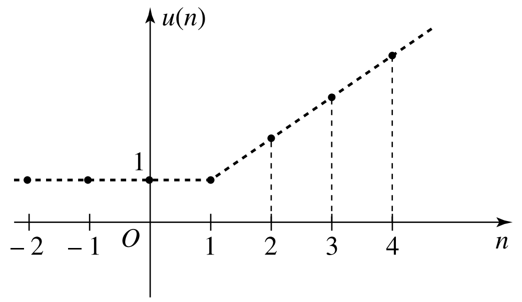
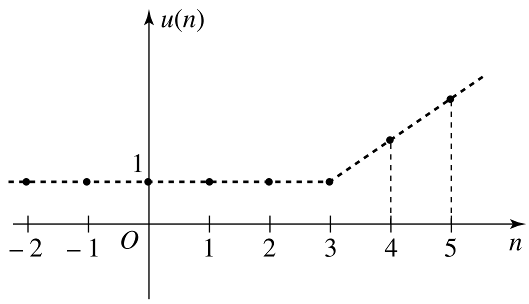
Chapitre 9. Transformée en Z

Exercice 1

1.



2.



Exercice 2

1. (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 4$ pour tout entier n.

$u_0 = 0$; $u_1 = 4$; $u_2 = 7$; $u_3 = \frac{37}{4}$.

2. $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n.

a) $v_0 = -16$; $v_1 = -12$; $v_2 = -9$; $v_3 = -\frac{27}{4}$.

b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \left(\frac{3}{4}u_n + 4\right) - 16 = \frac{3}{4}u_n - 12$:

$$= \frac{3}{4}(u_n - 16) = \frac{3}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = -16$.

c) $v_n = -16\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3. $u_n = v_n + 16 = -16\left(\frac{3}{4}\right)^n + 16$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 16$.

Exercice 3

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1\,024}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2\,047}{1\,024}.$$

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$.

3. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} = \frac{1}{2^n} = 1\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Exercice 4

$x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

1. $S = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i x^i$

$$= 1\frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)}.$$

2. $S_n = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = \frac{1}{1 + x}$.

Exercice 5

$x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

1. $g(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

2. On utilise le théorème sur la dérivation :

$g'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = n\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n-1}$

$f(x) = xg'(x) = \frac{x}{(1 - x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$

$$= n\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

3. On choisit $x = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2} \in \left]-1\,;1\right[\right)$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Exercice 6

1. $f(t) = \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$.

2. $\dfrac{1}{t+1} = 1 - t + t^2 + \ldots (-1)^n t^n + \ldots$ et

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \ldots + (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^n + \ldots\right).$$

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2} - \frac{3t}{4} + \frac{7t^2}{8} + \frac{15t^3}{16} + \frac{31t^4}{32} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right) t^n.$$

Exercice 7

a) $F(z) = \dfrac{2z}{(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{z^2+z}{(z-1)^2}$;

b) $F(z) = \dfrac{3z}{(z-3)^2}$; $F(z) = \dfrac{3z}{(z-3)^2}$; $F(z) = \dfrac{3z(z+3)}{(z-1)^3}$;

c) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + \dfrac{2z}{z-1} = \dfrac{2z^2-z}{(z-1)^2}$;

d) $F(z) = z^2 \cdot \dfrac{3z(z+3)}{(z-1)^3}$.

Exercice 8

1. $x(n) = n\,u(n)$; $(Zx)(7) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

$x_1(n) = nu(n-1) = (n-1)\,u(n-1) + u(n-1)$

$(Zx_1)(z) = z^{-1}\dfrac{z}{(z-1)^2} + z^{-1}\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$.

$u_2(n) = nu(n-2) = (n-2)\,u(n-2) + 2u(n-2)$

$(Zx_2)(z) = z^{-2}\dfrac{z}{(z-1)^2} + 2z^{-2}\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{2z-z^{-1}}{(z-1)^2}$.

$x_3(n) = (n+1)\,u(n) = nu(n) + u(n)$

$(Zx_3)(z) = F(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$.

