

Pourcentages et coefficients multiplicateurs

“Les ventes de portables d’une agence sont de 220 unités en novembre. La vendeuse prévoit une augmentation de 35 % des ventes pour les fêtes de fin d’année. Quelles ventes peut-elle espérer réaliser au mois de décembre ?”

“Le responsable du service de comptabilité renouvelle son parc machines. Le fournisseur consent à lui accorder deux réductions successives de 8 % et 2 %. Comment ce responsable peut-il calculer rapidement le prix de son achat ?”

L’étude de ce chapitre va nous donner les méthodes pour répondre à ces questions et effectuer tous les calculs relatifs aux pourcentages.

Mots-clés du chapitre

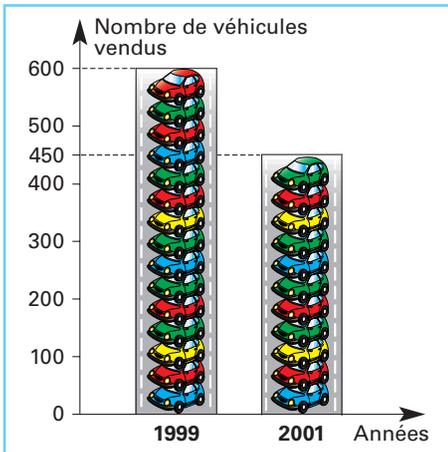
Vous connaissez les pourcentages, mais vous allez découvrir que l’on peut y associer des nombres décimaux : les **coefficients multiplicateurs** qui vont simplifier les calculs et les rendre plus rapides.

Vous allez comprendre comment distinguer et calculer les **pourcentages successifs**, les **pourcentages additifs** et les **pourcentages par tranches**.

À LA DÉCOUVERTE DE...

Activité 1

Comment calculer un pourcentage ?



Dans une grande succursale d'automobiles de la Région lyonnaise, le directeur commercial examine le bilan des ventes d'un véhicule de moyenne gamme.

En 1999, à la sortie du modèle, 600 véhicules avaient été vendus et en 2001, 450 seulement.

1. Calculer la diminution du nombre des véhicules vendus entre 1999 et 2001.
2. En déduire le taux de diminution (exprimé en pourcentage) des ventes de ce modèle entre 1999 et 2001.

Activité 2

Comment utiliser un pourcentage ?



Pour les fêtes de fin d'année, la vendeuse d'une agence de téléphones portables espère une augmentation de 35 % des ventes de décembre par rapport aux ventes de novembre.

En novembre, elle avait vendu 220 téléphones portables.

1. Calculer l'augmentation espérée des ventes de portables entre novembre et décembre.
2. En déduire le nombre de ventes de portables que la vendeuse envisage en décembre.
3. Pour calculer directement les ventes de décembre, sans calculer la valeur de l'augmentation, on peut calculer le coefficient multiplicateur k associé à l'augmentation tel que :

$$\text{ventes}_{\text{décembre}} = \text{ventes}_{\text{novembre}} \times k.$$

Calculer k .

Activité 3

Comment calculer des pourcentages successifs ?

 RELIEF & Cie 22 rue de L'Île 69 000 LYON		Facture N° 2 586
N° client : 422		31 janvier 2002
Désignation	en Euros	
Matériel informatique	16 780 HT	
• Réduction	8 %?
• Escompte pour paiement comptant	2 %?
• Total HT	?
• Taux TVA	19,6 %?
• Total TTC	?

Le service comptabilité d'une entreprise renouvelle son parc machines.

Le responsable achète chez son fournisseur des ordinateurs et des imprimantes pour un montant de 16 780 €. Le fournisseur accorde une réduction de 8 %, puis un escompte de 2 % pour paiement comptant.

1. Calculer :

a) le montant de la réduction ;

b) le montant de l'escompte (l'escompte s'applique sur le 1^{er} net, c'est-à-dire le prix après réduction) ;

c) le prix final.

