moyenne : c'est l'espérance de la loi binomiale avec $n = 100$ et $p = \frac{1}{2}$.

Conditions d'application d'une loi binomiale

Chaque expérience prise isolément ne présente que deux issues : « succès » et « échec ».
Le « succès » a toujours la même probabilité pour chaque expérience.
Il y a indépendance entre chacune des expériences successives.
C'est le cas par exemple d'un tirage **avec remise** dans une urne, que l'on nomme parfois tirage non exhaustif.
Remarque : en développant $(p + q)^n$, on retrouve les probabilités de $(X = k)$, d'où l'appellation de loi « binomiale ».

Étudier une loi binomiale

Énoncé 1

Une étude statistique portant sur plusieurs années a montré que, dans une certaine population, la fréquence de naissance d'une fille est 0,45. On suppose que le sexe d'un enfant à la naissance ne dépend pas du sexe de l'enfant précédent. On s'intéresse au nombre des filles dans les familles de 5 enfants.

1. Étudier la loi de probabilité de la variable X égale au nombre des filles dans ces familles. Dresser un tableau de valeurs pour cette loi et une représentation graphique.
Quelle est la valeur de X la plus probable dans ces familles ?

2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Méthode

Pour justifier l'utilisation d'une loi binomiale, vérifier que les expériences successives sont identiques et indépendantes.

Solution

a. Une naissance présente deux issues possibles : la naissance d'une fille est considérée ici comme un succès.

Les naissances successives étant indépendantes, la loi de la variable X est la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}45$.

La probabilité 0,45 appliquée ici est la fréquence donnée par les statistiques.

X peut prendre les valeurs :

$$0\ ;\quad 1\ ;\quad 2\ ;\quad 3\ ;\quad 4\quad \text{et}\quad 5.$$

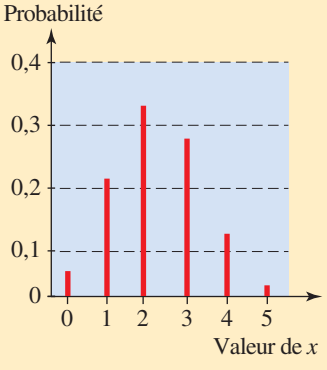
$$P(X = k) = \binom{5}{k}(0{,}45)^k(0{,}55)^{5-k}.$$

Voici le tableau des valeurs de P pour cette loi ainsi qu'une représentation graphique.

Méthode

Pour le calcul de $P(X = k)$, il est utile de programmer une calculatrice.

X	0	1	2	3	4	5
p_i	0,050	0,206	0,337	0,276	0,113	0,018



La valeur la plus probable est $X = 2$.

On vérifie que la somme des probabilités est 1.

b. $E(X) = np = 2{,}25$ et $V(X) = np(1-p) = 1{,}2375$, d'où $\sigma(X) \approx 1{,}112$.

Énoncé 2

Au jeu du Loto, on choisit 6 nombres parmi les nombres entiers de 1 à 49.

1. Quelle est la probabilité de choisir les six bons numéros ?

2. Une personne joue chaque semaine pendant 10 ans : quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

Solution

a. Le nombre des choix possibles de 6 nombres parmi 49 est :

$$A = \binom{49}{6},\ \text{soit}\ \frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{1\times2\times3\times4\times5\times6} = 13\,983\,816.$$

Une seule combinaison étant « favorable », la probabilité de gagner est $\frac{1}{A}$, soit environ $p = 7{,}2\times10^{-8}$.

b. L'expérience est répétée 521 fois et les expériences sont indépendantes.

Si Y désigne le nombre des « succès » au cours de ces 521 essais, la loi de Y est la loi binomiale de paramètres $n = 521$ et $p = 7{,}2\times10^{-8}$.

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{521},$$

soit environ $3{,}7\times10^{-5}$.

le Cours

5. Lois uniformes

Définition 1

On appelle loi uniforme discrète, ou encore loi équirépartie, toute loi d'une variable aléatoire X qui peut prendre n valeurs, x_1, x_2, ..., x_n, de telle sorte que la probabilité soit la même pour chacune de ces n valeurs :

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \cdots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}.$$

Vocabulaire

La fonction f telle que $f(x) = 1$ est appelée **fonction densité** de probabilité de la loi continue uniforme sur [0 ; 1].

Définition 2

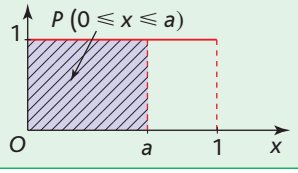
Si la variable X peut prendre toute valeur de l'intervalle [0 ; 1], on dit que cette variable est une variable **aléatoire continue** sur cet intervalle.
Si de plus, la probabilité de l'événement $(a \leqslant X \leqslant b)$ avec a et b compris entre 0 et 1, est égale à la différence $b - a$, alors la loi de cette variable est la **loi uniforme continue sur [0 ; 1]**.
On a donc $P(a \leqslant X \leqslant b) = b - a$ ou encore $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b 1\,dx$.

Vocabulaire

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée fonction de répartition de X.

Propriétés

Pour tout réel a de l'intervalle [0 ; 1] :
a. $P(X = a) = 0$ (admise) ;
b. $P(0 \leqslant X \leqslant a) = a$.
C'est l'aire du rectangle de côtés a et 1.



Exemple : Un autobus passe toutes les heures à un arrêt donné. Une personne, ne connaissant pas les horaires de passage, se présente à l'arrêt : son temps d'attente est une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur [0 ; 1].
La probabilité qu'elle attende exactement 15 minutes est égale à 0.
On peut calculer la probabilité qu'elle attende moins de 15 minutes :

$$P(0 \leqslant T < 0{,}25) = 0{,}25.$$

6. Loi de durée de vie sans vieillissement

On a vu dans le chapitre consacré à la fonction exponentielle que, si on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs et si $N(t)$ représente le nombre de ces noyaux présents à l'instant t, la fonction N est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$, où λ est un réel positif caractéristique du noyau étudié.
On obtient ainsi : $N(t) = N(0) \times e^{\lambda t}$, $N(0)$ étant le nombre de noyaux au départ.
Si on note T la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un noyau, on peut estimer que la probabilité pour un noyau d'être encore en vie à l'instant t est égale au rapport du nombre de noyaux restant par le nombre de noyaux initiaux :

soit $$P(T \geqslant t) = \frac{N(t)}{N(0)} = e^{\lambda t}.$$

Soit A l'événement : « le noyau n'est pas désintégré à l'instant $t + h$ »(avec $h \geqslant 0$) et B l'événement : « le noyau n'est pas désintégré à l'instant t ».

Alors : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{P(T \geqslant t + h)}{P(T \geqslant t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \dfrac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}$.

On remarque que la probabilité pour un noyau d'être encore « en vie » à l'instant $t + h$ sachant qu'il est « en vie » à l'instant t ne dépend pas de t ; les noyaux « ne s'usent pas », ils ne « vieillissent pas » : à tout âge t, ils ont la même probabilité de vivre encore h années.
La variable aléatoire T est une variable continue qui prend ses valeurs sur $[0 ; +\infty[$: on dit que T suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

Étudier une loi uniforme discrète

Énoncé

1. Une variable aléatoire X prend les valeurs 0 ; 0,1 ; 0,2 jusqu'à 0,9 avec équiprobabilité. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Mêmes questions pour la variable Y qui prend les valeurs décimales depuis 0 ; 0,01 ; 0,02 ; ... jusqu'à 0,99 avec équiprobabilité.

Méthode

Interpréter correctement l'équiprobabilité.

Solution

a. Chacun des dix événements $(X = a)$ a la même probabilité 0,10. D'où :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{9} \frac{k}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2} \sum_{0}^{9} k = \frac{1}{100} \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9).$$

Soit $E(X) = 0{,}45$. De même :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{9} \left(\frac{k}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} - (E(X))^2 = \frac{1}{10^3} \sum_{0}^{9} k^2 - (0{,}45)^2.$$

On obtient $V(X) = 0{,}285 - 0{,}45^2 = 0{,}0825$.

b. Pour la variable Y, les valeurs prises sont les cent décimaux :

0 ; 0,01 ; 0,02 ; … ; 0,99, avec la même probabilité $\frac{1}{100}$.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{99} \frac{k}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10^4} \sum_{0}^{99} k = 0{,}495.$$

$$V(Y) = \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{k}{100}\right)^2 \times \frac{1}{100} - (E(X))^2 = \frac{1}{10^6} \sum_{0}^{99} k^2 - (0{,}495)^2.$$

On obtient $V(Y) = 0{,}32835 - (0{,}495)^2 = 0{,}083325$.

Étudier une loi uniforme continue

Énoncé

La variable X est la variable continue uniforme sur [0 ; 1].

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$A : (X = 0{,}5)$; $B : (0{,}1 < X < 0{,}3)$; $C : (0{,}2 < X < 0{,}99)$.

2. Calculer $P_C(B)$ et $P_B(C)$.

Solution

a. Pour une variable continue, l'événement $(X = 0{,}5)$ a une probabilité nulle.

$P(A) = 0$.

$P(B) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$.