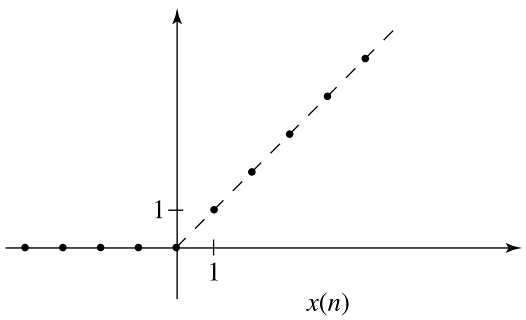
$x_4(u) = (n+1)\,u(n-1) = (n-1)\,u(n-1) + 2u(n-1)$

$(Zx_4)(z) = z^{-1}\dfrac{z}{(z-1)^2} + 2z^{-1}\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{2z-1}{(z-1)^2}$.

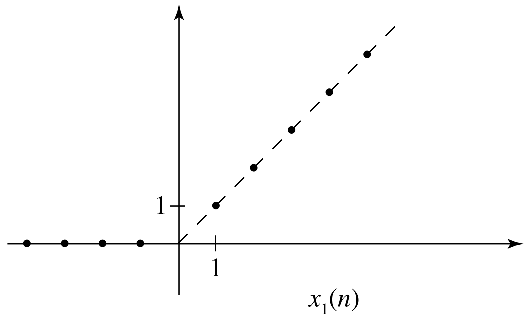
$x_5(n) = (n+1)\,u(n-2) = (n-2)\,u(n-2) + 3u(n-2)$

$(Zx_5)(z) = z^{-2}\dfrac{z}{(z-1)^2} + 3z^{-2}\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{3-2z^{-1}}{(z-1)^2}$.

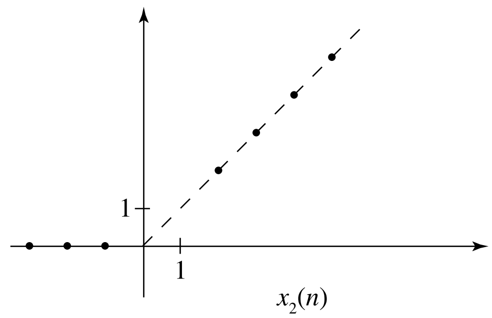
2.



$(Zx)(z) = X(z)$.

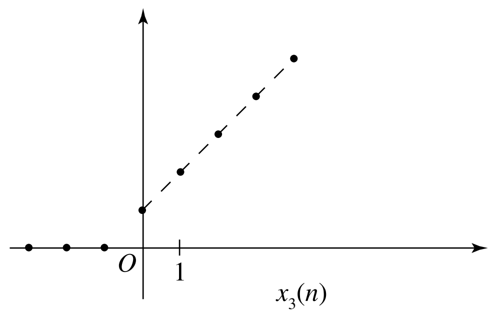


$(Zx_1)(z) = X(z) - x(0)z^0 = X(z)$.



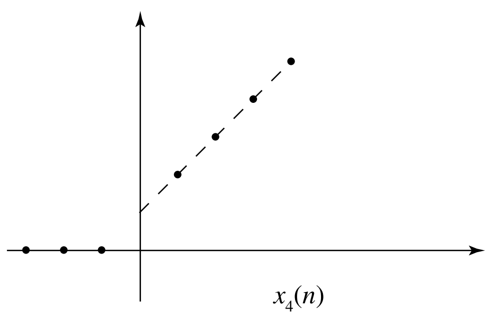
$(Zx_2)(z) = X(z) - x(0)z^0 - x(1)z^{-1}$

$= \dfrac{z}{(z-1)^2} - z^{-1} = \dfrac{2-z^{-1}}{(z-1)^2}$.



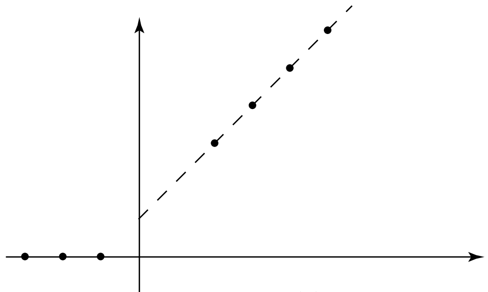
$x_3(n) = n\,u(n) + u(n)$

$(Zx_3)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-1}$.



$x_4(n) = n\,u(n) + u(n) - \mathrm{d}(n)$

$(Zx_4)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-1} - 1$.