2. Calculer les coefficients multiplicateurs k_1 et k_2 associés à chaque diminution tels que :

$$1^{\text{er}} \text{ net} = \text{Prix initial} \times k_1 \quad \text{et} \quad \text{Prix final} = 1^{\text{er}} \text{ net} \times k_2.$$

3. Calculer le coefficient multiplicateur global k_g qui permet de calculer directement le prix final à partir du prix initial.

4. La réduction globale est-elle de 10 % ?

Si non, calculer son pourcentage.

Activité 1

Comment calculer un pourcentage ?

1. La diminution des ventes est de :

$$600 - 450 = 150.$$

Le nombre de véhicules a diminué de 150 entre 1999 et 2001.

2. Le taux de diminution est :

$$t = \frac{150}{600} = 0,25 \text{ soit un taux de } 25 \%$$

Il y a eu 25 % de baisse des ventes de véhicules entre 1999 et 2001.

Activité 2

Comment utiliser un pourcentage ?

1. L'augmentation espérée des ventes est de :

$$220 \times \frac{35}{100} = 220 \times 0,35 = 77.$$

La vendeuse espère vendre 77 téléphones portables en plus en décembre.

La valeur d'une augmentation est le produit de la valeur initiale par le taux d'augmentation.

2. Le nombre de ventes de portables envisagé en décembre est de :

$$220 + 77 = 297.$$

3. On a : $297 = 220 + 77$

et $297 = 220 + 220 \times 0,35.$

En mettant 220 en facteur, on obtient :

$$297 = 220 (1 + 0,35)$$

soit $297 = 220 \times 1,35.$

1,35 est le **coefficient multiplicateur** associé à l'augmentation de 35 %.

D'une façon générale,

le coefficient multiplicateur associé à une augmentation est :

$$k = 1 + t \text{ où } t \text{ est le taux d'augmentation (ex : } 1,35 = 1 + 0,35),$$

et valeur finale = valeur initiale $\times k$.

Activité 3

Comment calculer des pourcentages successifs ?

1. a) Le montant de la réduction est de :

$$16\,780 \times \frac{8}{100} = 16\,780 \times 0,08 = 1\,342,40 \text{ €.}$$

Le montant du 1^{er} net est de :

$$16\,780 - 1\,342,40 = 15\,437,60 \text{ €.}$$

b) L'**escompte** est une réduction accordée pour paiement comptant.

Le montant de l'escompte est :

$$e = 15\,437,60 \times 0,02 \approx 308,75 \text{ €.}$$

c) Le prix final est :

$$\text{PF} = 15\,437,60 - 308,75 = 15\,128,85 \text{ €.}$$

2. Le premier net est de :

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}} \text{ net} &= 16\,780 - 16\,780 \times 0,08 \\ &= 16\,780 \times (1 - 0,08) \\ &= 16\,780 \times \mathbf{0,92}, \text{ donc } k_1 = 0,92 = 1 - 0,08. \end{aligned}$$

0,92 est le **coefficient multiplicateur associé à la réduction de 8 %**.

Le prix final est de :

$$\begin{aligned} \text{Prix final} &= 15\,437,60 - 15\,437,60 \times 0,02 \\ &= 15\,437,60 \times (1 - 0,02) \\ &= 15\,437,60 \times \mathbf{0,98}, \text{ donc } k_2 = 0,98 = 1 - 0,02. \end{aligned}$$

0,98 est le **coefficient multiplicateur associé à la diminution de 2 %**.

D'une façon générale,

le coefficient multiplicateur associé à une diminution est :

$$k = 1 - t \text{ où } t \text{ est le taux de diminution (ex. : } 0,92 = 1 - 0,08 \text{ et } 0,98 = 1 - 0,02).$$

3. Prix final = $15\,437,60 \times 0,98$
 et Prix final = $16\,780 \times 0,92 \times 0,98$,
 donc : Prix final = Prix initial $\times \mathbf{0,9016}$,
 donc $k_{\text{global}} = 0,9016 = 0,92 \times 0,98$.

