

Calculs numériques

Mots-clés du chapitre

Dans ce chapitre, vous allez :

- apprendre à calculer avec les **puissances** ;
- redécouvrir les **racines carrées** et apprendre à résoudre une équation du type $x^2 = a$;
- apprendre à obtenir un **encadrement** ou une valeur arrondie d'un résultat.

À LA DÉCOUVERTE DE...

Activité 1

Comment calculer avec les puissances ?



Au cours d'un jeu télévisé, les candidats doivent répondre à 15 questions. Les gains sont les suivants : la première réponse correcte permet de gagner 2 €, et à chaque nouvelle réponse correcte le gain est doublé.

1. Calculer le gain obtenu après 2 bonnes réponses, après 3 bonnes réponses.

2. Comment calculer rapidement le gain obtenu si le candidat donne beaucoup de bonnes réponses ?

Les **puissances** et la calculatrice vont nous aider !

On note $2 \times 2 = 2^2$; $2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ et ainsi de suite.

a) Calculer 2^3 en effectuant à la calculatrice l'une des séquences suivantes :



2 $\wedge$ 3 ENTER

2 $\wedge$ 3 EXE

b) Calculer 2^9 (2^9 se lit « deux puissance neuf »). Que représente ce nombre pour le candidat ?

3. Quel gain maximum un candidat peut-il espérer obtenir ?

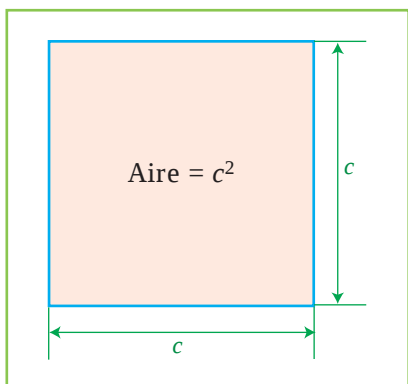
4. a) Quel est le gain obtenu après 12 bonnes réponses ?

b) Par quel nombre sera multiplié ce gain avec 3 bonnes réponses supplémentaires ?

5. En comparant les méthodes utilisées aux questions 3 et 4, vérifier que $2^{15} = 2^{12} \times 2^3$.

Activité 2

Comment redécouvrir la racine carrée ?



Le tableau suivant donne l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté. On souhaite compléter ce tableau.

On rappelle que l'aire d'un carré de côté c est $c \times c = c^2$.

Longueur du côté (c)	1	2	3	5		7		
Aire du carré (c^2)	1	4	9		36		81	121

1. Compléter la deuxième ligne du tableau.

2. On souhaite compléter la première ligne.

a) Les nombres cherchés sont des nombres simples. **Faites des propositions.** Chaque proposition doit être justifiée !

b) On veut confirmer les résultats grâce à la calculatrice.

Effectuer l'une des séquences suivantes :



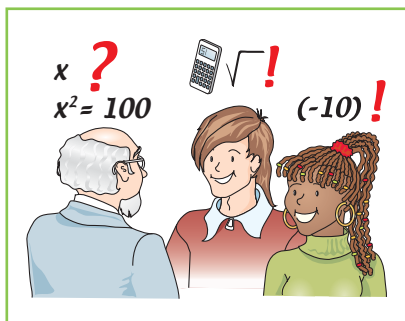
2nd $\sqrt{}$ 36 ENTER

$\sqrt{}$ 36 EXE

Vérifier que le nombre obtenu permet de compléter la cinquième colonne. Utiliser la même méthode pour compléter le reste de la première ligne.

Activité 3

Comment résoudre une équation du type $x^2 = a$?

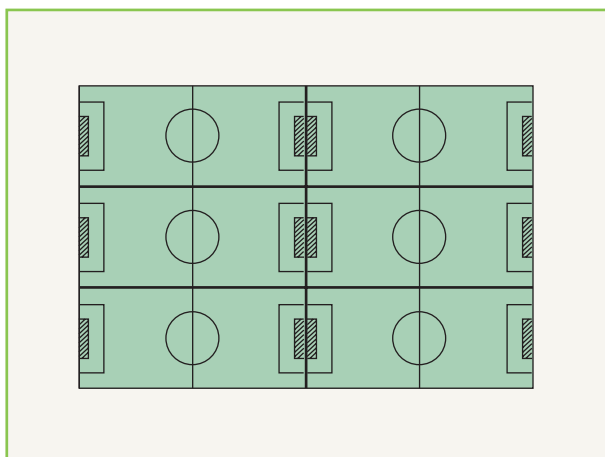


Un professeur demande à ses élèves de la classe de 3^e T de trouver tous les nombres dont le carré est égal à 100.