$x_5(n) = n\,u(n) + u(n) - \mathrm{d}(n) - \mathrm{d}(n-1)$

$(Zx_5)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} + \dfrac{z}{z-1} - 1 - \dfrac{1}{z}.$

Exercice 9

a) $F(z) = z\dfrac{z - \cos(1)}{z^2 - 2z\cos(1) + 1}$; $F(z) = \dfrac{z\sin(1)}{z^2 - 2z\cos(1) + 1}.$

b) $F(z) = z\dfrac{z - \cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$; $F(z) = \dfrac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}.$

c) si $\omega = \dfrac{\pi}{2}$

pour $f(n) = \cos\left(n\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)u(n)$

$(f(x))_{n \in N} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

$F(x) = \dfrac{z^2}{z^2 + 1}$

pour $f(x) = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)u(n)$

$(f(x))_{n \in N} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$

$F(x) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$

si $\omega = \pi$

pour $f(x) = \cos(n\pi)$ de $u(n) = (-1)^n\,u(n)$; $F(z) = \dfrac{-z^2}{z^2 - 1}$

pour $f(x) = \sin(n\pi)\,u(n) = 0$; $F(z) = 0$.

Exercice 10

$f(n) = \dfrac{1}{n!}$ $\quad F(z) = \sum_0^{\infty} f(x)\cdot z^{-n} = \sum_0^{\infty} \dfrac{1}{n!}z^{-n} = \mathrm{e}^{z^{-1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$

$f(n) = \dfrac{2^n}{n!}$ $\quad F(z) = \sum_0^{\infty} f(x)\cdot z^{-n} = \sum_0^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}z^{-n} = \mathrm{e}^{2z^{-1}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{z}}.$

Exercice 11

1. $F(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3}.$ **2.** $F(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^3}.$

3. $F(z) = 1 - \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3}.$ **4.** $F(z) = 3 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z^2}.$

5. $F(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{1}{z^3}.$ **6.** $F(z) = -\dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{z^2}.$

Exercice 12

$F(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{2}{z - 2^{\frac{T}{2}}}.$

Exercice 13

a) $F(z) = \dfrac{z}{z^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z+1}\right)$ $(|z| > 1)$.

Donc $f(n) = \dfrac{1}{2}(1 - (-1)^n)$.

b) $\dfrac{z}{z^2 - 1} = \dfrac{z^{-1}}{1 - z^{-2}}$; $\dfrac{z^{-1}}{1 - z^{-2}} = \sum_0^{\infty} z^{-2n-1}$

$= z^{-1} + z^{-3} + z^{-5} + z^{-7} + \ldots$

$\begin{cases} f(n) = 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ f(n) = 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$ ou $f(n) = \dfrac{1}{2}(1 - (-1)^n)$.

Exercice 14

a) $F(z) = \dfrac{z-1}{z+3} = 1 - \dfrac{4}{z+3}$;

$f(n) = \mathrm{d}(n) - 4(-3)^{n-1}u(n-1)$.

b) $F(z) = \dfrac{-z}{z-1} + \dfrac{z}{z-2}$; $f(n) = (-1 + 2^n)u(n)$.

c) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = \dfrac{-z}{z-1} + \dfrac{2z}{z-2}$;

$f(n) = (-1 + 2(2^n))u(n)$.

d) $F(z) = \dfrac{3z^2}{z^2 - z - 2} = \dfrac{z}{z+1} + \dfrac{2z}{z-2}$;

$f(n) = ((-1)^n + 2(2^n))u(n)$.

e) $F(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+4)} = \dfrac{\left(\frac{9}{25}\right)z}{z-1} + \dfrac{\left(\frac{5}{25}\right)z}{(z-1)^2} + \dfrac{\left(\frac{16}{25}\right)z}{z+4}$;

$f(n) = \dfrac{1}{25}(9 + 5n + 16(-4)^n)u(n)$.

Exercice 15

Soit $F(z) = \dfrac{2z}{(z-2)^2} = \dfrac{\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2} - 1\right)^2}$; $f(n) = 2^n n u(n)$.

Exercice 16

1. $\lim\limits_{n \to 0} x(n) = x(0) = \lim\limits_{|z| \to +\infty} (Zx)(z) = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x(n) = \lim\limits_{|z| \to 1} (z-1)\,(Zx)(z) = \lim\limits_{|z| \to 1} \dfrac{2z}{(2z-1)}.$

2. $X(z) = \dfrac{2z}{z-1} - \dfrac{4z}{2z-1}$; $f(n) = 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)u(n)$;

$x(0) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x(n) = 2$.