Le coefficient multiplicateur global est $k_{\text{global}} = k_1 \times k_2$.

4. Les deux réductions de 8 % et 2 % ne s'appliquent pas sur la même valeur initiale : elles sont **successives**. Les pourcentages ne peuvent pas s'ajouter.

La réduction globale n'est pas de 10 %.

Le coefficient multiplicateur global est de 0,9016.

Cela signifie que le prix final représente 90,16 % du prix initial. La réduction globale est de 9,84 %, car $t = 1 - 0,9016 = 0,0984$.

L'ESSENTIEL

● Pourcentages et coefficients multiplicateurs

- Pour calculer x % d'une valeur, on multiplie cette valeur par $k = \frac{x}{100}$.
- Pour augmenter une valeur de x %, on multiplie cette valeur par $k = 1 + \frac{x}{100}$.
- Pour diminuer une valeur de x %, on multiplie cette valeur par $k = 1 - \frac{x}{100}$.

$$\text{Valeur finale} = \text{Valeur initiale} \times k$$

Exemple :

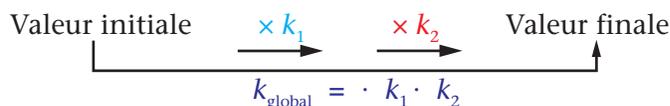
Pour une augmentation de 20 %, $k = 1 + 0,20 = 1,20$ et $k > 1$.

Pour une diminution de 20 %, $k = 1 - 0,20 = 0,80$ et $k < 1$.

● Pourcentages successifs

Les pourcentages successifs ne se calculent pas sur la même valeur initiale. Ils se calculent les uns à la suite des autres et ne peuvent pas s'ajouter.

- On utilise les coefficients multiplicateurs associés à chaque variation (augmentation ou diminution).



● Pourcentages additifs

Les pourcentages additifs se calculent sur la même valeur initiale. Ils peuvent s'ajouter.

● Pourcentages par tranches

Pour calculer des pourcentages par tranches, on décompose la valeur donnée suivant les tranches proposées. On applique ensuite le pourcentage correspondant à la tranche calculée.

À chaque tranche correspond en général un pourcentage différent.

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICES

QCM

Donner la bonne réponse.

Quelle est l'écriture décimale :

1. de 5 % ?

a. 0,5 b. 0,05 c. 0,005

2. de 12 % ?

a. 1,2 b. 0,012 c. 0,12

3. de 0,3 % ?

a. 0,3 b. 0,03 c. 0,003

4. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 30 % ?

a. 0,30 b. 0,70 c. 1,30

5. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 12 % ?

a. 1,12 b. 0,12 c. 0,88

► Calculer ou utiliser des pourcentages

1. Quel pourcentage de 140 kg représentent 21 kg ?

Corrigé

$$\frac{21}{140} = 0,15 \text{ soit } 15 \%$$

21 kg représentent **15 % de 140 kg.**

2. Quel pourcentage :

– de 640 € représentent 153,6 € ?

– de 52 m représentent 39 m ?

– de 820 m³ représentent 24,6 m³ ?

3. Calculer :

a) 17 % de 160 € ;

b) 2,5 % de 30 kg ;

c) 0,2 % de 2 400 m.

4. Une pièce de tissu mesure 3,80 m. Après lavage, la longueur a augmenté de 3 %.

1. Calculer la longueur de l'augmentation.

2. Calculer la longueur finale de la pièce de tissu.

5. Un article coûte 35,20 €.

Il subit une réduction de 20 %.

1. Calculer la valeur de la réduction.

2. Calculer le prix final de l'article.

6. Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Taux de réduction	Valeur de la réduction
54 €	8 %	
160 m		20 m
	25 %	105 g

7. Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Taux d'augmentation	Valeur de l'augmentation
125 €	10 %	
627 m ²		31,35 m ²
	35 %	420 L

► Calculer ou utiliser un coefficient multiplicateur

Point méthode

Pour trouver les taux de variations quand on connaît les coefficients multiplicateurs :

$$t_{\text{augm}} = k_{\text{augm}} - 1$$

$$t_{\text{dim}} = 1 - k_{\text{dim}}$$

8 a) Calculer le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 18 %.

b) Trouver la variation en pourcentage correspondant au coefficient de 0,85.