1. Karim utilise la touche **racine carrée** $\sqrt{\quad}$ de sa calculatrice et propose un nombre. **Quel est ce nombre ? Vérifier que cette proposition est correcte.**
2. Élodie propose comme autre solution le nombre (-10) . **Élodie a-t-elle raison ? Pour le vérifier, calculer $(-10)^2$.**
3. **Pour quelles valeurs de x a-t-on $x^2 = 100$?**
4. Le professeur demande ensuite les solutions de l'équation $x^2 = 64$. **Trouver les deux solutions de cette équation.**

Activité 4

Comment encadrer un résultat ?



Dans le cadre de l'association sportive UNSS, un collège organise un grand tournoi de football à sept. La longueur L d'un terrain doit être comprise entre 50 m et 75 m et sa largeur ℓ doit être comprise entre 45 m et 55 m.

Pour les qualifications, on a choisi de placer, sur une esplanade, les terrains les uns à côté des autres avec 3 terrains dans le sens de la largeur et 2 dans le sens de la longueur.

1. La phrase « La longueur L d'un terrain doit être comprise entre 50 m et 75 m » se traduit par l'encadrement suivant : $50 < L < 75$ (le symbole $<$ signifie « strictement inférieur à »).
- Déterminer l'encadrement de la largeur d'un terrain.**
2. **Quelle est la distance minimale occupée sur l'esplanade par la longueur de 2 terrains ? Quelle est la distance maximale ?**
En déduire un encadrement de la distance occupée sur l'esplanade par la longueur de 2 terrains.
 3. **Donner un encadrement de la distance occupée sur l'esplanade par la largeur de 3 terrains.**
 4. Pour les matchs de la phase finale de ce tournoi, l'organisateur s'interroge sur la possibilité d'augmenter la longueur de chaque terrain de 10 m.
 - a) **Quelle serait la longueur minimale du nouveau terrain ?**
 - b) **Quelle serait sa longueur maximale ?**
 - c) **En déduire un encadrement de la longueur du nouveau terrain.**

... SOLUTIONS DES ACTIVITÉS

Activité 1

Comment calculer avec les puissances ?

1. Le gain pour la première réponse correcte est 2 €.
Pour la deuxième réponse correcte, le gain est doublé ; il est donc égal à $2 \times 2 = 4$ €.
Pour la troisième réponse correcte, le gain est à nouveau doublé ; il est alors égal à $2 \times 2 \times 2 = 8$ €.
2. a) On vérifie que $2^3 = 8$.
b) À l'aide de la calculatrice, on obtient $2^9 = 512$. Ce nombre représente **le gain obtenu après 9 bonnes réponses**. Ce gain est égal à 512 €.
3. Le gain maximum est obtenu pour 15 bonnes réponses. Il est de 2^{15} **soit 32 768** €.
4. a) Le gain obtenu pour 12 réponses correctes est de 2^{12} **soit 4 096** €.
b) Après chaque bonne réponse supplémentaire, le gain est multiplié par 2. Après 3 bonnes réponses supplémentaires, le gain est multiplié par $2 \times 2 \times 2$ ou encore par 2^3 .
5. Avec 12 réponses correctes puis 3 réponses correctes supplémentaires, le candidat a donné 15 réponses correctes. Il obtient alors le gain maximum calculé à la question 3. On en déduit que $2^{15} = 2^{12} \times 2^3$.

Plus généralement, on notera :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

et, si n et p sont deux nombres entiers, $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

Activité 2

Comment redécouvrir la racine carrée ?

1. Pour compléter la deuxième ligne du tableau, on utilise la formule donnant l'aire d'un carré :

$$5^2 = 25 \quad \text{et} \quad 7^2 = 49.$$

2. a) Pour la cinquième colonne, **on propose 6**.
En effet, $6^2 = 6 \times 6 = 36$.
Pour les autres colonnes, on propose **9** et **11**.
b) **On lit à l'affichage 6 et on vérifie que $6 \times 6 = 36$.**
Le tableau complété est le suivant :

Longueur du côté (c)	1	2	3	5	6	7	9	11
Aire du carré (c^2)	1	4	9	25	36	49	81	121

Observons le tableau. Nous avons vu que 6 a pour **carré** 36. On dit que 6 est la **racine carrée** de 36 et on écrit $6 = \sqrt{36}$. De même : $2 = \sqrt{4}$ et $11 = \sqrt{121}$.

DE DÉCOUVERTE

Activité 3

Comment résoudre une équation du type $x^2 = a$?

1. Karim a obtenu à l'aide de sa calculatrice $\sqrt{100} = 10$.

Donc, il propose 10. On vérifie que $10^2 = 10 \times 10 = 100$, donc la proposition est correcte.

2. En remplaçant 10 par le nombre -10 , on vérifie que :

$(-10)^2 = (-10) \times (-10) = 100$, donc **Élodie a raison.**

On peut aussi utiliser la touche x^2 de la calculatrice, mais attention aux parenthèses ! Il faut réaliser (Casio) la séquence : $((-) 10) x^2 EXE$ et non pas $(-) 10 x^2 EXE$. Avec la seconde séquence, on obtiendrait $-(10^2)$ soit -100 .