Exercice 17

1. $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$, $y(3) = 8$ on peut *supposer* que $y(n) = 2^n u(n)$.

2. $z(Y(z) - 1) - 2Y(z) = 0$; $Y(z) = \dfrac{z}{z-2}$; $y(n) = 2^n u(n)$.

Exercice 18

$$z(Y(z) - y_0) - Y(z) = \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}.$$

$$Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + y_0\frac{z}{z-1} \text{ ; } y(n) = (n^2 + y_0)u(n).$$

Exercice 19

Transformée en z de $y(n) = Y(n+1) = zY(z)$ et de $y(n+2) = z^2Y(z) - z$.

L'équation différentielle devient :

$$(z^2 - 2z + 1)Y(z) - z = \frac{2z}{z-1}.$$

$$Y(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \text{ ; } y(n) = n^2u(n).$$

Exercice 20

Résoudre l'équation aux différences à l'aide de la transformée en z :

$$\begin{cases} y(n+2) - 4y(n) = 4\mathrm{d}(n-2)u(n-2) \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Transformée en z de $y(n) = Y(z)$; de $y(n+1) = zY(z)$ et de $y(n+2) = z^2Y(z)$.

L'équation aux différences devient : $(z^2 - 4)\,Y(z) = \dfrac{4}{z^2}$.

D'où

$$Y(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+2}$$

$$= -z^{-2}1 + \frac{1}{4}z^{-1}\frac{z}{z-2} - \frac{1}{4}z^{-1}\frac{z}{z+2}$$

$$y(n) = -\mathrm{d}(n-2)u(n-2) + \frac{1}{4}2^{n-1}u(n-1) - \frac{1}{4}(-2)^{n-1}u(n-1);$$

Exercice 21

1. Pour $n = 0$: $y(0) + y(-1) = u(0)$.
Le signal est causal, donc $y(-1) = 0$, donc $y(0) = 1$.
On utilise la transformation en z.

2. Transformée en z de $y(n) = Y(z)$; de $y(n-1) = z^{-1}Y(z)$.

L'équation devient $Y(z) + z^{-1}Y(z) = \dfrac{z}{z-1}$.

On sort $Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^{-1}+1)} = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+1)}$.

3. $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{z-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{z+1}$

donc $Y(z) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)z}{z-1} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)z}{z+1}$.

4. $y(n) = \dfrac{1}{2}u(n) + \dfrac{1}{2}(-1)^n u(n)$

$y(n) = \{0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}\ u(n)$.

Exercice 22

1. Pour $n = 0$: $y(0) - 2y(-1) = u(0)$.
le signal est causal donc $y(-1) = 0$ donc $y(0) = 0$.

2. Transformée en z de $y(n) = Y(z)$; de $y(n-1) = z^{-1}Y(z)$; de $y(n-2) = z^{-2}Y(z)$.

L'équation devient $Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$.

On sort $Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(1-2z^{-1})} = \dfrac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$.

3. $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \dfrac{-2}{z-1} + \dfrac{-1}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{z-2}$

donc $Y(z) = \dfrac{-2z}{z-1} + \dfrac{-z}{(z-1)^2} + \dfrac{2z}{z-2}$.

4. $y(n) = -2u(n) - nu(n) + 2(2)^n u(n)$.

Exercice 23

1. Pour $n = 0$: $y(0) - 2y(-1) + y(-2) = u(0)$.
Le signal est causal donc $y(-1) = y(-2) = 0$ donc $y(0) = 1$.
Pour $n = 1$: $y(1) - 2y(0) + y(-1) = u(0)$ donc $y(1) = 3$.

2. Transformée en z de $y(n) = Y(z)$; de $y(n-1) = z^{-1}Y(z)$; de $y(n-2) = z^{-2}Y(z)$.

L'équation devient $Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, on sort $Y(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^3}$.

3. $z^2 = \dfrac{1}{2}(z+1) + \dfrac{3}{2}(z-1) + 2(z-1)^2$.