Corrigé

a) $k = 1 + 0,18 = 1,18$.

Le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation de 18 % est 1,18.

b) $k = 0,85$ donc $t = 1 - k$

$t = 1 - 0,85 = 0,15$ soit 15 %.

Comme $k < 1$, on a **une diminution de 15 %**.

9 Calculer le coefficient multiplicateur associé à :

- une diminution de 25 % ;
- une augmentation de 14 % ;
- une diminution de 38 % ;
- une augmentation de 50 %.

10 Calculer le coefficient multiplicateur associé à :

- une augmentation de 27,2 % ;
- une diminution de 16,9 % ;
- une augmentation de 100 % ;
- une diminution de 0,4 %.

11 Donner le pourcentage d'augmentation correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants :

1,42 ; 1,03 ; 2 ; 1,572.

12 Donner le pourcentage de diminution correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants :

0,95 ; 0,825 ; 0,60 ; 0,45.

13 Donner la variation en pourcentage correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants :

0,994 ; 1,003 ; 0,825 ; 1,04.

Ajouter ou retrancher un pourcentage

14 Un commerçant accorde une réduction de 15 % sur un article dont le prix marqué est de 120 €.

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à la réduction.
2. Calculer le prix payé par le client.

Corrigé

1. $k = 1 - t = 1 - 0,15 = 0,85$.

2. Prix payé = Prix marqué $\times k$
 $= 120 \times 0,85 = 102$ €.

15 Un article coûte 45 €. Il subit une augmentation de 20 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation.

2. Calculer le prix final de l'article.

16 Une pièce de lainage mesurait 2,4 m. Après son lavage, sa longueur a diminué de 5 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à la diminution.

2. Calculer la longueur finale de la pièce de lainage.

17 Un véhicule coûtait 8 130 € l'an dernier. Son prix a augmenté de 3,2 %.

1. Calculer la valeur de l'augmentation, puis son prix après augmentation.

2. Calculer le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation, puis son prix après augmentation.

18 Il y a 10 ans, une ville de province comptait 28 200 habitants. Cette population a diminué de 4,5 % en 10 ans.

1. Calculer la valeur de la diminution, puis la population de la ville aujourd'hui.

2. Calculer le coefficient multiplicateur associé à la diminution, puis retrouver la population d'aujourd'hui.

Calculer un taux de variation

Point méthode

Il y a deux façons de calculer un taux.

1. On utilise la formule :

$$\text{Taux d'augmentation (ou de diminution)} = \frac{\text{Valeur de l'augm. (ou de la dim.)}}{\text{Valeur initiale}}$$

ou :

$$2. t = k_a - 1 \quad \text{ou} \quad t = 1 - k_d$$

k étant le coefficient multiplicateur associé à la variation.

19 Le prix initial d'un produit est de 75 €. Après avoir bénéficié d'une augmentation, le prix final est de 96 €.

1. Calculer le montant M de l'augmentation.
2. En déduire le taux d'augmentation T .
3. À partir du coefficient associé à l'augmentation, retrouver le taux.

Corrigé

1. Montant de l'augmentation :

$$M = 96 - 75 = 21 \text{ €}.$$

2. Taux d'augmentation $T = \frac{21}{75} = 0,28$, soit **28 %**.

3. $k = \frac{96}{75} = 1,28$.

Le taux est $t = 1,28 - 1 = 0,28$, soit une augmentation de 28 %.

20 Le prix initial d'un produit est de 40 €. Après une remise, il vaut 36,80 €.

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à la remise.
2. En déduire le taux de remise.