$P(C) = 0{,}99 - 0{,}2 = 0{,}79$.

b. Puisque $P(C)$ est non nulle,

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(0{,}2 < X < 0{,}3)}{P(C)},$$

soit $P_C(B) = \frac{0{,}1}{0{,}79} = \frac{10}{79} \approx 0{,}127$.

De même, $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(0{,}2 < X < 0{,}3)}{P(B)} = \frac{10}{20} = 0{,}5$.

Méthode

Pour une probabilité conditionnelle, on utilise la définition vue au chapitre 7.

Définition

Soit T une variable aléatoire continue mesurant la durée de vie d'un individu. On dit que T suit **une loi de durée de vie sans vieillissement** si la probabilité que l'individu soit en vie à l'instant $t+h$ (avec $h \geqslant 0$), sachant qu'il est en vie à l'instant t, ne dépend pas de t.

Propriété

Si T est une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement, alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Démonstration

Soit A l'événement : $T \geqslant t+h$ et B l'événement $T \geqslant t$; donc $\boldsymbol{A \cap B = A}$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}.$$

Puisque T suit une loi de durée de vie sans vieillissement : $P_B(A)$ est indépendant de t, donc, avec $t = 0$, on a : $P_B(A) = \dfrac{P(T \geqslant h)}{P(T \geqslant 0)} = P(T \geqslant h)$, puisque $P(T \geqslant 0) = 1$.

On en déduit : $P(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant t) \times P(T \geqslant h)$.

Notons f la fonction de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(t) = P(T \geqslant t)$.

Ainsi, quels que soient t et h positifs : $f(t+h) = f(t) \times f(h)$.

En supposant f dérivable sur $[0\,;+\infty[$, on dérive les deux membres de cette égalité par rapport à t : $f'(t+h) = f(h) \times f'(t)$.

Pour $t = 0$, on obtient : $f'(h) = f'(0) \times f(h)$.

$f'(0)$ est un réel négatif car la fonction f est décroissante ; notons : $f'(0) = -\lambda$, où λ est un réel positif.

On a : $f'(h) = -\lambda f(h)$, d'où $f(h) = C\mathrm{e}^{-\lambda h}$, avec C réel.

Puisque $f(0) = 1$, on trouve $C = 1$, et $P(T \geqslant h) = \mathrm{e}^{-\lambda h}$.

On en déduit : $P(T \leqslant h) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}$.

Vocabulaire

La fonction F définie sur $[0\,;+1[$ par : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est **la fonction de répartition** de cette variable aléatoire.

Définition

Soit λ un réel strictement positif. La **loi exponentielle de paramètre λ** est la loi suivie par la variable aléatoire continue T telle que $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Propriétés

Si la variable T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors :

1. $P(T \leqslant c) = \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$. **2.** $P(a \leqslant T \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

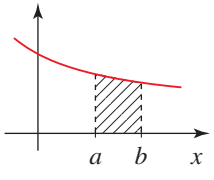
On dit que la fonction g telle que $g(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est la fonction **densité de probabilité** de la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstrations

1) $\displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^c = -(\mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda c} = P\ (T \leqslant c)$.

2) Les événements $\{a \leqslant T \leqslant b\}$ et $\{T \leqslant a\}$ sont incompatibles et leur réunion est l'événement $\{T \leqslant b\}$, d'où :

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = P(T \leqslant b) - P(T \leqslant a) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x - \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x.$$



Utiliser la loi exponentielle

Énoncé 1

La durée de vie (exprimée en heures) d'un certain type d'ampoules électriques est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,002.

a. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une ampoule du même type ait une défaillance avant 500 heures.

b. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une ampoule du même type n'ait pas de défaillance avant 100 heures.

c. Calculer la probabilité pour qu'une ampoule de ce type fonctionne encore au bout de 600 heures sachant qu'elle fonctionne au bout de 500 heures. Que remarque-t-on ?

Solution

Méthode

L'intersection de l'événement $(T \geqslant a)$ et de l'événement $(T \geqslant a + h)$ est l'événement $(T \geqslant a + h)$.

a. On cherche ici la probabilité pour que la durée de vie de l'ampoule soit inférieure à 500 heures : $P(T < 500) = 1 - e^{-500 \times 0{,}002} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

b. On cherche la probabilité pour que la durée de vie de l'ampoule soit supérieure ou égale à 100 heures, soit :

$$P(T \geqslant 100) = 1 - P(T < 100) = 1 - (1 - e^{-100 \times 0{,}002}) = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819.$$

c. On cherche ici : $P_{T \geqslant 500}(T \geqslant 600) = \dfrac{P(T \geqslant 600)}{P(T \geqslant 500)} = \dfrac{e^{-600 \times 0{,}002}}{e^{-500 \times 0{,}002}} = \dfrac{e^{-1{,}2}}{e^{-1}}$,

soit $P_{T \geqslant 500}(T \geqslant 600) = e^{-0{,}2}$.

On remarque que le résultat est le même que celui trouvé en b : ceci provient du caractère « sans vieillissement » de la loi exponentielle.

Énoncé 2

La variable aléatoire X égale à la durée de vie d'un atome d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle. On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 2 jours est, à 10^{-3} près, égale à 0,160.

a. Calculer, à 10^{-3} près, le paramètre de cette loi exponentielle.

b. Calculer les probabilités des événements $(X = 7)$ et $(6 < X < 10)$.

c. La demi-vie d'un nuclide est le temps T au bout duquel la moitié des atomes initiaux sont désintégrés. Calculer, à 0,1 près, la demi-vie de l'iode 131.

d. Justifier par un calcul la loi de désintégration radioactive : « la probabilité pour qu'un atome radioactif se transforme durant un intervalle de temps Δt (petit) est approximativement $\lambda \Delta t$ ». (On utilisera le fait que $e^u - 1 \approx u$ pour u voisin de 0).

Solution

Méthode

Pour une loi continue : $P(X = a) = 0$ pour tout réel a.

a. On résout l'équation : $P(X < 2) = 0{,}160$, soit : $1 - e^{-2\lambda} = 0{,}160$, d'où l'on déduit : $e^{-2\lambda} = 0{,}840$ et $-2\lambda = \ln 0{,}840$, soit $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}840}{2} \approx 0{,}087$.

b. $P(X = 7) = 0$, car X suit une loi continue. On a : $F(t) = P(X \leqslant t) = 1 - e^{-0{,}087t}$.

D'où : $P(6 < X < 10) = F(10) - F(6) \approx 0{,}174$.

c. On résout l'équation : $P(X < T) = 0{,}5$, soit : $1 - e^{-0{,}087T} = 0{,}5$, d'où l'on déduit : $e^{-0{,}087T} = 0{,}5$ et $-0{,}087T = -\ln 2$, soit $T = \dfrac{\ln 2}{0{,}087} \approx 8$.

La demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours environ.

d. On cherche : $P_{X \geqslant t}(X \leqslant t + \Delta t) = \dfrac{P(t \leqslant X \leqslant t + \Delta t)}{P(X \geqslant t)} = \dfrac{F(t + \Delta t) - F(t)}{e^{-\lambda t}}$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda(t + \Delta t)} - (1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} e^{-\lambda \Delta t}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda \Delta t}.$$

Puisque $e^{-\lambda \Delta t} - 1 \approx -\lambda \Delta t$ pour Δt petit, on en déduit que la probabilité cherchée est approximativement égale à $\lambda \Delta t$.

7. Adéquation de données à une loi équirépartie

Un joueur veut vérifier si le dé qu'il possède est « normal », c'est-à-dire bien équilibré. On sait que, dans ce cas-là, la loi de probabilité associée est la loi uniforme :

$$P\{1\} = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{6}.$$

Pour cela, le joueur lance 200 fois le dé et note les résultats obtenus :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	31	38	40	32	28	31
f_i	0,155	0,190	0,200	0,160	0,140	0,155

Pour savoir si la distribution de fréquences obtenue est « proche » de la loi uniforme, on calcule la quantité suivante, qui prend en compte l'écart existant entre chaque fréquence trouvée et la probabilité théorique attendue :

$$d^2 = \left(0{,}155 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}190 - \frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(0{,}155 - \frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}00268.$$

Notation

On note cette quantité d^2, car son calcul est celui du carré d'une distance.

Mais rien ne permet de dire pour l'instant si cette quantité trouvée est « petite » ou « grande ». En effet, elle est soumise à la fluctuation d'échantillonnage, puisque sa valeur varie d'une série de lancers à l'autre. On va donc étudier cette fluctuation d'échantillonnage pour convenir d'un seuil entre « petite » et « grande » valeur de d^2 lorsqu'on lance 200 fois un dé. Pour cela, on génère des séries de 200 chiffres au hasard pris dans {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Les résultats trouvés pour le nombre d^2 à partir de 1 000 simulations sont résumés par le tableau suivant :

Technique

Q_1 et Q_3 sont le premier et le troisième quartile et D_1 et D_9 sont le premier et le neuvième décile de la série.

Minimum	D_1	Q_2	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,00363	0,00138	0,00233	0,00363	0,00555	0,00789	0,01658

Le **neuvième décile** de la série des valeurs simulées de d^2 est 0,00789.

Cela signifie que 90 % des valeurs de d^2 obtenues au cours de ces 1 000 simulations sont dans l'intervalle [0 ; 0,00789].