3. On a $x^2 = 100$ pour $x = \sqrt{100} = 10$ et pour $x = -\sqrt{100} = -10$.

On dit que les nombres 10 et -10 sont **solutions de l'équation** $x^2 = 100$.

4. Les deux solutions de l'équation $x^2 = 64$ sont $x = \sqrt{64} = 8$ et $x = -\sqrt{64} = -8$.

On peut vérifier : $8^2 = 64$ et $(-8)^2 = 64$.

Si a est un nombre strictement positif, alors l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Activité 4

Comment encadrer un résultat ?

1. L'encadrement traduisant les données sur la dimension ℓ est : $45 < \ell < 55$.

2. « En longueur », on souhaite disposer deux terrains, donc la distance minimale occupée par l'esplanade est égale à deux fois la longueur minimale d'un terrain, soit $2 \times 50 = 100$ m.

De même, la distance maximale correspond à deux fois la longueur maximale d'un terrain : $2 \times 75 = 150$ m.

Donc $100 \text{ m} < \text{distance occupée sur l'esplanade} < 150 \text{ m}$.

3. « En largeur », on souhaite disposer trois terrains dont la largeur ℓ vérifie l'inégalité : $45 < \ell < 55$. La distance occupée sur l'esplanade est égale à $3 \times \ell$.

Donc $3 \times 45 < 3 \times \ell < 3 \times 55$.

$135 \text{ m} < \text{distance occupée sur l'esplanade} < 165 \text{ m}$.

4. a) Le nouveau terrain a pour longueur minimale : $50 + 10 = 60$ m.

b) Il a pour longueur maximale $75 + 10 = 85$ m.

c) L'encadrement est donc : $60 \text{ m} < \text{longueur du nouveau terrain} < 85 \text{ m}$.

La résolution des questions précédentes a mis en évidence les propriétés suivantes :

- si $a < b$ et si c est un nombre strictement positif, alors $a \times c < b \times c$;
- si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

L'ESSENTIEL

● Puissance d'exposant entier d'un nombre relatif

Soit a un nombre non nul et n un entier positif non nul.

Le produit de n facteurs égaux à a est appelé puissance $n^{\text{ième}}$ de a .

On le note a^n , n étant l'exposant.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n se lit « a puissance n ». On pose $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Le nombre a^{-n} représente l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Calculs avec les puissances (n et p entiers quelconques) :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} ; \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} ; \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

● Écriture scientifique

L'écriture scientifique permet d'écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^p$ dans laquelle a est compris entre 1 et 10 (exclu) et p est un entier positif, négatif ou nul.

● Racine carrée

Si a désigne un nombre positif, on appelle **racine carrée** de a le nombre positif dont le carré est a . La racine carrée de a est notée $\sqrt{a}$.

Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

La calculatrice permet d'obtenir la valeur (le plus souvent une valeur approchée) de $\sqrt{a}$ en utilisant la touche racine carrée : $\boxed{\sqrt{\quad}}$.

● Résolution des équations du type $x^2 = a$

Si a est un nombre strictement positif, alors l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Si a est un nombre strictement négatif, alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

● Inégalités et opérations

• Inégalités et addition

On peut additionner un même nombre aux deux membres d'une inégalité :

$$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad a + c < b + c.$$

• Inégalités et multiplication

On peut multiplier chaque membre d'une inégalité par un même nombre **strictement positif** :

$$\text{si } a < b \text{ et si } c > 0 \quad \text{alors} \quad a \times c < b \times c.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICES

► Rappels sur les calculs fractionnaires

Point méthode

Si a, b, c, d et k sont des nombres non nuls :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

1 Calculer et simplifier :

$$A = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}.$$

Corrigé

Pour calculer A , il faut d'abord mettre les deux fractions sur le même dénominateur. Pour cela, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 2.

$$A = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6}.$$

A est de la forme $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$. On utilise la relation :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

$$\text{D'où : } A = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6}.$$

La fraction obtenue peut être simplifiée par 3.

$$\text{Donc : } A = \frac{9}{6} = \frac{3 \times 3}{3 \times 2} = \frac{3}{2}.$$

Pour les exercices 2 à 5, calculer et simplifier.

2 $B = \frac{4}{5} + \frac{7}{15}$; $C = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$.

3 $D = \frac{4}{5} - \frac{3}{2}$; $E = \frac{4}{9} - \frac{1}{6}$.

4 $A = \frac{7}{3} \times \frac{5}{3}$; $B = \frac{4}{7} \div \frac{3}{5}$.

5 $C = \frac{-5}{6} \times \frac{4}{7}$; $D = \frac{3}{11} \div \frac{9}{11}$.

