Chapitre 10.
Calculs dans le triangle rectangle

Théorème de Pythagore

QCM

1. a. **2.** b. **3.** c. **4.** b.

Exercice 3

$BC^2 = 8,5$; $BC \approx 2,9$ cm.

Exercice 4

$AC^2 = 24$; $AC \approx 4,9$ cm.

Exercice 5

$BC^2 = 41$; $BC \approx 6,4$ cm.

Exercice 6

$PQ^2 = 11$; $PQ \approx 3,3$ cm.

Exercice 7

$BC^2 = 117$; $BC \approx 10,8$.

Exercice 8

$AC^2 = 176$; $AC \approx 13,3$.

Exercice 9

$AB^2 = 52,8$; $AB \approx 7,3$.

Réciproque du théorème de Pythagore

Exercice 12

$AC^2 = 1\,156$;
$AB^2 + BC^2 = 256 + 900 = 1\,156$,
donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Le triangle ABC est rectangle en B ; l'hypoténuse est [AC].

Exercice 13

$QR^2 = 2\,500$;
$PQ^2 + PR^2 = 196 + 2\,116 = 2\,312$.
$QR^2 \neq PQ^2 + PR^2$, donc le triangle PQR n'est pas rectangle.

Exercice 14

1. Aux incertitudes de mesure près, on obtient :
$\widehat{PMN} \approx 89°$.
2. $NP^2 = 25$
$MN^2 + MP^2 = (2,3)^2 + (4,5)^2 = 22,54$
$NP^2 \neq MN^2 + MP^2$, donc le triangle MNP n'est pas rectangle.

Exercice 15

Triangle rectangle en J.

Exercice 16

Triangle rectangle en I.

Exercice 17

Triangle non rectangle.

Exercice 18

Triangle non rectangle.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

QCM

1. b. **2.** a. **3.** b.
4. c. **5.** a.

Exercice 19

fig. 1 : $\cos \widehat{C} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{2}{3}$; $\cos \widehat{C} \approx 0,667$.

fig. 2 : $\sin \widehat{C} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1,8}{3,5}$; $\sin \widehat{C} \approx 0,514$.

fig. 3 : $\tan \widehat{C} = \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{26}{15}$; $\tan \widehat{C} \approx 1,733$.

fig. 4 : $\cos \widehat{C} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{25}{30}$; $\cos \widehat{C} \approx 0,833$.

Exercice 22

1. $\cos 18° \approx 0,951$; $\sin 18° \approx 0,309$; $\tan 18° \approx 0,325$.
2. $\cos 75° \approx 0,259$; $\sin 75° \approx 0,966$; $\tan 75° \approx 3,732$.

Exercice 23

1. $a \approx 74{,}3°$.
2. $a \approx 24{,}9°$.
3. $a \approx 19°$.
4. $a \approx 60{,}5°$.

Exercice 25

$\tan \widehat{C} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{36}{45}$; $\tan \widehat{C} = 0{,}8$;
$\widehat{C} \approx 38{,}7°$.

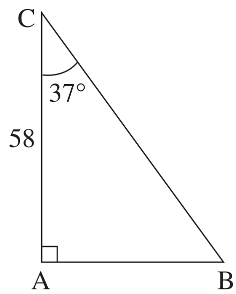
Exercice 26

$\sin \widehat{P} = \dfrac{MN}{PN} = \dfrac{42}{45}$; $\widehat{P} \approx 69°$.

Exercice 27

$\cos \widehat{P} = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{47}{55}$; $\widehat{P} \approx 31{,}3°$.

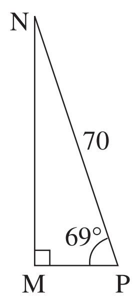
Exercice 29



1. Le triangle est représenté ci-contre.
2. $\widehat{B} = 90 - 37 = 53°$.
3. *Calcul de AB*
$\tan \widehat{C} = \dfrac{AB}{AC}$ soit $\tan 37° = \dfrac{AB}{58}$,
d'où $AB = 58 \times \tan 37°$;
$AB \approx 43{,}7$ mm.