Comme la valeur observée de d^2 est inférieure à cette valeur seuil de 0,00789, on peut convenir que le dé est équilibré avec un risque de 10 %.

En effet, en utilisant cette méthode sur les données simulées, on se serait trompé dans 10 % des cas. On dit que l'on a un **seuil de confiance** de 90 %.

Propriété

Soit une épreuve conduisant aux issues $a_1, a_2, \ldots, a_q$.
Expérimentalement, si on répète n fois cette épreuve ($n \geqslant 100$), on obtient les fréquences $f_1, f_2, \ldots, f_q$ pour chacune des issues. Pour vérifier l'adéquation de ces données à la loi équirépartie sur $\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, on calcule le nombre $d^2 = \sum_{i=1}^{q} \left(f_i - \frac{1}{q}\right)^2$.

Technique

Le processus décrit ici est un cas particulier simplifié d'un processus beaucoup plus général et très utilisé en statistiques : le test du χ^2 (khi-deux).

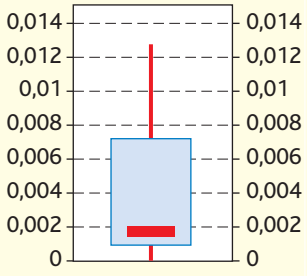
La réalisation d'un grand nombre de simulations de cette épreuve conduit pour la variable d^2 à une série statistique de neuvième décile D_9.

- Si $d^2 \leqslant D_9$, alors on dira que les données sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme au seuil de risque 10 %.
- Si $d^2 > D_9$, on dira que les données ne sont pas compatibles avec ce modèle au seuil de risque 10 %.

Poser le problème de l'adéquation de données

Énoncé 1

On veut tester si une pièce de monnaie est truquée ou non. Pour cela, on la lance 100 fois. On obtient 59 fois « pile » et 41 fois « face ».
Au seuil de risque 10 %, peut-on dire que cette pièce est truquée ?
On utilisera les résultats de la simulation de cette expérience répétée 1 000 fois, pour laquelle on a calculé le nombre d^2, somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques. On donne ci-contre le diagramme en boîte de la série statistique des valeurs de d^2.



Méthode

Pour tester une hypothèse au seuil de risque 10 %, utiliser le neuvième décile de la série des valeurs simulées.

Solution

La fréquence observée des « pile » est 0,59 et celle observée des « face » est 0,41. Comme la loi uniforme sur $\Omega = \{P\ ;\ F\}$ est telle que $P\{P\} = P\{F\} = 0{,}5$, le calcul de d^2 associé aux données de l'expérience s'écrit :

$$d^2 = (0{,}59 - 0{,}5)^2 + (0{,}41 - 0{,}5)^2 = 0{,}0162.$$

Le neuvième décile de la série statistique des nombres d^2 obtenus par simulation est environ 0,013.

Comme 0,0162 est supérieur à D_9, on peut considérer, au risque 10 %, que cette pièce de monnaie est truquée.

Énoncé 2

Dans une maternité, on a noté pendant un an l'heure de chaque naissance. Les nombres de naissances entre 0 h et 1 h, entre 1 h et 2 h, ..., sont respectivement 96, 126, 130, 125, 124, 129, 115, 89, 118, 97, 95, 108, 98, 97, 109, 95, 115, 108, 90, 104, 103, 112, 113, 128. Tester au seuil de risque 10 % si une naissance se produit avec la même probabilité dans l'une des 24 heures.
Au cours de 2 000 simulations de cette expérience, on a calculé le nombre d^2, somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques. Voici les résultats pour la série statistique des valeurs de $10^4 d^2$:

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,6	16,9	23,2	25,8	32,1	36,5	61

Méthode

Pour définir la probabilité uniforme, déterminer le nombre q d'issues ; elle est alors égale à $\frac{1}{q}$.

Solution

Les fréquences observées pour chaque intervalle d'une heure de la journée sont : 0,0366 – 0,0480 – 0,0495 – 0,0476 – 0,0473 – 0,0492 – 0,0438 – 0,0339 – 0,0450 – 0,0370 – 0,0362 – 0,0412 – 0,0373 – 0,0370 – 0,0415 – 0,0362 – 0,0438 – 0,0412 – 0,0343 – 0,0396 – 0,0393 – 0,0427 – 0,0431 – 0,0488.
La loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\ ;\ 24\}$ est telle que la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{24}$. On calcule alors la valeur de d^2 issue de l'observation :

$$d^2 = \left(0{,}0366 - \frac{1}{24}\right)^2 + \left(0{,}0480 - \frac{1}{24}\right)^2 + \dots + \left(0{,}0488 - \frac{1}{24}\right)^2.$$

On trouve $d^2 \approx 0{,}0006$, soit environ $6 \cdot 10^{-4}$.

Cette valeur de d^2 est inférieure au neuvième décile ($36{,}5 \cdot 10^{-4}$) de la série des valeurs simulées. Ainsi, au seuil de risque 10 %, on peut dire qu'une naissance se produit, avec la même probabilité, dans l'une des 24 heures dans cette maternité.

Exercices et Problèmes

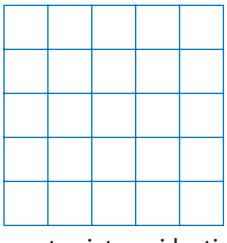
Pour s'entraîner

Combinaisons et dénombrements

1 Dessiner un pentagone convexe $ABCDE$. Combien a-t-il de diagonales ?

2 Soit l'ensemble $F = \{a, b, c, d, e, f\}$. Il possède six éléments.
a) Écrire toutes les parties de F comportant un seul élément. En déduire le nombre de parties comportant 5 éléments.
b) Écrire toutes les parties de F comportant deux éléments. En déduire le nombre des parties de F comportant 4 éléments.
c) Écrire toutes les parties de F possédant 3 éléments.

3 On a dessiné un damier de 5 sur 5, c'est-à-dire un carré de 25 cases.



1. On dispose de quatre jetons identiques. On place les 4 jetons sur ce damier en mettant un seul jeton par case.
a) Combien y a-t-il de manières de procéder ?
b) Même question si on impose de placer l'un des jetons sur la case centrale.
2. On dispose maintenant de quatre lettres A, B, C et D. On place les 4 lettres sur ce damier en mettant une seule lettre par case :
a) Combien y a-t-il de manières de procéder ?
b) Même question si on place la lettre A sur la case centrale.
c) Même question si l'on place une lettre quelconque sur la case centrale.

4 On marque 20 points $A_1 ; A_2 ; \dots ; A_{20}$ tels que trois quelconques ne soient pas alignés.
1. Combien peut-on tracer de droites passant par deux de ces points ?
2. Combien y a-t-il de vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$ $(i \neq j)$?
3. Combien y a-t-il de triangles dont les sommets sont choisis parmi ces 20 points ?
4. Combien y a-t-il de quadrilatères ?

5 Calculer les nombres suivants :

$$8\,! ; \quad 9\,! ; \quad \frac{9!}{8!} ; \quad \frac{125!}{124!} ; \quad \frac{17!}{21!} \times \frac{20!}{16!}.$$

6 n et m étant des naturels supérieurs à 2, écrire plus simplement les nombres suivants :

$$A = \frac{n!}{(n-1)!} ; \qquad B = \frac{n!}{(n-2)!} ;$$

$$C = \frac{(m-1)!}{(m+2)!} ; \qquad D = \frac{(n-m+1)!}{(n-m-1)!}.$$

7 Calculer les nombres $\binom{10}{p}$ pour p prenant toutes les valeurs entières de 0 à 10.
Retrouver ces nombres à l'aide du triangle de Pascal et vérifier de deux façons que la somme de ces 11 entiers est 2^{10}.

8 Une urne contient 5 boules blanches et 6 boules noires. On choisit simultanément trois boules au hasard.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : les trois boules sont blanches ;
B : les trois boules sont de même couleur ;
C : on a deux boules blanches et une boule noire.

9 On choisit au hasard simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
E : on obtient 5 trèfles ;
F : on obtient 5 cartes rouges ;
G : on n'obtient pas d'as ?

10 Une urne contient $2n$ haricots rouges et n haricots blancs $(n > 0)$. On tire au hasard et simultanément trois haricots. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir deux rouges et un blanc ? Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini ?

11 On écrit chacune des 26 lettres de l'alphabet sur 26 cartons identiques, placés dans un sac.
On tire simultanément deux jetons. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : ce sont deux voyelles ;
B : ce sont deux consonnes ;
C : on a une voyelle et une consonne ?

12 Dix cartons sont numérotés de 1 à 10. On choisit simultanément deux cartons au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres marqués soit paire ?

13 Une population de poussins comporte $n + 1$ mâles et $n - 1$ femelles. On choisit simultanément deux poussins au hasard.
1. Calculer en fonction de n la probabilité pour qu'ils soient de sexes différents.
2. Trouver n pour que cette probabilité soit maximum.

14 Écrire le développement de chacune des expressions suivantes :
a) $(a+b)^5$; **b)** $(a-b)^5$;
c) $(x+1)^6 + (x-1)^6$ puis $(x+1)^5 - (x-1)^5$.
d) $(2-i)^6$; **e)** $(2i-1)^6$.