6 Calculer les fractions suivantes et les mettre sous la forme d'une fraction irréductible en détaillant les étapes de calcul :

$$A = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5} \right) \times \frac{11}{3}$$

$$B = \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} \right) \times \frac{7}{2}.$$

7 Même question que pour l'exercice précédent :

$$C = \left(1 + \frac{3}{5} \right) \div \frac{5}{4}$$

$$D = \left(\frac{10}{3} - \frac{2}{7} \right) \div \frac{3}{14}.$$

► Calculer avec les puissances

8 Calculer 3^4 , 4^3 et 4×3 .

Corrigé

• Par définition de la puissance d'un nombre, 3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3.

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

• 4^3 est le produit de 3 facteurs égaux à 4.

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

$$4 \times 3 = 12.$$

9 Calculer 4^1 , 3^2 , 5^3 , 1^4 , 2^5 , 10^6 .

10 En informatique, 1 kilooctet est égal à 2^{10} octets. Combien y a-t-il d'octets dans 1 kilooctet ? On utilisera la calculatrice.

11 Calculer $(-3)^2$, $(-5)^1$, $(-4)^3$, $(-2)^4$.

12 Donner une écriture décimale des nombres suivants :

$$2^{-1}; 4^{-3}; 5^{-2}; (-2)^{-5}.$$

13 Calculer en utilisant la calculatrice les nombres suivants :

$$1,1^2; 2,3^4; (-4,1)^3; (-3,89)^1.$$

14 Écrire chaque expression suivante sous la forme a^p et la calculer.

$$A = 3^7 \times 3^5$$

$$B = \frac{4^5}{4^3}$$

$$C = 2^6 \times 5^6.$$

Corrigé

• A est de la forme $a^n \times a^p$.

On utilise la propriété $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

$$\text{Donc : } A = 3^7 \times 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}.$$

$$A = 531\,441.$$

• B est de la forme $\frac{a^n}{a^p}$.

On utilise la propriété $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

$$B = \frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2.$$

$$B = 16.$$

• C est de la forme $a^n \times b^n$.

On utilise la propriété $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

$$C = 2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6.$$

$$C = 1\,000\,000.$$

15 Recopier et compléter :

$$D = 4^6 \times 4^5 = 4^{\dots + \dots} = 4^{\dots}$$

$$E = 2^3 \times 2^{\dots} = 2^7$$

$$F = 7^8 \times 5^8 = \dots^8$$

$$G = \frac{9^7}{9^3} = 9^{\dots - \dots} = 9^{\dots}$$

$$H = \frac{(-5)^{12}}{(-5)^{\dots}} = (-5)^7$$

$$I = \frac{4,21^{\dots}}{4,21^8} = 4,21^{-3}.$$

Pour les exercices 16 à 19, écrire l'expression sous la forme a^p et la calculer.

$$16 \quad A = (-3)^4 \times (-3)^6$$

$$B = 3^7 \times 8^7.$$

$$17 \quad C = 1,6^8 \times 1,6^{-3}$$

$$D = \frac{7^3}{7^8}.$$

$$18 \quad A = \frac{1}{4^{-3} \times 4^{-5}}$$

$$B = \frac{5^2 \times 5^7}{5^4}.$$

$$19 \quad C = \frac{2^6 \times 7^6}{14^2}$$

$$D = \frac{11^2 \times 11^5 \times 11^{-3}}{11^4 \times 11^{-2}}.$$

► Calculer avec les puissances de 10

Le saviez-vous ?

Les puissances de 10 peuvent s'écrire facilement en écriture décimale.

Soit n un entier naturel non nul.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{10 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{\substack{n \text{ chiffres} \\ \text{après la virgule}}}$$

20 Écrire 10^5 et 10^{-5} en écriture décimale.

Corrigé

$$10^5 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{5 \text{ facteurs}} = \underbrace{100\,000}_{5 \text{ zéros}}$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \underbrace{0,000\,01}_{5 \text{ chiffres}}$$

21 Écrire les nombres suivants en écriture décimale :

$$10^4; 10^{-2}; 10^3; 10^{-4}.$$

22 Écrire les quatre nombres suivants sous la forme 10^n .

1 000 000

100

0,001

0,000 001

23 Écrire A sous la forme 10^n , puis donner son écriture décimale.

$$A = \frac{10\,000 \times 100 \times 10^{-3}}{1\,000\,000 \times 1\,000}$$

Point méthode

p est un nombre entier positif.

Pour multiplier un nombre par 10^p , on décale la virgule de p rangs vers la droite.

Pour multiplier par 10^{-p} , on décale la virgule de p rangs vers la gauche.

On ajoute des zéros si nécessaire.

