

Programme 2025

CE2

GUIDE PÉDAGOGIQUE

J'apprends les MATHS avec PICBILLE

Une collection conçue par

RÉMI BRISSIAUD

Maitre de conférences de psychologie expérimentale

ANDRÉ OUZOULIAS

Professeur agrégé

PIERRE CLERC

Instituteur

FRANÇOIS LELIÈVRE

Professeur des écoles

ERNEST ROBERT

Conseiller pédagogique
de circonscription

Nouvelle édition supervisée par **Catherine Rivier**, chargée d'enseignement, et **Emmanuel Sander**, professeur ordinaire à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de Genève.

RETZ

editions-retz.com



Sommaire

La démarche pédagogique 3

Chap. 1 Progresser en arithmétique élémentaire :

le calcul mental pour résoudre des problèmes,
comprendre et mémoriser 5

Chap. 2 De l'étude scientifique du progrès à l'élaboration d'une progression :

l'exemple de la division 31

Chap. 3 Langage, géométrie et mesure 39

Guide pédagogique 45

Du matériel pour *J'apprends les maths avec Picbille CE2* 46

Les Problèmes pour apprendre à chercher (PAC) :

mode d'emploi 48

Période rouge (p. 8 à p. 45 folio élève) 50

Période jaune (p. 46 à p. 71 folio élève) 90

Période verte (p. 72 à p. 103 folio élève) 120

Période bleue (p. 104 à p. 135 folio élève) 152

Période violette (p. 136 à p. 165 folio élève) 184

Planches à reproduire 215



Cet ouvrage suit l'orthographe
recommandée par les rectifications de 1990
et les programmes scolaires.

Voir le site
<http://www.orthographe-recommandee.info>
et son miniguide d'information.

La démarche pédagogique

De nouveaux programmes pour le CE2 sont entrés en vigueur en 2025.

- Les **fractions** sont désormais étudiées à partir du CE1. Elles sont fréquemment conçues par les élèves comme s'il s'agissait simplement de deux nombres entiers juxtaposés, reliés par un signe. Dans cette perspective, ils mobilisent spontanément des règles issues du traitement des entiers, sans tenir compte de la relation qui unit numérateur et dénominateur. Cela peut amener, par exemple, à considérer que $\frac{3}{4}$

est inférieur à $\frac{7}{12}$ au motif que 3 est plus petit que 7 et 4 plus petit que 12, ou encore

à additionner séparément les deux termes et conclure que $\frac{3}{4} + \frac{7}{12}$ donnerait $\frac{(3+7)}{(4+12)}$.

Ce type de raisonnement est loin d'être marginal. Dans l'enquête TIMSS 2019¹, près de la moitié des élèves français en fin d'école primaire estiment ainsi que $\frac{3}{10}$ est plus

grand que $\frac{1}{2}$, signe que la compréhension des fractions comme nombres reste fragile

à ce stade. Situer $\frac{1}{2}$ sur une droite graduée allant de 0 à 5 se révèle particulièrement difficile pour beaucoup d'élèves. La tâche suppose de penser la fraction comme une grandeur et non comme un simple couple de nombres. Les difficultés sont telles qu'une recherche menée auprès de plusieurs milliers d'élèves de sixième fait apparaître plus de trois quarts de réponses incorrectes. Il y a donc un enjeu pédagogique majeur à faire évoluer ces premières perceptions, en aidant les élèves à construire la fraction comme un nombre à part entière.

- Les apprentissages dans ce domaine, débutés avec *J'apprends les maths avec Picbille CE1*, se poursuivent au CE2 conformément aux attendus des nouveaux programmes (MEN, 2025). Dix séquences sont dédiées à l'étude de cette notion et prennent en compte les difficultés de conceptualisation. Les quatre objectifs principaux fixés par les Instructions officielles sont les suivants :
 - établir des égalités de fractions inférieures ou égales à 1 ;
 - comparer des fractions inférieures ou égales à 1 ;
 - additionner et soustraire des fractions ;
 - partager une unité de longueur en fractions de cette unité et mesurer des longueurs non entières par rapport à cette unité, approche qui contribue à s'affranchir du « tout » et à donner aux fractions un statut de nombre.
- Dans le domaine des **nombres entiers**, *J'apprends les maths avec Picbille CE2* s'inscrit dans la continuité de l'approche didactique proposée au CP et au CE1. Ainsi,

1. L'étude internationale consacrée aux mathématiques et aux sciences (*Trends in Mathematics and Science Study*) : « Timss 2019, l'étude internationale consacrée aux mathématiques et aux sciences | Ministère de l'Éducation nationale », disponible sur www.education.gouv.fr

la compréhension des aspects décimal (base dix) et positionnel (la valeur d'un chiffre dépend de sa position) se renforce et se généralise au CE2. Le champ numérique est travaillé jusqu'à 10 000 en fin d'année.