15 **Démonstration de cours**

Pré-requis : définition de $\binom{n}{p}$, nombres de combinaisons de p objets pris parmi n.

1. Démontrer que pour tous entiers naturels n et k tels que : $1 \leqslant k \leqslant n$ on a :

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

2. En déduire le plus simplement possible que :

$$\binom{19}{8}+2\binom{19}{9}+\binom{19}{10}=\binom{21}{10}.$$

Loi binomiale

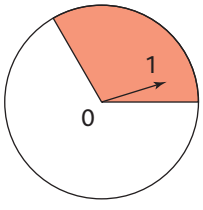
16 On lance un dé bien équilibré six fois de suite. X est la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face marquée 1.

1. Montrer que la loi de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

2. Calculer $P(X = 3)$, puis $p(X < 3)$.

3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

17 Sur la roulette ci-contre, le secteur rouge, marqué 1, représente le tiers du disque. Le reste du disque est marqué 0. On actionne quatre fois de suite la roulette et on note la succession des chiffres 1 ou 0, obtenus, par exemple 0010.



X est le nombre de chiffres 1 apparus.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

2. Montrer que la loi de la variable X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
Calculer $p(X = k)$ pour chaque valeur possible de k.

3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

18 On lance une pièce de monnaie bien équilibrée.
Calculer la probabilité :

1. d'obtenir au moins une fois PILE lorsqu'on la lance 6 fois ;

2. d'obtenir plus d'une fois PILE lorsqu'on la lance 6 fois ;

3. d'obtenir au moins deux fois PILE lorsqu'on la lance 8 fois.

4. d'obtenir autant de PILE que de FACE en dix lancers ?

19 Dans un lot d'objets, un tiers de ces objets sont défectueux. On extrait un objet puis un deuxième après remise au hasard. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : aucun objet n'est défectueux ;
B : les deux objets sont défectueux ;
C : un seul objet est défectueux ;
D : un objet au moins est défectueux.

20 Chaque membre d'un comité de 9 personnes assiste aux réunions une fois sur deux. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : les 9 personnes sont présentes ;
B : il y a plus de 2 personnes présentes ;
C : il y a au moins 5 présents ?

21 **1.** On lance 4 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de « Pile ».

2. Même question si l'on lance la pièce cinq fois de suite.

22 Une pièce truquée est telle que la probabilité d'obtenir PILE est égale à $\frac{2}{3}$.

1. On lance cette pièce cinq fois de suite.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois PILE.

2. Combien de fois faut-il la lancer pour que la probabilité d'obtenir trois PILE soit supérieure à 0,9 ?

23 La probabilité de naissance d'une fille est 0,5. De même, la probabilité de naissance d'un garçon est égale à 0,5.

1. Quelle est la probabilité pour que les filles soient plus nombreuses que les garçons dans une famille de 3 enfants ?

2. Même question dans une famille de 5 enfants puis dans une famille de 6 enfants.

24 Une équipe de football gagne en général deux fois sur 5. Cette équipe doit jouer encore 8 matches.
Quelle est la probabilité qu'elle les gagne tous ? Pour qu'elle en gagne au moins 2 ?

25 Une roue de loterie comporte les 10 numéros de 0 à 9. Tous les numéros ont la même probabilité de « sortir ».
On joue le numéro 7 dix fois de suite :
X désigne le nombre de fois où le 7 est sorti.

1. Combien de valeurs peut prendre X ?

2. Quelle est la loi de probabilité de X ?

3. Calculer $p(X = k)$ pour k prenant toutes les valeurs de 0 à 7. Quelle est la valeur la plus probable ? Calculer $E(X)$.

26 À la sortie d'une chaîne de fabrication, on a constaté que 2 % des pièces fabriquées sont défectueuses.
En utilisant une loi binomiale, quelle est la probabilité pour que dans un lot de 20 pièces :

1. trois exactement sont défectueuses ;

2. trois au moins sont défectueuses ;

3. une pièce au plus est défectueuse.

27 On jette une pièce trois fois de suite. On désigne par E l'événement : « obtenir trois PILE ou trois FACE » et F l'événement « le côté FACE apparaît au moins deux fois ». Ces événements E et F sont-ils indépendants ?

28 Un tireur à l'arc atteint sa cible avec une probabilité 0,6. Au cours d'une compétition, notre tireur dispose de cinq coups (5 flèches). Y désigne le nombre de flèches qui atteignent la cible au bout de 5 essais.

1. Démontrer que la loi de Y est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Le tireur gagne 10 points si 4 flèches au moins sur 5 atteignent la cible et perd 5 points dans les autres cas. La variable aléatoire Z désignant les gains possibles du tireur donner la loi de probabilité de Z.
Calcule $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.

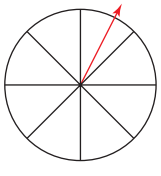
29 **1.** M. Dupont achète 10 oignons de tulipe : 6 d'entre eux donneront des tulipes jaunes, les 4 autres des tulipes rouges. Les 10 oignons sont mis dans une même caisse et il est désormais impossible de discerner ceux qui donneront des fleurs jaunes de ceux qui donneront des fleurs rouges. Au moment de les planter, M. Dupont prend 3 oignons au hasard dans la caisse pour les mettre dans une jardinière ; les 7 autres sont plantés dans un parterre.
En supposant que chaque oignon se développe et donne des fleurs, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait que des tulipes jaunes dans la jardinière ? Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une tulipe rouge ?
2. Avant l'hiver, M. Dupont retirera les 10 oignons de terre dans la jardinière et dans le parterre et les remettra ensemble dans une caisse, en vrac. Puis l'année suivante, il opérera comme la première fois ; il prendra 3 oignons au hasard pour la jardinière et plantera les autres dans le parterre. Le nombre de fois où, au cours d'une période de 5 années, la jardinière ne contiendra que des tulipes jaunes est *a priori* une variable aléatoire, X.
Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 3)$.

30 Dans une région, il y a 3 chances sur 100 qu'un forage conduise à une nappe de pétrole.
1. On prévoit 30 forages. Quelle est la probabilité qu'il y ait :
- 1 seul succès ?
- 7 succès ?
- au moins 3 succès ?
- moins de 3 succès ?
- plus de 3 succès ?
- au plus 8 succès ?

2. Combien faut-il prévoir de forages pour avoir 99 chances sur 100 d'obtenir au moins 1 succès ?
3. Quelle devrait être la probabilité de réussite d'un forage dans la région pour avoir 99 chances sur 100 d'obtenir au moins 1 succès sur 50 forages ?

Lois uniformes

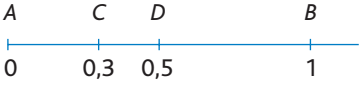
31 On joue avec une roulette qui comporte huit secteurs de même angle au centre.
Ces secteurs sont numérotés de 1 à 8.
La variable aléatoire Y est égale au numéro marqué sur la roulette.
Quelle est la loi de cette variable Y ?
Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.



32 La variable aléatoire X suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
$A = \{X < 0{,}4\}$; $B = \{0{,}02 < X < 0{,}095\}$;
$C = \{X = 0{,}5\}$; $D = \{X > 0{,}08\}$.

33 On choisit au hasard un réel dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
Quelle est la probabilité pour que ce réel soit solution :
1. de l'inéquation $15x^2 - 8x + 1 > 0$;
2. de l'équation $15x^2 - 8x + 1 = 0$.

34 On choisit un point M au hasard sur le segment $[AB]$ avec $AB = 1$.



Quelle est la probabilité :
1. que M soit à égale distance de C et de D ;
2. que M soit plus près de C que de D.

35 On choisit un réel x au hasard dans l'intervalle $[0 ; 1]$ quelle est la probabilité que l'intervalle $[5x ; 5x + 0{,}5]$ ne contienne aucun entier.

Loi exponentielle

36 La variable X est une variable continue sur $[0 ; +\infty[$. Elle est égale à la durée de vie en années d'une machine à laver avec $\lambda = 0{,}05$.
1. Calculer la probabilité pour que cette machine tombe en panne avant 10 ans.
2. Quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne pour la première fois après 10 ans de fonctionnement ?

37 La durée de vie d'un matériel électronique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3\,000}$.
1. Écrire la fonction G telle que $G(t) = P(T \leqslant t)$.
2. Calculer la probabilité pour que ce matériel soit encore en fonctionnement au bout de 4 000 heures.

38 Pour une variable T qui suit une loi exponentielle exprimée en minutes, on a :
$$P(T > 3) = 0{,}2.$$
1. Quel est le paramètre de cette loi ?
2. Calculer $P(T < 5)$.

39 Un élément radioactif a une durée de vie T en siècles qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,03.
Déterminer t pour que $P(T < t)$ dépasse 0,5.

40 **Q.C.M.**
La durée de vie exprimée en années d'un appareil ménager suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t\,;+\infty[)$ est :
a) $1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$; **b)** $\mathrm{e}^{-\lambda t}$; **c)** $1+\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

2. La valeur de t pour laquelle $p([0\,;t[) = p([t\,;+\infty[)$ est :
a) $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$; **b)** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$; **c)** $\dfrac{\lambda}{2}$.

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :
a) $\ln\dfrac{50}{41}$; **b)** $\ln\dfrac{41}{50}$; **c)** $\dfrac{\ln 82}{\ln 100}$.