24 Calculer $5,1 \times 10^5$ et $12,31 \times 10^{-3}$.

Corrigé

Pour calculer $5,1 \times 10^5$, on décale la virgule de 5 rangs vers la droite :

$$5,1 \times 10^5 = 510\,000.$$

Pour calculer $12,31 \times 10^{-3}$, on décale la virgule de 3 rangs vers la gauche :

$$12,31 \times 10^{-3} = 0,012\,31.$$

25 Recopier et compléter :

$$25\,000 = 25 \times 10^{\dots} = \dots \times 10^4$$

$$0,039\,7 = 397 \times 10^{\dots} = \dots \times 10^{-2}.$$

26 Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$$12,34 \times 10^3$$

$$3,85 \times 10^5$$

$$0,956 \times 10^{-3}$$

$$0,065\,4 \times 10^5.$$

27 Même question que pour l'exercice précédent :

$$8,541 \times 10^{-7}$$

$$954,2 \times 10^{-6}$$

$$80,2 \times 10^{-2}$$

$$2,09 \times 10^1.$$

Écriture scientifique

Point méthode

Tout nombre décimal peut s'écrire de plusieurs manières sous forme $a \times 10^n$.

Par exemple :

$$130 = 130 \times 10^0 = 13 \times 10^1 = 1,3 \times 10^2$$

$$130 = 0,13 \times 10^3 = 1\,300 \times 10^{-1}.$$

Parmi toutes ces écritures, une seule est telle que le nombre a soit compris entre 1 et 10 (exclu). Cette écriture est l'écriture scientifique. Ici : $1,3 \times 10^2$.

Pour obtenir l'écriture scientifique d'un nombre décimal :

- on introduit une virgule si nécessaire ou on déplace la virgule existante jusqu'à ce qu'il n'y ait qu'un seul chiffre (différent de zéro) avant la virgule ;

- on détermine l'exposant de 10 en comptant les déplacements de la virgule :

- si on se déplace vers la gauche, l'exposant est égal au nombre de déplacements ;

- si on se déplace vers la droite, l'exposant est égal à l'opposé du nombre de déplacements.

28 Déterminer l'écriture scientifique des nombres suivants :

147 000 ; 0,003 69.

Corrigé

- Pour 147 000, on introduit une virgule après le 1. On s'est déplacé de 5 rangs vers la gauche, donc l'exposant de 10 est égal à 5 :

$$147\,000 = 1,47 \times 10^5.$$

- Pour 0,003 69, on déplace la virgule de 3 rangs vers la droite, donc l'exposant de 10 est égal à -3 :

$$0,003\,69 = 3,69 \times 10^{-3}.$$

29 Recopier et compléter pour obtenir l'écriture scientifique :

$$2\,700\,000 = \dots, \dots \times 10^{\dots}$$

$$0,24 = \dots, \dots \times 10^{\dots}.$$

30 Déterminer l'écriture scientifique des nombres suivants :

203,54 ; 0,000 012 ; 1 489,65.

31 Même question que pour l'exercice précédent :

0,753 ; 0,095 1 ; 31,907.

32 Parmi les nombres de l'exercice **26**, retrouver ceux qui ne sont pas en notation scientifique et les écrire en notation scientifique.

► Calculer avec les racines carrées

33 Calculer $\sqrt{169}$.

Corrigé

Pour calculer $\sqrt{169}$ avec la calculatrice,

2nd $\sqrt{}$ 169) ENTER

$\sqrt{}$ 169 EXE

On lit $\sqrt{169} = 13$.

34 Calculer les racines carrées suivantes :

$\sqrt{4}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$.

35 Même question que pour l'exercice précédent :

$\sqrt{121}$; $\sqrt{1,44}$; $\sqrt{1,96}$; $\sqrt{225}$.

36 On donne $A = \sqrt{50}$.

Écrire A sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un entier.

Corrigé

- On écrit $50 = 2 \times 25$ (25 est le carré de 5).
- On utilise la formule $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et on obtient $\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = \sqrt{2} \times \sqrt{25}$.

Donc A peut s'écrire $5\sqrt{2}$.

37 Recopier et compléter :

$\sqrt{500} = \sqrt{5 \times \dots} = \sqrt{5} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{5}$
 $\sqrt{108} = \sqrt{3 \times \dots} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$

38 Recopier et compléter :

$\sqrt{112} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{7} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$
 $\sqrt{98} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{2}$

39 Écrire B, C et D sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers et où b est le plus petit possible.

$B = \sqrt{20}$; $C = \sqrt{128}$; $D = \sqrt{125}$.

► Résoudre une équation du type $x^2 = a$

40 Résoudre les équations suivantes :

$x^2 = 0,81$

$x^2 = 11$.

Corrigé

- L'équation $x^2 = 0,81$ a deux solutions : $x = \sqrt{0,81} = 0,9$ et $x = -\sqrt{0,81} = -0,9$.
- L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $x = \sqrt{11}$ et $x = -\sqrt{11}$.

41 Résoudre les équations suivantes :

$x^2 = 1,21$; $x^2 = 16$

$x^2 = 7$; $x^2 = 144$.