21 Claire décide de moins regarder la télévision et de faire plus de sport. Son temps par semaine devant la télé passe de 30 h à 21 h et le temps consacré au sport de 5 h à 9 h.

1. Quel est le taux de diminution du temps passé devant la télé ?
2. Quel est le taux d'augmentation du temps consacré au sport ?

22 Un loyer qui valait 380 € il y a 3 ans, a augmenté de 24,7 €. Quel est le taux d'augmentation ?

23 Un commerçant affiche 55 € un objet. Le client paie 44 € à la caisse. Calculer le taux de réduction accordé.

24 Au lycée, l'an dernier, il y a eu 120 élèves reçus au BEP. Cette année, il y a 123 élèves qui ont obtenu leur diplôme. Quel est le taux d'augmentation de reçus en 1 an ?

► Calculer une valeur initiale

Point méthode

Pour calculer une valeur initiale, penser à utiliser :

$$\text{Valeur initiale} = \frac{\text{Valeur finale}}{k}$$

25 Un jeu vidéo coûte 47,88 € après avoir bénéficié d'une remise de 10 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à la remise.
2. Retrouver le prix initial du jeu.

Corrigé

1. $k = 1 - t = 1 - 0,1 = 0,9$.

2. Prix initial = $\frac{\text{Prix final}}{k} = \frac{47,88}{0,9} = 53,20 \text{ €}$.

26 La fréquentation d'un cinéma de banlieue se stabilise à 1 450 entrées en moyenne par semaine après avoir subi une baisse de fréquentation de 15 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur associé à la baisse.
2. Quel était le nombre d'entrées auparavant ?

27 En quelques mois, le prix d'un sac en cuir a augmenté de 4,5 %. Il vaut aujourd'hui 127,49 €.

1. Calculer le coefficient multiplication associé à l'augmentation.
2. Calculer le prix initial du sac.

28 Recopier, puis compléter le tableau suivant :

Prix initial	Taux de réduction	$k_{\text{réd}}$	Prix final
80 €	12 %		
23 €		0,72	
	7,5 %		492,10 €
		0,68	1 010,48 €

29 Recopier, puis compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Taux d'augmentation	$k_{\text{augm.}}$	Valeur finale
132 m	4 %		
1 682 m ²		1,51	
		1,005	325,62 m ³
	35 %		9 193,5 g

► Calculer des pourcentages successifs

30 Un article de 52 € subit une première augmentation de 10 %, puis une deuxième de 5 %.

- Calculer le coefficient multiplicateur global associé aux 2 augmentations successives.
- En déduire le prix final de l'article.
- À quel pourcentage d'augmentation unique, correspondent les 2 augmentations successives ?

Corrigé

1. $k_{\text{global}} = k_1 \times k_2$.

$k_1 = 1 + 0,10 = 1,10$,

$k_2 = 1 + 0,05 = 1,05$,

donc $k_{\text{global}} = 1,10 \times 1,05 = \mathbf{1,155}$.

2. Prix final = Prix initial $\times k_{\text{global}}$
 $= 52 \times 1,155 = \mathbf{60,06 \text{ €}}$.

3. Comme $k_{\text{global}} = 1,155$, on en déduit que le taux d'augmentation unique est :

$t = 1,155 - 1 = 0,155$, soit **15,5 %**.

31 Un article de 220 € subit une première réduction de 10 %, puis une deuxième de 4,5 %.

- Calculer le coefficient multiplicateur global.
- En déduire le prix final de l'article.

32 Un article subit une augmentation de 5 %, puis une réduction de 8 %.

- Calculer le coefficient multiplicateur global.
- Calculer le prix initial de l'article si le prix final est 115,92 €.

33 Un commerçant vend un produit avec une remise de 15 % et un escompte de règlement de 2 %.

- Calculer le coefficient multiplicateur global.
- Calculer le prix initial du produit si le client a payé 124,95 €.
- À quel pourcentage de réduction unique correspond cette double réduction ?