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3} = \frac{1}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{3}{2}\frac{z}{(z-1)^2} + 2\frac{z}{z-1}$$

4. $y(n) = \dfrac{1}{2}n^2u(n) + \dfrac{3}{2}nu(n) + 2u(n) = \dfrac{(n^2+3n+2)}{2}u(n)$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}u(n).$$

Exercice 24

$X(z) = \dfrac{3z^2}{z^2+z-2}$ $(|z| > 1)$

1. a) $X(z) = a + \dfrac{b}{z+2} + \dfrac{c}{z-1}$

$$= \frac{a(z^2+z-2)+b(z-1)+c(z+2)}{z^2+z-2}$$

$$X(z) = \frac{az^2+(a+b+c)z-2a-b+2c}{z^2+z-2}$$

$\begin{cases} a=3 \\ a+b+c=0 \\ -2a-b+2c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b+c=-3 \\ -b+2c=6 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \\ b=-4 \end{cases}$

$X(z) = 3 - \dfrac{4}{z+2} + \dfrac{1}{z-1}$.

b) $x(n) = 3d(n) - 4 \times (-2)^{n-1}\, u(n-1) + u(n-1)$

$x(n) = 3d(n) + (1 - (-2)^{n+1})\, u(n-1)$

c) $x(0) = 3$

$x(1) = 1 - 4 = -3$

$x(2) = 1 + 8 = 9$

$x(3) = 1 - 16 = -15$

$x(4) = 1 + 32 = 33$

2. a) $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{A}{z+2} + \dfrac{B}{z-1} = \dfrac{A(z-1)+B(z+2)}{z^2+z-2}$

$$= \frac{(A+B)z - A + 2B}{z^2+z-2}$$

$\begin{cases} A+B=3 \\ -A+2B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=2 \end{cases}$

$\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{2}{z+2} + \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow X(z) = \dfrac{2z}{z+2} + \dfrac{z}{z-1}$

b) $x(n) = 2 \times (-2)^n\, u(n) + u(n) = (1 + 2 \times (-2)^n)\, u(n)$.

c) $x(0) = 1 + 2 = 3$

$x(1) = 1 - 4 = -3$

$x(2) = 1 + 8 = 9$

$x(3) = 1 - 16 = 15$

$x(4) = 1 + 32 = 33$

3. a)

$$\begin{array}{l|l}
3z^2 & \\
3z^2 + 3z - 6 & z^2 + z - 2 \\
\hline
\quad -3z + 6 & 3 - 3z^{-1} + 9z^{-2} - 15z^{-3} + 33z^{-4} \\
\quad -3z - 3 + 6z^{-1} & \\
\hline
\qquad 9 - 6z^{-1} & \\
\qquad 9 + 9z^{-1} - 18z^{-2} & \\
\hline
\qquad\quad -15z^{-1} + 18z^{-2} & \\
\qquad\quad -15z^{-1} - 15z^{-2} + 30z^{-3} & \\
\hline
\qquad\qquad 33z^{-2} - 30z^{-3} &
\end{array}$$

b) On a $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} = x(k)z^{-k}$.

Donc $x(0) = 3$; $x(1) = -3$; $x(2) = 9$; $x(3) = -15$; $x(4) = 33$.

Exercice 25

$\begin{cases} e(n) = 0 & \text{si } n < 0 \\ e(n) = E & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$

$s(n) - 2s(n-1) = e(n)$

s causal : $s(n-1) = 0$

$X(z) = -2z^{-1}\, X(z)$

$$X(z) = \frac{E\dfrac{z}{z-1}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{Ez^2}{(z-1)(z-2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = E\left(\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2}\right) = E \times \frac{(a+b)z - 2a - b}{(z-1)(z-2)}$$

$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a-b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

$$\frac{X(z)}{z} = E\left(\frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}\right)$$

$$X(z) = E\left(\frac{-z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}\right)$$

$x(n) = E\big(-u(n) + 2 \times 2^n\, u(n)\big)$

$x(n) = E(2^{n+1} - 1)\, u(n)$

Exercice 26

Partie A

1. $5\,p\,S(p) - 10 + S(p) = \dfrac{1}{p}$;

$S(p) = \dfrac{10p+1}{5p+1} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{5}{5p+1}$; $s(t) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 1\right) U(t)$.

2.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$s(t)$	2	1,90	1,82	1,76	1,67	1,61	1,55	1,50	1,45	1,41	1,37

Partie B

1. $s(0{,}5(k+1)) = 0{,}9s(0{,}5\,k) + 0{,}1$

$b_{k+1} = a_{k+1} - 1 = 0{,}9a_k + 0{,}1 - 1 = 0{,}9(a_k - 1) = 0{,}9b_k$ et

$b_0 = a_0 - 1 = 1$

$b_k = 0{,}9^k$ et $a^k = 0{,}9^k + 1$. Soit $A(z) = Z(a_k)$.