42 Sachant que $13^2 = 169$, résoudre, sans utiliser la calculatrice, l'équation : $x^2 = 1,69$.

► Calculer une valeur arrondie

Point méthode

Pour arrondir un résultat à 0,1 (ou au dixième) :

- on observe le résultat ;
- si le deuxième chiffre après la virgule est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors le résultat s'écrit avec la première décimale ;
- si le deuxième chiffre après la virgule est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors le résultat s'écrit en ajoutant 1 à la première décimale.

On procède de manière analogue pour arrondir à 0,01 (au centième), etc.

43 Calculer A et B et arrondir les résultats à 0,01 :

$A = \sqrt{3}$; $B = \sqrt{7}$.

Corrigé

- Pour $\sqrt{3}$, on lit sur la calculatrice : **1.732050808**.

Le troisième chiffre après la virgule est 2, alors la valeur arrondie s'écrit avec la deuxième décimale lue.

Donc la valeur arrondie à 0,01 de A est **1,73**.

- Pour $\sqrt{7}$, on lit sur la calculatrice, **2.645751311**.

Le troisième chiffre après la virgule est 5, alors on ajoute 1 à la deuxième décimale lue ($4 + 1 = 5$).

Donc la valeur arrondie à 0,01 de B est **2,65**.

44 Arrondir les nombres suivants à 0,001 :

$B = 9,123\ 64$; $C = 12,637\ 21$

$D = 3,008\ 5$; $E = 5,589\ 36$.

45 Calculer le périmètre p d'un cercle de rayon $R = 4$ cm.

Arrondir le résultat à 0,01.

On rappelle : $p = 2\pi R$.

On utilisera la touche $\boxed{\pi}$ de la calculatrice.

46 Calculer A et arrondir le résultat à 0,1 :

$$A = \frac{35,3^2 + \sqrt{13}}{7}.$$

47 Calculer B et C et arrondir à 0,01 :

$$B = \sqrt{17} + 3,1^2 \quad ; \quad C = \frac{5,9^3 - 4,2^2}{8}.$$

► Inégalités

48 Si $5 < a < 7$:

1. Donner un encadrement de $a - 3$.
2. Donner un encadrement de $2a$.

Corrigé

1. Pour encadrer $a - 3$, on ajoute (-3) dans chaque membre de l'inégalité $5 < a < 7$:

$$5 + (-3) < a + (-3) < 7 + (-3) \\ 2 < a - 3 < 4.$$

2. Pour encadrer $2a$, on multiplie par 2 chaque membre de l'inégalité $5 < a < 7$:

$$2 \times 5 < 2a < 2 \times 7 \\ 10 < 2a < 14.$$

49 Si $4 < b < 9$:

1. Donner un encadrement de $b + 7$.
2. Donner un encadrement de $b - 2$.

50 Si $-2 < c < 5$:

1. Donner un encadrement de $6 \times c$.
2. Donner un encadrement de $3c + 1$.

51 Un carré a un côté de longueur comprise entre 3 et 4 cm. Donner un encadrement de son périmètre.

Point méthode

Pour obtenir l'encadrement d'une somme ou d'un produit, on utilisera les règles suivantes :

- on peut ajouter membre à membre deux inégalités ;
- on peut multiplier membre à membre des inégalités composées de nombres positifs.

52 On donne les encadrements suivants :

$$3,4 < x < 3,8$$

$$7,8 < y < 7,9.$$

1. Écrire un encadrement de $x + y$.
2. Écrire un encadrement de $x \times y$.

53 Sachant que :

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$\text{et } 1,73 < \sqrt{3} < 1,74$$

1. Donner un encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
2. Donner un encadrement de $\sqrt{6}$.

54 La longueur L et la largeur I d'un terrain rectangulaire sont telles que :

$$125 \text{ m} < L < 130 \text{ m}$$

$$\text{et } 75 \text{ m} < I < 81 \text{ m}.$$

Donner un encadrement de l'aire, en m^2 , du rectangle.

55 Un carré a une aire de 54 m^2 .

On désigne par c la mesure en mètres du côté de ce carré.

1. Exprimer le nombre c sous la forme $a\sqrt{6}$ où a est un nombre entier.
2. Donner un encadrement de la valeur de c au centimètre près.

56 Un carré a un côté de longueur comprise entre 3 cm et 3,5 cm.

1. Traduire cet énoncé par un encadrement.
2. Donner un encadrement de l'aire en cm^2 du carré.

PROBLÈMES

*, **, *** : niveau de difficulté du problème – **C** : problème corrigé (voir solution page 145).