- Concernant la **résolution de problèmes**, les programmes 2025 mettent l'accent sur la **compréhension des énoncés** (voir figure ci-contre) et indiquent l'importance que les élèves « n'automatisent pas l'opération à effectuer à partir des termes de l'énoncé ».
- Concernant les **opérations arithmétiques**, les quatre opérations sont travaillées au CE2. Les additions et soustractions posées sont, dès le début de l'année, régulièrement mobilisées. L'algorithme de la multiplication est introduit dans la seconde moitié de l'année.
- Dans le domaine « **grandeurs et mesures** », les apprentissages sur les longueurs et les prix s'inscrivent dans la continuité des compétences développées au CP et au CE1. *J'apprends les maths avec Picbille CE2* propose des activités impliquant des masses, des volumes et des durées.
- Les nouveaux programmes visent explicitement à développer l'autonomie pour **renforcer « la confiance des élèves en leur capacité à réussir en mathématiques »**. Le fichier *J'apprends les maths avec Picbille CE2* intègre cette préoccupation en favorisant la mise en activité des élèves.

Chapitre 1

Progresser en arithmétique élémentaire : le calcul mental pour résoudre des problèmes, comprendre et mémoriser

PLAN DU CHAPITRE

- Les 3 sortes de connaissances en arithmétique élémentaire
- Les 2 faces de la compréhension des opérations arithmétiques
 - Comprendre une opération (1) : en maîtriser les différents sens ou usages
 - Distinguer la compréhension des situations et celle des opérations : le paradigme « petits nombres vs grands nombres »
 - Évaluer la compréhension dans une tâche de calcul mental : Si-problèmes vs CC-problèmes
 - Comprendre une opération (2) : en maîtriser les différentes stratégies de calcul
 - Le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes et l'élaboration de progressions pédagogiques
- Comprendre l'écriture des nombres
 - Qu'est-ce que comprendre l'écriture d'un nombre à plusieurs chiffres ?
 - Une connaissance fondamentale : savoir que 35 dizaines, c'est 350 et que 358, c'est 35 dizaines et 8
- Mémoriser les résultats d'opérations élémentaires
 - Plus d'association verbale pour la multiplication que pour l'addition et la soustraction
 - La clé de la mémorisation des additions élémentaires : l'usage de stratégies d'appui sur 10
 - La mémorisation des additions et des soustractions : des processus proches
 - La clé de la mémorisation des multiplications élémentaires : un apprentissage moderne des tables traditionnelles
 - La mémorisation des résultats d'additions et de multiplications : une comparaison
- Conclusion : le calcul mental, moteur du progrès
 - Évaluer à partir du calcul mental, fonder le progrès sur lui : les apports du paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes
 - Calcul mental, compréhension et mémorisation
 - Une comparaison avec d'autres choix pédagogiques

Les 3 sortes de connaissances en arithmétique élémentaire, le rôle central du calcul mental

Être compétent en arithmétique élémentaire, c'est savoir mobiliser ses connaissances arithmétiques pour résoudre des problèmes arithmétiques variés. La question se pose évidemment de préciser la nature de ces connaissances. Or, il est classique de distinguer :

1°) La connaissance de relations numériques (on parle aussi de « savoir que... ») : savoir que « neuf plus quatre égale treize » ; savoir que « quatre fois huit, trente-deux », par exemple.

2°) La connaissance de procédures (on parle aussi de savoir-faire) telles que : savoir compter, savoir mettre en œuvre des stratégies de calcul mental, savoir poser et exécuter les opérations arithmétiques...

Les chercheurs et pédagogues anglophones distinguent une troisième sorte de connaissances, qu'il ne faut pas mettre sur le même plan que les autres parce que c'est en créant des liens entre diverses relations numériques et diverses procédures qu'on y accède : elles sont qualifiées de « conceptuelles ».

Voici un exemple de définition de ces connaissances¹ :

« *conceptual knowledge is defined as implicit or explicit understanding of the principles governing a domain.* »

Ainsi, le mot « conceptuel » renvoie-t-il à l'idée de « compréhension » (*understanding*). L'un des principaux objectifs de ce chapitre sera évidemment d'essayer de préciser ce que sont ces « connaissances conceptuelles » ou encore d'essayer de préciser ce que signifie comprendre une opération comme la multiplication, la soustraction ou la division euclidienne, ou encore ce que signifie comprendre un nombre tel que 236, par exemple.

C'est à cette distinction de trois sortes de connaissances (procédures, relations numériques et connaissances conceptuelles) que se réfèrent, par exemple, les chercheurs d'une commission du département de l'Éducation des USA² qui étaient récemment chargés de rédiger une synthèse des connaissances disponibles concernant les apprentissages arithmétiques à l'école. Ils insistent sur le fait que :

*Comprendre les opérations arithmétiques, disposer de procédures de calcul automatisées et avoir bien mémorisé les principales relations numériques sont les trois ingrédients qui, ensemble, participent à la formation de la compétence en résolution de problèmes*³.

Mais a-t-on vraiment progressé lorsqu'on a défini ainsi la compétence à résoudre des problèmes d'arithmétique élémentaire ? En effet, tout le monde sera vraisemblablement d'accord avec le fait que celle-ci résulte à la fois de l'appropriation de procédures, de la mémorisation de relations numériques et de la compréhension ; en revanche, la façon dont on conçoit l'articulation entre ces différents facteurs est plus problématique. Or, c'est évidemment la question cruciale.

