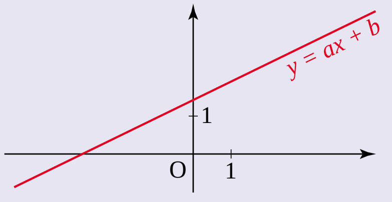
Fonctions affines

1 Sens de variation d'une fonction affine

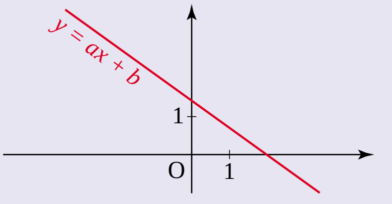
Propriété

f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$.

• Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.



• Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



Note

Lorsque a = 0, f est une fonction constante (f (x) = b). Sa droite représentative dans un repère est parallèle à l'axe des abscisses.

Démonstration

u et v désignent deux réels tels que $u \leqslant v$.

• Si $a > 0$, alors $au \leqslant av$ et en ajoutant b à chaque membre, on obtient $au + b \leqslant av + b$, c'est-à-dire $f(u) \leqslant f(v)$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a < 0$, alors $au \geqslant av$ et $au + b \geqslant av + b$, c'est-à-dire $f(u) \geqslant f(v)$. Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples

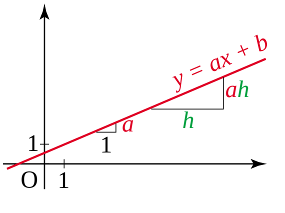
• La fonction affine $x \mapsto \frac{2}{3}x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = \frac{2}{3}$ et $a > 0$.

• La fonction affine $x \mapsto -\ x + 7$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -1$ et $a < 0$.

2 Caractérisation des fonctions affines

Propriété

f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$.
Lorsque x varie d'un nombre h, alors $f(x)$ varie de ah.



On traduit ceci par : « **L'accroissement de la fonction *f* est proportionnel à l'accroissement de la variable, le coefficient de proportionnalité étant *a*.** »

Note

Ces deux propriétés fournissent une ***caractérisation*** *des fonctions affines.*

Démonstration

Pour tous réels x et h,
$f(x + h) = a(x + h) + b = ax + ah + b = ax + b + ah \ = f(x) + ah$.

Propriété réciproque

Si les accroissements d'une fonction f sont proportionnels aux accroissements de la variable avec pour coefficient de proportionnalité a, alors f est une fonction affine $x \mapsto ax + b$ où b est un réel.

Démonstration

Pour tout réel h, lorsque x varie de 0 à h, $f(x)$ varie de $f(0)$ à $f(h)$ et par hypothèse $f(h) - f(0) = a\,(h - 0)$, c'est-à-dire $f(h) = ah + f(0)$.
Donc f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $b = f(0)$.

Exercice résolu 1

Déterminer la fonction affine définie par deux réels distincts et leurs images

Voir aussi exercice 38 page 77

ÉNONCÉ : Déterminer la fonction affine f telle que $f(-1) = 8$ et $f(3) = -4$.

SOLUTION

On note $f : x \mapsto ax + b$ la fonction affine cherchée. On sait que, lorsque x varie de h, alors $f(x)$ varie de ah.
D'après le tableau : quand x varie de $+4$, $f(x)$ varie de -12, donc $-12 = a(+4)$ et $a = -3$.
Pour tout réel x, $f(x) = -3x + b$.
D'autre part, $f(-1) = 8$ donc $-3(-1) + b = 8$, c'est-à-dire $b = 5$.
f est la fonction affine définie par $f(x) = -3x + 5$.

Variation de x

$+4$

x	-1	3
$f(x)$	8	-4

-12

Variation de $f(x)$

Exercice résolu 2

Utiliser la proportionnalité des accroissements

Voir aussi exercice 42 page 77

ÉNONCÉ : f est une fonction affine telle que $f(-2) = -4$ et $f(4) = -1$.
Calculer $f(6)$.

SOLUTION

Lorsque x varie de $+6$, $f(x)$ varie de $+3$, le coefficient de proportionnalité est $a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Lorsque x varie de $+2$, $f(x)$ varie donc de : $a(+2) = \frac{1}{2}(+2) = +1$
d'où $f(6) = -1 + 1 = 0$.

$+6$ $\quad$ $+2$

x	-2	4	6
$f(x)$	-4	-1	0

$+3$ $\quad$ $+1$

Exercice résolu 3

Démontrer qu'une fonction n'est pas affine

Voir aussi exercice 46 page 77

Méthode
Si les accroissements d'une fonction f ne sont pas proportionnels aux accroissements de la variable, alors f n'est pas une fonction affine.

ÉNONCÉ : Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'est pas affine.

SOLUTION

On choisit trois valeurs de x, on calcule leurs images par la fonction f et on reporte les résultats dans le tableau de valeurs ci-contre.
$\frac{4}{2} \neq \frac{5}{1}$ donc les accroissements de f ne sont pas proportionnels aux accroissements de la variable.
Ainsi f n'est pas une fonction affine.

$+2$ $\quad$ $+1$

x	0	2	3
$f(x)$	1	5	10

$+4$ $\quad$ $+5$