Calcul de BC
$\cos \widehat{C} = \dfrac{CA}{CB}$ soit $\cos 37° = \dfrac{58}{CB}$,
d'où $CB = \dfrac{58}{\cos 37°}$; $CB \approx 72{,}6$ mm.

Exercice 30



1. Le triangle est représenté ci-contre.
2. $\widehat{N} = 90 - 69 = 21°$.
3. *Calcul de MN*
$\sin \widehat{P} = \dfrac{MN}{NP}$ soit $\sin 69° = \dfrac{MN}{70}$,
d'où $MN = 70 \times \sin 69°$;
$MN \approx 65{,}4$ mm.

Calcul de PM
$\cos \widehat{P} = \dfrac{PM}{PN}$ soit $\cos 69° = \dfrac{PM}{70}$,
d'où $PM = 70 \times \cos 69°$; $PM \approx 25{,}1$ mm.

Problème 31

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$;
$AC = \sqrt{45}$; $AC \approx 6{,}7$.
2. $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{6}$; $\tan \widehat{BAC} = 0{,}5$;
$\widehat{BAC} \approx 27°$.

Problème 32

1. $OA^2 = OT^2 + AT^2$ soit $144 = 16 + AT^2$
d'où $AT^2 = 144 - 16 = 128$;
$AT = \sqrt{128}$; $AT \approx 11{,}3$ cm.
2. $\widehat{TAT'} = 2\,\widehat{TAO}$. On calcule $\widehat{TAO}$:
$\sin \widehat{TAO} = \dfrac{OT}{OA} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$;
$\widehat{TAO} \approx 19{,}5°$; $\widehat{TAT'} \approx 39°$.

Problème 33

1. $L^2 + l^2 = D^2$ soit $L^2 + (32{,}4)^2 = (66{,}1)^2$
d'où $L^2 = (66{,}1)^2 - (32{,}4)^2$; $L \approx 57{,}6$ cm.
2. $\sin \alpha = \dfrac{l}{D}$ soit $\sin \alpha = \dfrac{32{,}4}{66{,}1}$;
d'où $\alpha \approx 29°$.
3. $\dfrac{L}{l} = \dfrac{16}{9}$ soit $\dfrac{80}{l} = \dfrac{16}{9}$.

On en déduit : $16l = 80 \times 9$ d'où : $l = \dfrac{80 \times 9}{16}$; $l = 45$ cm.

Problème 35

1. Aire du carré ABCD : 25 m^2.
2. Aire du losange IJKL : 7,5 m^2.
3. 17,5 m^2.
4. a) $OI = \dfrac{1}{2}IK = 2{,}5$ m.

$OJ = \dfrac{1}{2}LJ = 1{,}5$ m.
b) $IJ^2 = OI^2 + OJ^2$ soit $IJ^2 = (2{,}5)^2 + (1{,}5)^2$;
$IJ^2 = 8{,}5$ d'où $IJ = \sqrt{8{,}5}$;
$IJ \approx 2{,}9$ m (valeur arrondie au dm).
5. Longueur L de la bordure IJKL :
$L \approx 4 \times 2{,}9$; $L \approx 11{,}6$ m.

Problème 36

1. $\widehat{ABC} = 60°$; $\widehat{ACB} = 60°$.
2. Le triangle ABC a trois angles égaux ;
il est équilatéral.
3. AB = 10 m.
4. Dans le triangle AHB rectangle en H :
$\sin \widehat{A} = \dfrac{BH}{AB}$ soit $\sin 60° = \dfrac{BH}{10}$;
d'où $BH = 10 \times \sin 60°$; $BH \approx 8{,}66$ m.
On peut aussi appliquer le théorème de Pythagore.
5. $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2} \times AC \times BH$; $\mathcal{A}_1 \approx 43{,}30$ m^2.