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :
a) $p([1\,;+\infty[)$; **b)** $p([3\,;+\infty[)$; **c)** $p([2\,;3[)$.

41 Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités sont données à 0,001 près.
1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 0,001 près de λ est 0,125. On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

42 Un commerçant vend des moteurs électriques dont la durée de vie en années est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{5}$.
1. Si le moteur est garanti un an, quelle proportion de ses clients devra-t-il dépanner avant la fin de la garantie ?
2. Quelle est la durée de la garantie pour qu'il ait à dépanner au moins 50 % de ses clients durant cette garantie ?

Adéquation de données à une loi

43 La roulette d'un jeu ne comporte que les issues possibles 1 ; 2 et 3. Une étude des résultats obtenus sur 300 parties a fourni les nombres suivants :

1	2	3
108	102	90

1. Calculer d^2, somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques.
2. Pour savoir si, au seuil de risque de 10 %, on peut dire que cette roulette donne bien des chiffres au hasard, on a simulé 2 000 fois l'expérience consistant à générer 300 fois le choix de 3 chiffres au hasard et on a calculé d^2 pour chaque simulation. Le neuvième décile de la série des d^2 est $5{,}1\times 10^{-3}$.
Conclure.

44 Sur 200 semaines, on a examiné quel était le jour de la semaine pour lequel les pompiers d'une grande ville étaient le plus souvent appelés.
On a trouvé les résultats suivants pour les nombres d'appels :

L	Ma	Me	J	V	S	D
26	26	27	29	30	39	23

Peut-on dire, au seuil de risque 10 %, qu'il y a équiprobabilité pour les interventions des pompiers chaque jour de la semaine ?
On utilisera les résultats obtenus sur 4 000 simulations du tirage d'un jour de la semaine au hasard pendant 200 semaines : le calcul pour chaque simulation de la valeur de d^2, somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et les fréquences théoriques a conduit à une série statistique dont voici quelques paramètres :

D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9
0,0016	0,0016	0,0025	0,0062	0,0075

45 Vrai ou faux ?
Faites votre choix !

A. $\binom{n}{1}+\binom{n}{0} = n+2$.

B. $100! = (10!)\times(90!)$.

C. Il y a 120 façons de choisir simultanément 3 billes dans une urne qui contient 10 billes.

D. La probabilité de tirer deux cœurs dans un jeu de 32 cartes est égale à $\dfrac{7}{124}$.

E. On lance un dé 5 fois de suite. La probabilité d'obtenir 3 fois le SIX est $\dfrac{5^3}{6^5}$.

F. La variable X suit une loi binomiale avec $n = 12$ et $p = \dfrac{1}{3}$: on a $V(X) = \dfrac{8}{3}$.

G. Si pour la loi binomiale de X on a :
$E(X) = 100$; $V(X) = 75$ alors $p = 0{,}25$.

H. Si $f(t) = 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ alors $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-0{,}2x}$.

I. Pour la variable T continue sur $\mathbb{R}^+$:
$P(T > t) = 1 - P(T \leqslant t)$.

J. Pour une loi de Y uniforme sur $[0\,;1]$.
On a $P(0{,}02 < Y < 0{,}92) = 0{,}9$.

Pour approfondir

Coefficients $\binom{n}{p}$ et binôme de Newton

46 Démontrer que pour tout naturel n :

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

PISTE Écrire le développement de $(a+b)^n$. puis remplacer a par 1 et b par -1.

47 On pose $f(n)=\binom{2n}{n}$ pour n naturel non nul et $R_n=\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$.

1. Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

2. Calculer R_1 ; R_2 ; R_3 et R_n en fonction de n.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} R_n$.

3. À partir de quelle valeur de n a-t-on $R_n>3$?

48 On pose $f(x)=x(1+x)^n$, n étant un naturel non nul.

1. Écrire $f(x)$ sous forme développée.

2. Calculer la dérivée de f de deux façons différentes.

3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$.

49 **1.** Calculer

$$A=\binom{6}{1}+2\binom{6}{2}+3\binom{6}{3}+4\binom{6}{4}+5\binom{6}{5}+6\binom{6}{6}$$

puis $B=6\times2^5$. Vérifier que $A=B$.

2. Démontrer que pour tout naturel n et tout k tel que $1\leqslant k\leqslant n$ on a : $\binom{n}{k}=\dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

3. En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\times2^{n-1}$ et retrouver le résultat de la question (1).

50 Résoudre chacune des équations d'inconnue n :

a) $\binom{n}{4}=13\binom{n}{2}$; **b)** $\binom{n-1}{n-5}=3\binom{n-3}{n-7}$.

51 Résoudre l'équation d'inconnue n :

$$\binom{n}{3}-\binom{n}{2}=\frac{n^3-6n^2+20}{6}.$$

52 Résoudre le système d'inconnues n et p :

$$\begin{cases}\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}\\ 4\binom{n}{p}=5\binom{n-1}{p}\end{cases}$$

53 Lors d'un contrôle, un étudiant doit répondre à 10 questions sur 13 que comporte ce contrôle.

1. Combien de choix s'offrent à lui ?

2. Combien y a-t-il de choix s'il doit répondre obligatoirement aux deux premières questions ?

3. Combien de choix s'il doit répondre aux 5 premières questions ?

Probabilités

54 Un domino est formé de deux « cases » chacune portant un numéro de 0 à 6. Un « double » est un domino dont les deux cases portent le même numéro.

1. Montrer qu'un jeu comporte 28 dominos.

2. On tire simultanément et au hasard trois dominos du jeu. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « il y a un seul double parmi les trois dominos » ;
B : « il y a au moins un double » ;
C : « il y a au moins un domino sur lequel figure le chiffre SIX ».

PISTE **2)** Pour l'événement C, le double SIX convient.

55 Une urne contient 6 boules blanches, 6 boules noires et 4 vertes. On choisit dans l'urne cinq boules au hasard et simultanément.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait trois boules qui soient blanches exactement parmi les 5 ?

2. Quelle est la probabilité de l'événement : il y a exactement trois boules vertes ?

3. Quelle est la probabilité de l'événement : on obtient trois boules de même couleur ?

PISTE Pour dénombrer les cas favorables de (1), penser que les 3 blanches sont choisies parmi 6 blanches et les deux autres parmi les 10 non blanches.

56 On tire 5 cartes simultanément au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir trois rouges exactement parmi les cartes tirées ?
Quelle est la probabilité d'obtenir trois cartes de même couleur ?

57 À la gare de La Part Dieu à Lyon, 15 voyageurs ont pris un billet : 3 pour la destination d'Avignon, 7 pour Bellegarde et 5 pour Chambéry.
On choisit au hasard 3 de ces voyageurs.
Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
E : les 3 voyageurs ont des destinations distinctes ;
F : les 3 voyageurs vont à Chambéry ;
G : les trois voyageurs ont la même destination ;
H : un voyageur au moins va en Avignon.

58 On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. On désigne par X le nombre des cœurs parmi ces cinq cartes tirées.
1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
2. Calculer $P(X = 2)$.
3. Calculer $P(X = k)$ en fonction de k.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Loi binomiale

Pour les exercices utilisant une loi binomiale, il faut d'abord montrer que les conditions sont remplies pour l'utilisation d'une telle loi et on précisera les paramètres.

59 Une variable X suit la loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
1. Calculer les probabilités de chacun des événements : $A = (X \leqslant 4)$; $B = (X < 8)$.
2. Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

60 Deux amis A et B s'affrontent à l'occasion d'un tournoi de ping-pong. Les statistiques sur les parties précédentes montrent que A gagne contre B avec une probabilité égale à 0,6.
Ils jouent un nombre impair de parties : le vainqueur est celui qui a gagné le plus grand nombre de parties.
Quelle est la probabilité de l'événement E :
« B gagne le tournoi » dans chacun des cas suivants :
a) Le tournoi comporte une partie.
b) Le tournoi comporte trois parties.
c) Le tournoi comporte cinq parties.

PISTE Si X est la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par A, quelles valeurs peut prendre X dans chacun des cas ?

61 Un représentant de commerce doit visiter n clients distincts. Chacune de ces n visites est indépendante des autres. Quelle que soit la visite considérée, on désigne par p la probabilité de l'événement : le représentant rencontre son client.
1. Soit X le nombre de clients effectivement rencontrés. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Quelle est l'espérance mathématique de X ? sa variance ?
2. On suppose $n = 5$ et $p = 0{,}6$. Calculer les probabilités des événements suivants :
A : aucun client n'est rencontré ;
B : un client au moins est rencontré ;
C : la moitié au moins des clients est rencontrée.

62 **1.** On lance deux dés équilibrés : quelle est la probabilité d'obtenir un double SIX ?
2. On lance deux dés équilibrés 15 fois se suite.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un double SIX ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un double quelconque ?

63 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication, peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b et ceci de manière indépendante. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % présentent le défaut b. Une montre est tirée au hasard dans la production.
On définit les événements suivants :
A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « La montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».
1. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'événement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.
On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire, qui à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b. On désigne par E l'événement : « Quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
Calculer à 10^{-3} près la probabilité de E.