Alors $Z(a_{k+1}) = zA(z) - 2z$.

2. $zA(z) - 2z = 0{,}9\mathrm{A}(z) + \dfrac{0{,}1z}{z-1}$;

$A(z) = \dfrac{2z^2 - 1{,}9z}{(z-0{,}9)(z-1)} = \dfrac{z}{z-0{,}9} + \dfrac{z}{z-1}$; $a(k) = (0{,}9)k + 1$.

3.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(k)$	2	1,90	1,81	1,73	1,66	1,59	1,53	1,48	1,43	1,39	1,35

Exercice 27

1. Résolution de l'équation différentielle

$y'' + 5y' + 6y = 0(E)$.

$\mathscr{L}[y(t)] = Y(p)$, $\mathscr{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(\mathrm{p}) - y(0)$

$= pY(p)$, $\mathscr{L}[y'(t)] = p2Y(p) - py(0) - y'(0) = pY(p) - 1$.

L'équation différentielle devient

$p2Y(p) - 1 + 5pY(p) + 6Y(p) = 0$.

On sort $Y(p) = \dfrac{1}{p^2+5p+6} = \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{1}{p+3}$

donc $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$.

2. a) $y''^*(n) = \dfrac{y'^*(n+1) - y'^*(n)}{0{,}1}$

$$= \frac{\dfrac{y(n+2) - y(n+1)}{0{,}1} - \dfrac{y(n+1) - y(n)}{0{,}1}}{0{,}1}$$

$$= \frac{y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)}{0{,}1}$$

$y'^*(n) = 10(y(n+1) - y(n))$ et

$y''^*(n) = 100\,(y(n+2) - 2y(n+1) + y(n))$.

b) On obtient l'équation aux différences

$100\,y(n+2) - 150\,y(n+1) + 56\,y(n) = 0$.

3. a) Calcul de $y(1)$: $y'^*(0) = \dfrac{y(1) - y(0)}{0{,}1} = 1$,

donc $y(1) = 0{,}1$.

b) Transformée en z de $y(n)$: $Y(z)$, transformée en z de $y(n+1) = z(Y(z) - y(0)) = zY(z)$.

Transformée en z de $y(n+2)$:

$z^2(Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)) = z^2Y(z) - 0{,}1z$.

L'équation aux différences (E^*) devient :

$100\,z^2Y(2) - 10z - 150zY(z) + 56\,Y(z) = 0$

$$Y(z) = \frac{10z}{100z^2 - 150z + 56} = \frac{-7}{10z-7} + \frac{4}{5z-4}.$$

D'où $y(n) = \left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n\right)u(n)$.

4.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(t)$ sol. de (E)	0	0,078	0,122	0,142	0,148	0,145	0,136	0,124	0,111	0,098	0,086
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n	0	0,1	0,15	0,169	0,1695	0,160	0,144	0,127	0,110	0,094	0,079

Exercice 28

1. $u(0) = 1$; $V(0) = -1$; $u(1) = \dfrac{9}{3}$; $v(1) = \dfrac{13}{6}$

$U(2) = \dfrac{7}{18}$; $v(2) = -\dfrac{1}{36}$.

2. Transformée en z de $u(n) = U(z)$;

de $u(n+1) = z(U(z) - u(0)) = z(U(z) - 1)$.

transformée en z de $v(n) = V(z)$;

de $v(n+1) = z(V(z) - v(0)) = z(V(z) - 1)$

$$(S')\begin{cases} zU(z) - z = \dfrac{4}{3}U(z) - \dfrac{5}{3}V(z) \\ zV(z) + z = \dfrac{5}{6}U(z) - \dfrac{7}{6}V(z) \end{cases}$$

soit $(S')\begin{cases} (3z-4)U(z) + 5V(z)\,z = 3z \\ -5U(z) + (6z+7)V(z) = -6z \end{cases}$

3. $U(z) = \dfrac{z(6z+17)}{(2z-1)(3z+1)}$ et $V(z) = \dfrac{z(13-6z)}{(2z-1)(3z+1)}$.