57 * Donner l'écriture scientifique, puis l'écriture décimale des nombres suivants :

$$A = \frac{7 \times 10^5}{2 \times 10^2}$$

$$B = \frac{0,005 \times 10^6}{25 \times 10^{-4}}$$

$$C = \frac{2 \times 10^6 \times 35 \times 10^{-2}}{5 \times 10^4}$$

$$D = 4 \times 10^6 \times 25 \times 10^{-4}.$$

58 * $A = \sqrt{18} \times \sqrt{6}$

et $B = 5\sqrt{12} + 6\sqrt{3} - \sqrt{300}.$

Écrire A et B sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier.

59 * Brevet Recopier et compléter le tableau après avoir effectué les calculs.

a	2a	a ²	2a ²	(2a) ²
2				
-3				
	$\frac{4}{3}$			

60 * Brevet Calculer :

$$A = 12 - 5 \times 2$$

$$B = (-4) \times (4 - 2^2)$$

$$C = \frac{10^4 \times (10^2)^3 \times 10^{-4}}{10^6}$$

$$D = 3\sqrt{36} + 2\sqrt{100} - \sqrt{144}$$

$$E = \left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{15}{7} \div \frac{5}{14}\right).$$

61 * Brevet Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{18}{5} \div 6.$$

62 * Brevet Effectuer les opérations et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible (le détail des calculs est demandé) :

$$B = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{18}.$$

63 ** Brevet C

Calculer les fractions suivantes et les mettre sous la forme d'une fraction irréductible en détaillant chaque étape de calcul :

$$C = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{10}{7} \text{ et } D = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \div \frac{7}{4}.$$

64 ** Brevet On donne les quatre fractions suivantes :

$$C = -\frac{1}{2}; D = \frac{7}{5}; E = -\frac{4}{3}; F = \frac{3}{10}.$$

1. Ranger ces fractions dans l'ordre croissant.

2. Calculer : D + E.

3. Calculer : E × F.

Les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

65 * Brevet**

1. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = 1 - \frac{59}{60}.$$

2. Monsieur Nérourge dispose de 4 bouteilles de grenadine :

– deux bouteilles contiennent $\frac{1}{5}$ de litre chacune ;

– la troisième contient $\frac{1}{4}$ de litre ;

– la quatrième contient $\frac{1}{3}$ de litre.

Peut-il verser le contenu de ces quatre bouteilles dans un récipient de un litre ? Justifier la réponse.

66 * Brevet Recopier et placer les signes <, > ou =.

$$2,9 \dots \sqrt{8} \quad ; \quad 3,14 \dots \pi$$

$$\frac{3}{6} \dots 0,6 \quad ; \quad \frac{1}{2} \dots \frac{1}{3}.$$

67 ** Brevet On donne $F = 5\sqrt{20} + \sqrt{45}$;

$$G = 5\sqrt{20} \times \sqrt{45} \times \sqrt{5}.$$

1. Écrire les nombres F et G sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier.

2. Ranger par ordre croissant les nombres F et G.

68 * Brevet Calculer B et arrondir le résultat à 0,001 :

$$B = \frac{5,6^2 + \sqrt{7}}{13}.$$

69 ** Brevet C

1. Donner la valeur décimale de $\sqrt{11}$ arrondie à 0,001.

2. Classer les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$\frac{10}{3} ; \quad \sqrt{11} ; \quad (1,82)^2.$$

70 * Brevet Calculer :

1. 10^2 ; 2^3 ; puis $10^2 + 2^3$.

2. 10^3 ; 10^{-2} ; puis $10^3 \times 10^{-2}$.

3. $\sqrt{16}$; $\sqrt{4}$; puis $\frac{\sqrt{16} + \sqrt{4}}{2}$.

71 ** Brevet Écrire sous forme décimale :

$$A = 5,4 \times 10^{-2}$$

$$B = 6,4 \times 10^3$$

$$C = 7,1 \times 10^{-3}.$$

72 * Brevet**

Recopier et compléter le tableau suivant :

Écriture décimale	0,02	0,01	
Écriture fractionnaire	$\frac{1}{50}$		$\frac{3}{10}$
Notation scientifique	2×10^{-2}		

73 ** Brevet C

Calculer la valeur numérique de l'expression :

$$G = 3,8 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}.$$

Donner le résultat :

1. sous la forme d'un nombre décimal ;

2. en notation scientifique.

74 * Brevet**

L'écriture scientifique du nombre 50 000 000 est 5×10^7 et celle de 0,04 est 4×10^{-2} .

Recopier et compléter le tableau suivant en donnant l'écriture scientifique de chaque nombre ou résultat de calculs.

$\frac{100\,000 \times 10\,000 \times 1\,000\,000\,000}{10 \times 1\,000} = \dots$
$50\,000\,000 \times 0,000\,002 = \dots$
$(30\,000 \times 300)^2 = \dots$
$0,000\,003^4 = \dots$

75 ** Brevet Prouver par les calculs que 0,000 25 est l'écriture décimale du nombre :

$$A = \frac{65 \times 10^3 \times 10^{-5}}{26 \times 10^2}.$$

Donner l'écriture scientifique du nombre A.