64 **1.** Un sac contient 36 boules indiscernables au toucher avec équiprobabilité de tirage : 2 blanches, 2 rouges, les autres étant vertes.
On tire simultanément et au hasard, trois boules du sac.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : on obtient une boule de chaque couleur ;
B : il n'y a pas de verte parmi les trois boules tirées ;
C : il n'y a qu'une seule verte parmi les trois boules tirées.
2. La composition du sac ne change pas.
On tire trois fois de suite une boule dans le sac, avec remise à chaque fois.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges après ces trois tirages.
Donner la loi de probabilité de cette variable.
3. On suppose maintenant que le sac contient encore 36 boules, dont n blanches et n rouges et les autres vertes (n quelconque avec $1 \leqslant n \leqslant 17$) et on tire simultanément trois boules sans remise dans le sac. On considère les événements A, B et C de la question **1**.
Calculer $p(A)$ en fonction de n ; déterminer n pour que cette probabilité soit maximum.
Calculer $p(B)$; à partir de quelle valeur de n a-t-on $p(B) > 0{,}6$?
Calculer $p(C)$; trouver n pour que $p(C) > 0{,}5$.

65 Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois soit au total 40 trajets.
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est p. Le prix de chaque trajet est de dix euros et en cas de fraude l'amende est de 100 Euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si Claude est contrôlé au $i^{\text{ème}}$ trajet et la valeur 0 si non. Soit X la variable aléatoire définie par :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}.$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$.

a) Calculer l'espérance mathématique de X.

b) Calculer les probabilités $p(X = 0)$; $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ Calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \frac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

a) Démontrer que :

$$p(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}(741p^2 + 38p + 1).$$

b) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x) = (1-x)^{38}(741x^2 + 38x + 1).$$

Montrer que f est strictement croissante sur [0 ; 1] et qu'il existe un réel x_0 de cet intervalle tel que $f(x_0) = 0{,}01$.
Déterminer l'entier naturel n tel que :

$$\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}.$$

c) En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.
(On exprimera p en fonction de x_0).

66 **1.** Pour une loi binomiale de paramètres n et p, démontrer que l'on a :

$$\frac{P(X = k+1)}{p(X = k)} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p}.$$

2. Pour la loi binomiale telle que $n = 5$ et $p = 0{,}2$, calculer $P(X = 0)$ et, en déduire de *proche en proche* :
$P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$ et $P(X = 5)$.
Quelle est la valeur la plus probable de X ?

3. Déduire de la question **1.** un programme de calculatrice pour le calcul de $P(X = k)$ de proche en proche à partir de $P(X = 0)$.

67 Pour la loi binomiale de paramètres $n = 18$ et $p = 0{,}4$, déterminer la valeur de la variable la plus probable (on peut utiliser le résultat de l'exercice 66).

68 Lors d'un examen un questionnaire à choix multiples (QCM) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce QCM, supposées indépendantes. À chaque question, sont associées quatre affirmations numérotées 1-2-3-4 et dont une seule est exacte. Pour chaque question, le candidat doit cocher l'un de ces numéros. Sa réponse est correcte s'il a coché le bon numéro. On demande de donner les probabilités sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les 4 affirmations sont équiprobables.

a) Calculer alors la probabilité de chacun des événements suivants :

A : le candidat répond correctement à la première des 5 questions.

B : le candidat répond correctement à 2 questions au moins sur les 5.

b) On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note (−1) à toute réponse incorrecte.

Calculer la probabilité de l'événement C : le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des 5 questions.

2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte aux deux premières questions et qu'il répond au hasard aux trois autres. Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit au **1.b)** ?

69 Une usine de tissage fabrique des rouleaux de tissu pour un atelier de confection. Les rouleaux sont livrés par camion de 100 rouleaux.
La probabilité pour qu'un rouleau soit défectueux à la livraison est de 0,03.
On vide le camion chez le client.
On appelle X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de rouleaux défectueux de ce camion.

1. On suppose que la loi de X est une loi binomiale. Préciser ses paramètres et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Calculer à 0,001 près les probabilités des événements suivants :

E : le camion ne contient aucun rouleau défectueux ;

F : le camion contient un rouleau défectueux ;

G : le camion contient au moins deux rouleaux défectueux.

3. Une année donnée, l'usine livre un camion de 100 rouleaux pendant 40 semaines. Quelle est la probabilité pour que durant cette année cinq livraisons comportent au moins un rouleau défectueux ?

Loi uniforme

70 **Loi uniforme sur** $[a\,;b]$

On désigne par X une variable continue de loi uniforme prenant ses valeurs sur $[a\,;b]$.
On a par définition $P(a \leqslant X \leqslant b) = 1$.
On pose $P(a \leqslant X \leqslant x) = \int_a^x k\,dt$ (k constante).

1. Montrer que $k = \frac{1}{b-a}$.

2. Montrer que $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

3. Calculer $P\left(a \leqslant X \leqslant \dfrac{a+b}{2}\right)$ et $P\left(\dfrac{a+b}{2} \leqslant X \leqslant b\right)$.

4. Retrouver les résultats concernant la loi uniforme sur [0 ; 1].

5. En prenant $a = 1$ et $b = 11$, calculer k puis $P(1 \leqslant X \leqslant 5)$.

71 Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.
On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
a) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
b) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
c) On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT. En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur [0 ; 1].
On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 minutes et 30 minutes ?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste.
Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

Loi exponentielle et durée de vie

72 Une machine automatique perce des tôles.
La loi de durée de vie de cette machine est une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{5\,000}$.

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance au cours des 2 000 premières heures d'utilisation de cette machine.

2. Sachant que la machine n'a connu aucune défaillance au cours des 2 000 premières heures d'utilisation, quelle est la probabilité que cette machine ne connaisse aucune défaillance pendant les 6 000 premières heures d'utilisation ?

73 On considère une production de composants d'un certain type. On admet que la variable aléatoire T qui, à tout composant tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie t, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Soit $F(t)$ la probabilité pour qu'un composant n'ait eu aucune avarie jusqu'à l'instant t.
Écrire $F(t)$ en fonction de t.

2. On sait que $F(600) = 0{,}93$.
Déterminer la valeur exacte du paramètre λ, puis une valeur approchée de λ à 10^{-5} près.

3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité pour que la durée de vie d'un composant dépasse 1 500 h.

74 Un fabriquant de matériel électronique sait, à l'aide d'études que son matériel fonctionne en moyenne 2 ans sans réparation et que la durée de vie avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre 0,5.
On désigne par X la durée de vie en années.

1. Déterminer la fonction F telle que :
$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

2. Calculer la probabilité pour que le matériel tombe en panne avant la fin de la première année puis la probabilité pour qu'il n'ait pas de panne au cours des trois premières années.

75 Un fabricant de jeux électroniques fabrique des consoles de jeux. On suppose que la variable aléatoire T qui représente la durée de vie d'un composant d'une console de jeux (en jours) suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{700}$.

1. Déterminer la fonction F de $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F(t) = P(T \leqslant t)$.

2. **a)** Calculer la probabilité que le composant n'ait pas de défaillance durant les quatre premiers mois.
b) Calculer la probabilité que le composant soit encore en fonctionnement au bout de 2 ans.
c) Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne au bout de 2 ans.
d) Au bout de quelle durée aura-t-on 10 % des composants en panne ?

3. En fait, deux composants électroniques A et B de ce type sont montés sur la console. On note T_A et T_B les variables aléatoires représentant les durées de vie de ces composants et on suppose que T_A et T_B sont des variables aléatoires indépendantes.
a) Calculer la probabilité que la console fonctionne après 300 jours, les composants A et B étant montés en série.
b) Calculer la probabilité que la console fonctionne après 300 jours, les composants A et B étant montés en parallèle.

76 Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{82}$.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a) Comprise entre 50 et 100 km ;

b) Supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. a) Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} \mathrm{d}x$, où A est un nombre réel positif.

b) Calculer la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

(Cette limite représente la distance moyenne parcourue sans incident).

77 Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit Défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a) Définir la loi de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3. a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

b) Il veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}000\,7\mathrm{e}^{-0{,}000\,7x}.$$

Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

78 QCM

Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a., b., c., d.

Aucune justification n'est demandée pour cet exercice. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

a) X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.

b) $P(X = 0) = \frac{1}{2^{2n}}$

c) $P(X < 5) = 1 - P(X > 5)$

d) $E(X) = 0{,}75n$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :

• Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs.

• Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).

Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.

On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».

a) $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = 1{,}01$

b) $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = P(T)$

c) $P(T) = 2{,}97 \cdot 10^{-2}$

d) Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01.

Alors :

a) La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

b) Pour tout réel t positif, $P(Y \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

c) La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

d) Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Adéquation des données

79 À la fin d'une année, le maire d'une commune compulse les registres d'état civil et compte les filles et les garçons nés durant cette année. Voici les résultats :

Garçons	Filles
134	108

Il se pose alors la question : est-ce que ces résultats sont compatibles avec l'hypothèse selon laquelle il naît autant de filles que de garçons ?

Pour cela, il simule l'expérience consistant à répéter 242 fois le tirage de deux chiffres au hasard. Après 5 000 simulations, il s'intéresse au réel d^2, somme des carrés des

écarts entre les fréquences observées au cours des simulations et les fréquences théoriques. Voici les résultats obtenus pour la série statistique des valeurs de $10^4 \times d^2$.