4. $\dfrac{U(z)}{z} = \dfrac{6z+17}{(2z-1)(3z+1)} = \dfrac{A}{2z-1} + \dfrac{B}{3z+1} = \dfrac{8}{2z-1} - \dfrac{9}{3z+1}$

$\dfrac{V(z)}{z} = \dfrac{13-6z}{(2z-1)(3z+1)} = \dfrac{A}{2z-1} + \dfrac{B}{3z+1} = \dfrac{4}{2z-1} - \dfrac{9}{3z+1}$

$U(z) = 4\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}} - 3\dfrac{z}{z+\frac{1}{3}}$ et $V(z) = 2\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}} - 3\dfrac{z}{z+\frac{1}{3}}$.

5. $U(n) = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$ et $u(n) = 0$ pour $n < 0$

$V(n) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$ et $v(n) = 0$ pour $n < 0$.

6. $\lim\limits_{n \to +\infty} un = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} vn = 0$.

Exercice 29

Partie A

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

(E1) avec $\begin{cases} f(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ f(t) = V_0 \text{ pour } t \geqslant 0 \end{cases}$.

1. Sur $]-\infty, 0[$ on a $f(t) = 0$ alors $\dfrac{df}{dt}(t) = 0$, (E1) s'écrit

$\dfrac{dv}{dt}(t) + \dfrac{1}{RC}v(t) = 0$ la solution générale est $v(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$

avec la condition $v(0^-) = \lim\limits_{t \to 0^-} v(t) = 0$ on trouve $k = 0$ d'où $v(t) = 0$ sur $]-\infty, 0[$.

2. Sur $]0, +\infty[$ on a $f(t) = V_0$ alors $\dfrac{df}{dt}(t) = 0$, (E1) s'écrit

$\dfrac{dv}{dt}(t) + \dfrac{1}{RC}v(t) =$ la solution générale est $v(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$

avec la condition $v(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} v(t) = V_0$ on trouve $k = V_0$

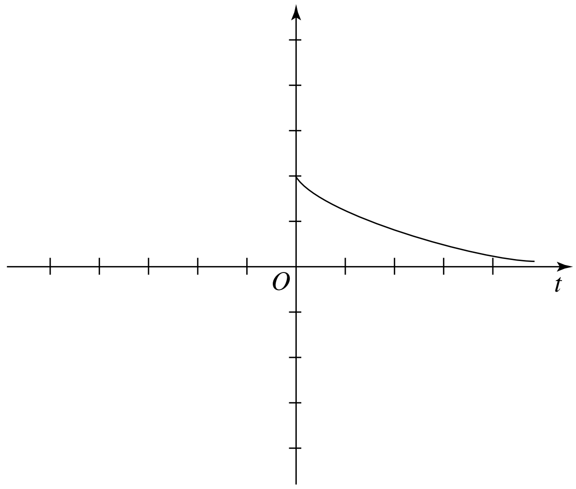
d'où $v(t) = V_0\,e^{-\frac{t}{RC}}$ sur $]0, +\infty[$.

3. Étude des variations de la fonction v sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$: sur $]-\infty, 0[$ $v(t) = 0$

sur $]0, +\infty[$ $v(t) = V_0\,e^{-\frac{t}{RC}}$ $v'(t) = -\dfrac{V_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} < 0$

$\lim\limits_{t \to 0} v(t) = V_0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de v'	+	‖	−
Variations de v	$-\infty$ → 0	‖	V_0 ↘ 0



Partie B

1. $v'^*(n) = \dfrac{v(n+1) - v(n)}{0,1}$

transformée en z de $v(n)$: $V(z)$

transformée en z de $v(n + 1)$: $z(V(z) - v(0)) = zV(z) - 2z$

transformée en z de $v'^*(n) = \dfrac{zV(z) - 2z - V(z)}{0,1}$

$= 10zV(z) - 10V(z) - 2z.$

$f'^*(n) = \dfrac{f(n+1) - f(n)}{0,1}$

transformée en z de $f(n)$: $F(z)$

transformée en z de $f(n + 1)$: $z(F(z) - f(0)) = z(F(z) - 2)$

et $F(z) = \dfrac{2z}{z-1}$

transformée en z de $f'^*(n)$

$\dfrac{z(F(z) - 2) - F(z)}{0,1} = 10(zF(z) - 2z - F(z))$

$= 20\left(\dfrac{z^2}{z-1} - z - \dfrac{z}{z-1}\right) = 0.$

2. Équation (E^*) : $10zV(z) - 10V(z) - 2z + V(z) = 0$

$V(z) = \dfrac{2z}{10z - 9}$

3. $v(n) = 2\left(\dfrac{9}{10}\right)^n u(n).$