34 Un article subit 2 réductions successives de 10 %, puis de 15 %.

- Calculer le coefficient multiplicateur global.
- À quel pourcentage de réduction unique correspond cette double réduction ?

35 Par quelle augmentation équivalente peut-on remplacer deux augmentations successives de 12 % et 18 % ?

36 Par quelle remise équivalente peut-on remplacer 3 remises successives de 8 %, 12 % et 15 % ?

37 Un article subit une augmentation de 20 %, puis une réduction de 20 %.

- S'agit-il d'une réduction ou d'une augmentation globale ?
- De quel pourcentage est-elle ?

38 Pour calculer son revenu imposable, on effectue 2 abattements successifs de 20 % et 10 % sur le revenu déclaré.

- Calculer le montant imposable pour un revenu de 30 230 € déclaré.
- L'ordre des abattements est-il important dans le calcul précédent ?

► Calculer des pourcentages additifs

Point méthode

Les pourcentages sont additifs lorsqu'ils s'appliquent à la même valeur.

Pour calculer le pourcentage global, il suffit d'ajouter les différents pourcentages donnés.

Présentation des calculs :

Tranches	Réductions
5 000 – 0 = 5 000	5 000 × 0,10 = 500
8 500 – 5 000 = 3 500	3 500 × 0,20 = 700
Total = 1 200	

La réduction totale accordée pour un achat de 8 500 € est de **1 200 €**.

45 Un commerçant accorde à ses clients des remises progressives calculées sur le montant de leurs achats :

- 0 %, de 0 à 50 € ;
- 10 %, de 50 à 200 € ;
- 20 %, plus de 200 €.

Calculer la remise accordée pour un achat de 300 €.

46 Une entreprise accorde à ses employés une commission progressive sur le chiffre d'affaires annuel réalisé :

Chiffre d'affaires réalisé	Pourcentages des commissions
jusqu'à 2 000 €	2 %
de 2 000 € à 5 000 €	5 %
de 5 000 € à 20 000 €	10 %
au-delà de 20 000 €	20 %

1. Calculer la commission accordée pour un chiffre d'affaires réalisé de 10 000 €.

2. Calculer la commission accordée pour un chiffre d'affaires réalisé de 30 000 €.

PROBLÈMES

, **, * : niveau de difficulté du problème - C : problème corrigé (voir solution page 200).*

47 ** (d'après un sujet de BEP)

Les conditions de vente d'un grossiste sont les suivantes.

Remises successives : 8 % et 6 % ;
escompte pour paiement comptant : 2 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global associé aux 3 réductions successives (6 décimales).
2. En déduire le pourcentage de la réduction globale équivalente aux 3 précédentes (arrondir à 0,01 %).
3. Sachant que le montant net d'une facture est de 3 237,47 €, Calculer le montant initial de cette facture.

48 ** (d'après un sujet de BEP)

Un viticulteur accorde une remise en fonction du nombre de bouteilles achetées par ses clients. Pour cela, il applique le barème par tranches suivant :

Nombre de bouteilles achetées	Pourcentage de remise
de 1 à 18	2 %
de 19 à 54	3 %
de 55 à 100	5 %
à partir de 101	8 %

Le prix d'une bouteille est de 7,60 €.

1. Calculer le montant de la remise totale accordée à un client qui commande 95 bouteilles.
2. À quel pourcentage de réduction unique correspond-elle ?

49 ** C (d'après un sujet de BEP)

Le prix d'achat brut HT d'une console de jeu est de 103,50 €. Une remise progressive est accordée.

Le calcul de cette remise s'effectue de la façon suivante.

- jusqu'à la 5^e console : pas de remise ;
- de la 6^e à la 15^e console : 5 % de remise sur le montant du prix d'achat brut HT ;
- de la 16^e à la 30^e console : 10 % de remise ;
- au-delà de la 30^e console : 15 % de remise.

Le commerçant désire acheter 24 consoles.

1. Calculer la réduction accordée.
2. Calculer le montant net de la facture (montant après réduction).