D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9
0,3	8,7	22,3	41,1	55,9

Au seuil de 10 % peut-on accepter l'hypothèse faite par le maire ?

80 QCM

Les 1 000 premières décimales de π ont été obtenues sur un ordinateur. En groupant ces décimales par valeur entre 0 et 9, on trouve le tableau suivant :

Valeur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9. Pour chaque expérience on a calculé :
$d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} (f_k - 0{,}1)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.
On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et le neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et le troisième quartile (Q_1 et Q_3), et la médiane Me :
$d_1 = 0{,}000422$; $Q_1 = 0{,}000582$; Me = 0,000822
$Q_3 = 0{,}001136$; $d_9 = 0{,}00145$.

1. En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :
(a) 0,000456 (b) 0,00456 (c) 0,000314.
Quelle est la bonne réponse ?

2. Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?
(a) Oui (b) Non (c) Il ne peut pas conclure.
Quelle est la bonne réponse ?

81

Un pisciculteur possède un bassin qui contient trois variétés de truites : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

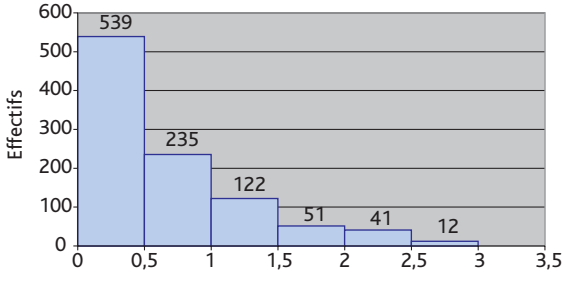
Variété	Commune	Saumonée	Arc-en-ciel
Effectifs	146	118	136

1. a) Calculer les fréquences de prélèvement f_c d'une truite commune, f_s d'une truite saumonée et f_a d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.

b) On pose $d^2 = \left(f_c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \frac{1}{3}\right)^2$.

Calculer $400\,d^2$ arrondi à 10^{-2} ; on note $400\,d^2$ cette valeur.

2. À l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1 000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de $400\,d^2$.
Le diagramme à bandes ci-dessous représente la série des 1 000 valeurs de $400\,d^2$, obtenues par simulation.
Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile D_9 de cette série.

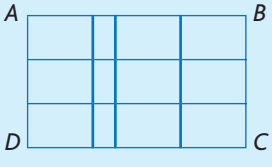


3. En argumentant soigneusement la réponse dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10 % que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».

4. On considère désormais que le bassin contient autant de truites de chaque variété. Quand un client se présente, il prélève au hasard une truite du bassin.
Trois clients prélèvent chacun une truite. Le grand nombre de truites du bassin permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise. Calculer la probabilité qu'un seul des trois clients prélève une truite commune.

Pour prendre des initiatives

82 1. Le partage des rectangles



On considère un rectangle $ABCD$.
On trace, à l'intérieur du rectangle, n segments parallèles à (AB) et m segments parallèles à (AD).
Combien peut-on dénombrer de rectangles sur ce dessin ?

2. Soit un segment $[AB]$ de longueur 1 et un segment $[CD]$ de longueur a avec $0 < a < 1$. On choisit un point M au hasard sur $[AB]$. Quelle est la probabilité de l'événement : « On peut construire un, triangle de côtés AM, BM et CD ».

Pour aller plus loin

83 Maximum de vraisemblance

À l'occasion d'un contrôle de qualité d'un lot de postes radio, on prélève à la sortie de la chaîne de fabrication, un échantillon de 5 postes et on constate que 3 sont défectueux. Peut-on raisonnablement en conclure que 60 % des postes fabriqués sont de mauvaise qualité ?

Soit p la probabilité pour un poste fabriqué d'être défectueux.

1. Exprimer en fonction de p la probabilité P pour que parmi 5 postes il y ait 3 postes défectueux.

2. Pour $p = 0{,}1$, on trouve $P = 0{,}008$.

Interpréter ce résultat.

3. Calculer P pour p variant de 0 à 1, avec un pas de 0,1. Quelle est la valeur de p pour que la probabilité P soit maximum ?

Répondre alors à la question posée.

4. Étudier les variations de la fonction F telle que $F(x) = \binom{5}{3}x^3(1-x)^2$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et retrouver les résultats du 3.

84 Un rendez-vous

Deux amis A et B se donnent rendez-vous place Bellecour à Lyon entre 0 h et 1 h.

Chacun arrive entre ces deux heures de manière aléatoire. Ils conviennent que le premier arrivé attend 10 minutes ($\frac{1}{6}$ d'heure) et s'en va si l'autre n'arrive pas.

L'objectif est de déterminer la probabilité pour que les deux amis se rencontrent.

1. Si A arrive à 0 h 30, dans quel intervalle doit se situer l'arrivée de B pour que les amis se rencontrent ?

2. Même question si A arrive à 0 h 10 mn.

3. On note x l'heure d'arrivée de A et y l'heure d'arrivée de B.

Montrer que, pour que les amis se rencontrent, on doit avoir $x - \frac{1}{6} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}$ avec x et y appartenant à $[0\,;\,1]$.

4. Représenter cette situation sur un graphique avec un repère orthonormal d'unité 12 cm.

Hachurer la surface de rencontre.

5. En admettant qu'une probabilité est proportionnelle à une surface, déterminer la probabilité pour que les deux amis se rencontrent.

85 Promenade en montagne

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100e le plus proche.

1. a) Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours.

Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Donner la signification des événements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces événements. Calculer $E(X)$.

Quelle signification donner à ce résultat ?

c) Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade. Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée. On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

Calculer la probabilité de l'événement $S = 11$.

Préciser l'espérance mathématique de S.

2. a) Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13e groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

b) Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution. Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

c) Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\sum_{k=0}^{k=13} k\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2P_{13}.$$

Calculer ce gain.

d) La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

Sur tableur : adéquation à une loi équirépartie

On se propose de lancer une pièce de monnaie cent fois de suite, puis de calculer les fréquences observées de « Pile » et de « Face ». Est ce que ces fréquences sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme au seuil de risque 10 % ?
Pour cela, on va simuler 1 000 fois cette expérience à l'aide du tableur.
Ouvrir une feuille de calcul du tableur.

1 Simulation d'une première expérience sur la ligne 1 de la feuille :

a. Taper dans la cellule A1 l'instruction =ENT(ALEA()*2) pour générer aléatoirement 0 ou 1 (c'est-à-dire Pile ou Face).

b. Recopier cette instruction vers la droite jusqu'à la cellule CV1 (vous pouvez compter, cela fait bien 100 cellules : 26 + 26 + 26 + 22) : la première expérience est simulée.

c. Dans la cellule CX1, on compte le nombre de Pile (donc de 0) obtenus dans l'expérience par la formule

=NB.SI(A1 : CV1 ; 0).

d. On fait de même dans la cellule CY1 pour compter le nombre de Face.

e. On calcule la fréquence de Pile pour cette expérience en CZ1 et la fréquence du nombre de Face en DA1.

f. On calcule en DB1 le carré de la « différence » d^2 entre les fréquences observées sur cette expérience et les fréquences théoriques 0,5 et 0,5 à l'aide de la formule :

=(CZ1-0,5)^2+(DA1-0,5)^2.

2 Simulation de 1 000 expériences identiques à la précédente :

a. On sélectionne la première ligne depuis A1 jusqu'à DB1.

b. On recopie cette ligne vers le bas jusqu'à la ligne 1 000.
Chaque ligne contient une simulation de l'expérience.

3 Analyse de la série statistique formée par les valeurs d^2 obtenues à chaque simulation :

a. Dans la cellule DD1, taper : 9e décile.

b. Dans la cellule DE1, on calcule le 9e décile de la série statistique formée par les 1 000 valeurs de d^2 obtenues dans la colonne DB avec la formule :

=CENTILE(DB1:DB1000;0,9).

(Explication : pour le tableur, le 9e décile est le 90e centile).

	CG	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP	CQ	CR	CS	CT
1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
3	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
4	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
5	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
6	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
8	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0

CU	CV	CW	CX	CY	CZ	DA	DB	DC	DD	DE
1	0		50	50	0,5	0,5	0		9è décile	0,0128
1	0		48	52	0,48	0,52	0,0008			
1	0		45	55	0,45	0,55	0,005			
0	0		50	50	0,5	0,5	0			
0	0		57	43	0,57	0,43	0,0098			
1	1		48	52	0,48	0,52	0,0008			
0	1		47	53	0,47	0,53	0,0018			
1	0		48	52	0,48	0,52	0,0008			

c. Conclure au seuil de risque 10 %.

d. Que faut-il faire pour faire la même étude au seuil de risque 5 % ?

Quelques compléments :

a. Pour effectuer de nouvelles simulations, appuyer sur la touche F9.

b. Pour éviter que de nouvelles simulations ne se produisent dès qu'on appuie sur la touche ENTER, il faut cocher la case « Sur ordre » dans le menu Outils, puis Options, puis Calcul.