6. $\mathcal{A}_2 = 200$ m^2.
7. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$; $\mathcal{A} \approx 243{,}30$ m^2.
8. IE = 5 m.
9. Dans le triangle EIF rectangle en I :
$\tan \widehat{E} = \dfrac{IF}{EI}$ soit $\tan 65° = \dfrac{FI}{5}$;
d'où FI = 5 × tan 65° ; FI ≈ 10,72 m.
10. $\mathcal{A}_c = \dfrac{EI \times FI}{2}$; $\mathcal{A}_c = 2{,}5 \times FI$.
En prenant FI = 10,72, on obtient $\mathcal{A}_c = 26{,}8$.
Ce n'est pas la valeur arrondie au cm^2 ;
en effet : pour 2,5 × 5 × tan 65°, on lit à la calculatrice : 26.8063…, donc $\mathcal{A}_c \approx 26{,}81$ m^2 (valeur arrondie au dm^2).

Problème 37

1. a) Dans le triangle CHO rectangle en H :
$CO^2 = CH^2 + HO^2$ soit $29{,}7^2 = CH^2 + 16^2$
d'où $CH^2 = 29{,}7^2 - 16^2 = 626{,}09$;
$CH = \sqrt{626{,}09}$; CH ≈ 25 cm.
b) AB ≈ 25 cm.
2. La quadrilatère ABCO est un trapèze rectangle :
$\mathcal{A}_1 = AB \times \dfrac{AO + BC}{2}$; $\mathcal{A}_1 = 25 \times \dfrac{20 + 4}{2} = 25 \times 12$.
$\mathcal{A}_1 = 300$ cm^2.
3. Dans le triangle CHO rectangle en H :
$\cos \widehat{HOC} = \dfrac{OH}{OC}$ soit $\cos \widehat{HOC} = \dfrac{16}{29{,}7}$;
$\cos \widehat{HOC} \approx 57{,}4°$.
On en déduit : $\widehat{COO'} \approx 32{,}6°$.
4. Le secteur coloré est le secteur COO'.
$\mathcal{A} = \dfrac{\pi \times 29{,}7^2 \times 32{,}6}{360}$; $\mathcal{A} \approx 251$ cm^2.
5. Aire totale : 2 × (300 + 251) = 1 102 cm^2.

Problème 38

1. Dans le triangle ABG rectangle en B :
$AG^2 = AB^2 + BG^2$ soit $2{,}5^2 = 0{,}43^2 + BG^2$
d'où $BG^2 = 2{,}5^2 - 0{,}43^2 = 6{,}0651$;
BG ≈ 2,46 m.
2. $\cos \widehat{BAG} = \dfrac{0{,}43}{2{,}5} = 0{,}172$ d'où $\widehat{BAG} \approx 80°$;
On en déduit : $\widehat{BGA} \approx 10°$.
3. $\mathcal{A}_1 = \dfrac{\pi \times 0{,}9^2 \times 60}{360}$; $\mathcal{A}_1 \approx 0{,}42$ m^2.
4. $\widehat{ECF} = 30°$.
5. Dans le triangle CEF rectangle en E :
$\tan \widehat{ECF} = \dfrac{EF}{CE}$ soit $\tan 30° = \dfrac{EF}{0{,}9}$
d'où EF = 0,9 × tan 30° ; EF ≈ 0,52 m.
6. $\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2} \times CE \times EF$; $\mathcal{A}_2 \approx 0{,}23$ m^2.
7. Le quadrilatère CFGB est un trapèze rectangle.
8. CB = 4,45 – 0,90 – 0,43 = 3,12 m.
9. Aire du triangle BAG :
$\mathcal{A}_3 = \dfrac{1}{2} \times BA \times BG$; $\mathcal{A}_3 \approx 0{,}53$ m^2.
Aire du trapèze rectangle CFGB :
$\mathcal{A}_4 = \dfrac{BG + CF}{2} \times BC$;
$\mathcal{A}_4 = \dfrac{2{,}46 + 1{,}04}{2} \times 3{,}12 = 5{,}46$ m^2.
10. Aire totale de la voile : 6,64 m^2.