76 ** Brevet

Calculer et donner le résultat d'abord en écriture décimale, puis en écriture scientifique :

$$C = 153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}.$$

77 ** Brevet Calculer :

$$A = 10^6 \times 10^{-3} \times 0,001$$

$$B = 0,01 \times 10^4 \times 10^{-6} \times 10\,000.$$

78 ** Brevet Donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de C :

$$C = \frac{4,9 \times 10^{-3} \times 1,2 \times 10^{13}}{14 \times 10^2 \times 3 \times 10^5}.$$

79 ** Brevet

Calculer la valeur exacte des expressions suivantes et l'écrire sous la forme la plus simple :

$$A = 3 + 4 \times 5 + 2 \times (15 + 3) ;$$

$$B = \frac{1,25 + 7,50}{0,5 \times 5} ; \quad C = \frac{2\,000 + 3 \times 10^4}{4 \times 10^2} ;$$

$$D = \frac{3}{5} + \frac{8}{3} ; \quad E = \frac{45}{22} \times \frac{66}{15} ;$$

$$F = \sqrt{14 \times 350}.$$

80 ** Brevet

On considère les nombres :

$$E = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{2} + 2 \right) ;$$

$$F = \frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times 10^{-5}}{15 \times 10^2} ;$$

$$G = \sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{700}.$$

1. Calculer E et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Donner l'écriture scientifique du nombre F.

3. Démontrer que $G = 9\sqrt{7}$.

81 * Brevet**

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	x^2	$\sqrt{x}$	$\frac{3x}{4}$	$2x - 1$
4				
9				
0				
49				

2. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} ; \quad \frac{7}{3} \times \frac{12}{27} ; \quad 3 : \frac{3}{4}.$$

3. En 2003, 19 élèves d'une classe de 3^e, sur un effectif total de 28, ont obtenu le brevet. Calculer le pourcentage de réussite à 10^{-2} près.

82 ** Brevet

1. Calculer A et B et exprimer le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} ; \quad B = \frac{7}{10} \times 4^2.$$

2. Calculer la valeur des expressions suivantes :

$$C = \frac{3^7 \times 3^5}{3^9} ; \quad D = \sqrt{6,25}.$$

83 ** Brevet

1. a) Effectuer les calculs suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \frac{2}{7} ; \quad B = \frac{12 \times 10^{-3}}{16 \times 10^{-4}} ; \quad C = \frac{1}{9} + \frac{1}{12}.$$

b) En électricité, pour calculer des valeurs de résistances, on utilise la formule :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Sachant que $R_1 = 9$ ohms et $R_2 = 12$ ohms, déterminer la valeur exacte de R.

2. Écrire le nombre $\sqrt{180} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier.

84 * Brevet**

1. Calculer A et B en faisant apparaître chaque étape du calcul et en donnant les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

$$A = 1 - \frac{5}{2} \times \frac{4}{15} ; \quad B = \frac{2 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}}.$$

2. Déterminer l'écriture scientifique du nombre $C = 7,5 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-14}$.

3. a) Vérifier que $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

b) On considère le nombre $B = 4\sqrt{48} + 8\sqrt{3}$.

Écrire E sous la forme $b\sqrt{3}$ où b est un nombre entier.

85 * Brevet**

1. Effectuer les quatre calculs suivants ; chaque résultat sera donné sous la forme d'un entier.

$$a = \frac{3,9 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-5}} ; \quad b = \frac{15}{9} \times \frac{12}{5} - 3 ;$$

$$c = \left(2 + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) ; \quad d = \frac{4 \times \sqrt{24}}{\sqrt{6}}.$$

2. On construit un codage de la façon suivante :

Nombres entiers	1	2	3	...	...	...	...	26
Codes	A	B	C	...	...	...	...	Z

a) Quel est le code du nombre 13 ?

b) Quel est le mot formé en codant les quatre résultats obtenus à la première question ?

Si les calculs sont exacts, on doit retrouver un mot de circonstance.

86 * Brevet**

1. Les calculs intermédiaires doivent figurer sur la copie.

a) Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un entier, le nombre :

$$A = \sqrt{75} + 4\sqrt{12}.$$

b) Prouver que :

$$2 + \frac{3}{4} = -\frac{11}{17} ; \quad \frac{3}{4} - 5$$

$$\frac{35 \times 10^{22} \times 2 \times 10^{-12}}{42 \times 10^{10}} = \frac{5}{3}.$$

2. Dans cette question, seuls les résultats finaux sont attendus et la calculatrice peut être utilisée.

a) Donner la valeur arrondie à 0,001 du nombre : $B = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$.

b) Donner l'écriture scientifique du nombre :

$$C = \frac{10^{-4} \times 4 \times 10^6 \times 5^2}{2 \times 10^{-10}}.$$