Pour préparer le Bac

Exercice A

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :
– Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
– Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A_1 : « la particule est de type A et elle entre dans K_1 » ;
A_2 : « la particule est de type A et elle entre dans K_2 » ;
B_1 : « la particule est de type B et elle entre dans K_1 » ;
B_2 : « la particule est de type B et elle entre dans K_2 » ;
C_1 : « la particule entre dans K_1 » ;
C_2 : « la particule entre dans K_2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre des particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant :
« il y a exactement deux particules dans K_2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. Chaque particule A donne en se transformant une particule B.
On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0{,}75$.
Plus généralement si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0{,}75\mathrm{e}^{-\lambda t}$ où λ est une constante réelle. La demi-vie des particules A est 3 750 ans. (*La demi-vie est le temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial*).

1. Calculer λ. On prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près.

2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules A se seront-elles transformées en particules B ?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Bac Sept 2004

Exercice B

Les parties A et B sont indépendantes.
Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux.

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0{,}0005$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 0{,}0001$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
a) si ce composant est défectueux ;
b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
(On rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
$$P(T \geqslant t) = 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}0005t} + 0{,}98\mathrm{e}^{-0{,}0001t}.$$

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Bac S 2004

Exercice C (QCM)

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. La bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies. 40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit au hasard un livre parmi les 200 ouvrages.
Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
a) 0,4 ; **b)** 0,75 ; **c)** $\frac{1}{150}$.

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :
a) 0,3 ; **b)** 0,8 ; **c)** 0,4.

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :
a) 1,15 ; **b)** 0,8 ; **c)** 0,3.

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
a) 0,9 ; **b)** 0,7 ; **c)** 0,475.
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
a) $\frac{4}{150}$; **b)** $\frac{12}{19}$; **c)** 0,3.
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque, la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est
a) $1-(0{,}25)^{20}$ **b)** $20\times 0{,}75$; **c)** $0{,}75\times(0{,}25)^{20}$.

Bac 2005

Exercice D

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte. On suppose que le dé est parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé.
À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les événements suivants :
E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».
1. Calculer les probabilités des événements *E* et *F* ainsi que la probabilité de *E* sachant *F*.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement *F* au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où la face *i* est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face *i*	1	2	3	4
Effectif n_i	30	48	46	32

On note F_i la fréquence relative à la face n_i et d^2 le réel $\left(\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2.\right)$
On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2=\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2$.
où F_i est la fréquence d'apparition du chiffre *i*. Le 9e décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098.
Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Exercice E

On dispose d'un cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher portant les lettres *L, O, G, A, R, I, T, H, M, E*, soit 4 voyelles et 6 consonnes. un joueur fait une partie en deux étapes
1re étape : il jette le dé et note le numéro obtenu
2e étape :
Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne : il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et perd dans le cas contraire.
Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne : il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et perd dans le cas contraire.
On définit les événements suivants :
*D*1 : le dé indique 1 ; *D*2 : le dé indique 2 ;
*D*3 : le dé indique 3 ; *G* : la partie est gagnée.
1. a) Déterminer $P_{D1}(G)$; $P_{D2}(G)$; $P_{D3}(G)$.
b) Démontrer que $P(G)=\frac{23}{180}$
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

6 min pour chacun des exercices — Vers l'oral

I/ Une expérience consiste à lancer simultanément deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir un total 6 ? On lance ces deux dés cinq fois de suite. On considère comme succès le fait d'obtenir un total 6. *X* est le nombre des succès en 5 lancers. Quelle est la loi de probabilité de *X* ? Calculer $E(X)$.

II/ Une variable *Y* suit une loi binomiale telle que $E(Y)=15$ et $\sigma(Y)=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Calculer la probabilité de chacun des événements $A=(Y>1)$; $B=(2<Y<19)$.

III/ La variable équirépartie *X* prend les valeurs 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

IV/ La loi de durée de vie d'une variable continue est une loi exponentielle telle que $p(T\leqslant 100)=0{,}52$. Calculer le paramètre de cette loi. Calculer $P(100\leqslant T\leqslant 200)$.

Un peu d'histoire

Physique quantique, statistiques et probabilités

Albert Einstein (1879-1955) s'est intéressé en particulier au mouvement brownien et bien sûr à la théorie de la relativité

« Les lois de la physique quantique ont un caractère statistique. C'est-à-dire qu'elles ne concernent pas un système individuel mais un ensemble de systèmes identiques. Elles sont vérifiées par une série de mesures répétées [..].
Nous ne nous demandons pas : « quelle est la vitesse de chaque particule en ce moment ? » mais : « combien de particules ont une vitesse entre 300 et 400 $m \cdot s^{-1}$? ». Ce que nous cherchons à déterminer, ce sont les valeurs moyennes qui caractérisent l'ensemble. En appliquant la méthode statistique, nous ne pouvons pas prévoir quel sera le comportement d'un individu dans une foule. Nous pouvons seulement prévoir la chance , la probabilité, qu'il se comportera d'une certaine manière particulière … [..].
La proposition « le point matériel a telle ou telle position et telle ou telle vitesse à cet instant » a un sens défini en mécanique classique. Mais nous ne pouvons pas représenter le trajet d'un photon ou d'un électron de la même manière que nous avons représenté le mouvement dans la mécanique classique.
Dans la physique quantique, la situation est entièrement différente.
Elle abandonne les lois individuelles des particules élémentaires et établit directement les lois statistiques régissant des ensembles.
La même expérience sera répétée un grand nombre de fois pour obtenir ces lois. »

Extrait de Évolution des idées en physique.

Questions

Ligne 1 : expliquer la signification de « physique quantique ».
Ligne 5 : quelle loi de probabilité est évoquée par « une série de mesures répétées » ?
Ligne 11 : où rencontre-t-on la notion de valeur moyenne dans ce chapitre ?
Expliquer la signification de « mécanique classique ».

Emile BOREL (1871-1956) et les probabilités

« Les origines du calcul des probabilités, comme celles de beaucoup de branches du savoir humain, sont modestes et ses fondateurs ne soupçonnaient probablement pas l'importance que prendrait la science nouvelle.
C'est à propos de problèmes posés par les jeux de hasard, notamment par le jeu de dés, que Pascal et Fermat ont éclairci les principes du calcul des probabilités ; c'était là pour eux un délassement qui les reposait d'autres travaux plus abstraits.
C'est seulement Laplace qui paraît s'être rendu compte le premier de la grande importance du calcul des probabilités pour la Philosophie Naturelle.
Cette importance s'est beaucoup accrue au XIX^{e} siècle en même temps que les applications des probabilités sont devenues plus nombreuses.
Les probabilités dominent la physique moderne et leur rôle s'accroît à mesure que l'on comprend mieux les théories atomiques.
En biologie, en anthropologie, le rôle des probabilités est considérable, faut-il parler de la théorie des assurances… ».

Questions

Ligne 11 : trouver des informations sur Laplace et ses recherches.
Ligne 20 : en quoi, selon vous, les probabilités peuvent-elles être utiles en biologie, en anthropologie, en théorie des assurances ?



Et maintenant,
TESTEZ-VOUS !

Choisissez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Savoir utiliser des nombres de combinaisons

	A	B	C	D
1. Le nombre $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$ est égal à	$2n^2+n^2$	$\frac{3n+n^2}{2}$	n^2+n	$\binom{n+1}{2}$
2. Calculer $\binom{250}{1}+\binom{250}{249}$	$2\times\binom{250}{249}$	1 245	500	$\binom{500}{250}$
3. Le nombre de façon de choisir 4 objets parmi 20 est	4 850	4 845	4 840	$\binom{20}{16}$

Savoir calculer avec une loi binomiale

4. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15\,;0{,}2)$. Alors $P(X>0)=$	$P(X\leqslant 15)$	$0{,}2^{15}$	$1-0{,}2^{15}$	$1-0{,}8^{15}$
5. Si Y suit une loi binomiale $E(Y)=9$ et $\sigma(Y)=\sqrt{6}$, alors	$n=18$ et $p=0{,}5$	$n=27$ et $p=\frac{1}{3}$	$n=36$ et $p=0{,}25$	$n=10$ et $p=0{,}1$
6. Pour la variable binomiale X de paramètres $n=4$ et p, $P(X=1)=8P(X=0)$. Alors on a	$p=\frac{1}{3}$	$p=0{,}75$	$p=0{,}25$	$p=\frac{2}{3}$

Savoir calculer avec une loi uniforme

7. La loi de Z est uniforme et Z prend les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; 4. On a	$E(Z)=2{,}25$	$E(Z)=2{,}5$	$E(Z)=2$	$E(Z)=1{,}5$
8. X suit la loi uniforme continue sur $[0\,;1]$. $P(0{,}2<X<0{,}92)=$	0,7	0,90	0,82	0,72

Savoir calculer avec une loi de durée de vie sans vieillissement

9. Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}004$ est $P(X<500)=$	$1-\mathrm{e}^{-0{,}2}$	0,135 environ	0,864 environ	$1-\mathrm{e}^{-2}$
10. X est une variable continue dont la loi est exponentielle. Si $P(X<t)=1-\mathrm{e}^{-0{,}25t}$, alors $P(2<X<4)=$	$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-0{,}5}$	$\mathrm{e}^{-0{,}5}-\mathrm{e}^{-1}$	0,239 environ	$1-(\mathrm{e}^{-0{,}5}+\mathrm{e}^{-1})$

Réponses page 410