Problème 40

1. Le triangle ABC est un triangle équilatéral de côté 45 cm.
Dans le triangle AKB rectangle en K :
$\sin 60° = \dfrac{AK}{45}$ d'où AK = 45 × sin 60° ;
AK ≈ 39 cm.
2. Dans le triangle SHK rectangle en H :
$\tan \widehat{K} = \dfrac{SH}{HK}$ soit $\tan 76° = \dfrac{SH}{5}$;
d'où SH = 5 × tan 76° ; SH ≈ 20 cm.

Problème 41

1. Le triangle AOC est rectangle en O.
$AC^2 = OA^2 + OC^2 = 8$; $AC = \sqrt{8}$, AC ≈ 2,83 m.
2. La droite (EF) est médiatrice de [AC], elle passe par O, donc $\widehat{AOE} = 45°$.
3. EF = OE – OF.
Calculons OF :
le triangle AFO rectangle en F est tel que :
$\widehat{FAO} = \widehat{AOF} = 45°$; il est isocèle, d'où : OF = AF.
Donc $OF = \dfrac{AC}{2}$; OF ≈ 1,41 m.
Ainsi EF ≈ 0,59 m.
4. L'arc $\overset{\frown}{AB}$ est un demi-cercle.
Longueur de $\overset{\frown}{AB}$: l = π × 2 ; l ≈ 6,28 m.
5. Aire du demi-disque de diamètre [AB] :
$\mathcal{A}_1 = \dfrac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi$; $\mathcal{A}_2 \approx 6{,}28$ m^2.
6. Aire du triangle AEC :
$\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2} \times AC \times EF$; $\mathcal{A}_2 \approx \dfrac{1}{2} \times 2{,}83 \times 0{,}59$;
$\mathcal{A}_2 \approx 0{,}83$ m^2.

Problème 42

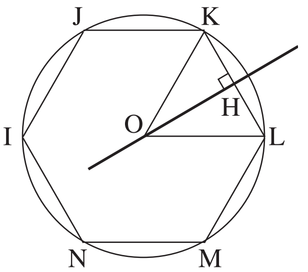
1. $AC^2 = BA^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 49$;
AC = 7 m.

2. $\tan \widehat{BCA} = \dfrac{BA}{BC}$ soit $\tan \widehat{BCA} = \dfrac{4{,}2}{5{,}6} = 0{,}75$.

3. $\widehat{BCA} \approx 36{,}9°$.

4. $\mathcal{A} = 5{,}6 \times 4{,}2 + \dfrac{1}{2}\pi \times 2{,}1^2$; $\mathcal{A} \approx 30{,}45 \text{m}^2$.

Problème 43



1. $\widehat{KOL} = 60°$.

2. $r = 6$ cm, R = 0,6 m ; l'échelle de la représentation est $\dfrac{r}{R} = \dfrac{6}{60}$ soit $\dfrac{1}{10}$.

3. Sur le cercle, à partir du point I, on place, à l'aide d'un compas les points J, K, L, M, N tels que IJ = JK = KL = LM = MN = NI = 6 cm.

4. Dans le triangle OHK rectangle en H :

$\cos \widehat{HOK} = \dfrac{OH}{OK}$ soit $\cos 30° = \dfrac{OH}{6}$

d'où OH = 6 × cos 30° ; OH ≈ 5,2 cm.

5. Le triangle OKL est équilatéral.

Son aire est $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2} KL \times OH$;

$\mathcal{A}_1 \approx 15{,}6 \text{ cm}^2$.

6. Aire de l'hexagone :

$\mathcal{A}_2 = 6\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_2 \approx 93{,}6 \text{ cm}^2$.

7. a) La représentation étant à l'échelle $\dfrac{1}{10}$, l'aire réelle $\mathcal{A}$ est, en cm^2 : $\mathcal{A} = 100 \times \mathcal{A}_2$.

$\mathcal{A} \approx 9\,360 \text{ cm}^2$ soit $\mathcal{A} \approx 0{,}936 \text{ m}^2$.

b) Aire du disque : $\mathcal{A}' \approx 1{,}131 \text{ m}^2$;
pourcentage de chute : 17 %.