Penser l'articulation entre ces différentes connaissances

On remarquera que les chercheurs américains, lorsqu'ils énumèrent les diverses connaissances qui fondent la compétence en résolution de problèmes arithmétiques, commencent par « *conceptual understanding of operations* ». En fait, la compréhension est incontournable ou, du moins, une dose importante de compréhension est incontournable. Sans compréhension des opérations, en effet, l'apprentissage des procédures ne peut se baser que sur des règles (« il faut d'abord faire ça ; puis continuer ainsi... »). Et cela ne concerne pas seulement l'apprentissage des procédures : l'absence de compréhension de l'écriture des nombres conduit, elle aussi, à une pléthore de règles (« Pour savoir quel est le *chiffre* des dizaines, il faut... ; pour savoir quel est le *nombre* de dizaines, il faut... »). Cette sorte d'apprentissage échoue presque systématiquement parce que, lorsqu'ils sont confrontés à de trop nombreuses règles qu'ils ne comprennent pas, les élèves les plus fragiles oublient ces règles ou bien ils en mélangent les conditions d'application et leur comportement est de moins en moins approprié, jusqu'à apparaître absurde. C'est pourquoi nous commencerons par aborder le thème de la compréhension, d'abord des opérations arithmétiques, ensuite de l'écriture des nombres.

L'idée-force qui sera défendue dans ce chapitre est que les compétences en calcul mental sont celles qui révèlent et favorisent le mieux la compréhension. Et ceci est vrai, qu'il s'agisse de la compréhension des opérations ou de celle des nombres. De plus, de bonnes compétences en calcul mental favorisent la mémorisation des relations numériques élémentaires. D'où le titre de ce chapitre : le calcul mental, parce qu'il aide à comprendre et à mémoriser, est le facteur essentiel du progrès en arithmétique élémentaire.

Cela est attesté par de nombreuses recherches. L'une d'elles a récemment été menée par des sociologues de l'éducation⁴. Entre 1989 et 2008, les écoliers français passaient des évaluations nationales au début du CE2 et de la 6^e. Ces chercheurs ont comparé les performances des mêmes élèves à ces deux niveaux de la scolarité. Ils ont notamment étudié s'il est possible d'isoler certaines compétences particulières qui, lorsqu'elles apparaissent en CE2, permettent de pronostiquer un niveau général élevé en mathématiques en 6^e. Les résultats sont clairs : les compétences qui permettent le meilleur pronostic relèvent du calcul mental.

1. Rittle-Johnson, B., & Siegler, R.S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. In C. Donlan (ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). Hove, UK: Psychology Press.

2. National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*, U.S. Department of Education : Washington, DC.

3. « Conceptual understanding of mathematical operations, fluent execution of procedures, and fast access to number combinations together support effective and efficient problem solving. »

4. Suchaut, B. (2007). *Apprentissages des élèves à l'école élémentaire : les compétences essentielles à la réussite scolaire* (collab. S. Morlaix). Note de l'IRÉDU, 07/1.

Ainsi, avoir de bonnes compétences en calcul mental constitue-t-il une sorte de passeport pour une scolarité réussie en mathématiques. Reste à comprendre pourquoi il en est ainsi. Ce sera l'objet de ce chapitre. En effet, il est important pour un(e) enseignant(e) de comprendre pourquoi l'apprentissage du calcul mental est si bénéfique : cela permet de profiter au mieux de l'effet de levier vers la réussite que crée cet apprentissage.

Enfin, une dernière idée expliquant le mode d'exposition adopté ici est que tout enseignement s'effectue sous le contrôle de ses *conditions d'évaluation*. Enseigner, évaluer est évidemment un couple incontournable, et ceci quels que soient les choix pédagogiques des enseignant(e)s : si un pédagogue veut mettre l'accent sur la compréhension, par exemple, il doit être capable de répondre à la question des critères qui assurent que tel ou tel élève comprend effectivement. Ainsi, dans ce chapitre, nous serons constamment confrontés à des questions telles que : « *Comment évaluer qu'un élève comprend telle ou telle opération ?* » ; « *Comment évaluer qu'un élève comprend l'écriture des nombres à 3 chiffres ?* », etc.

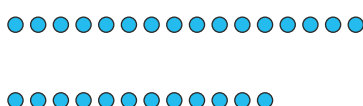
Les 2 faces de la compréhension des opérations arithmétiques

On commencera dans cette section par rappeler la définition classique de la compréhension des opérations et la façon classique dont on évalue cette compréhension (le paradigme « problèmes avec des petits nombres vs problèmes avec des grands nombres ») avant de présenter une autre définition, liée à un autre paradigme dans lequel la compréhension des situations et des opérations est évaluée à partir d'une tâche de calcul mental. Nous verrons enfin que ces deux cadres théoriques n'offrent pas les mêmes perspectives pédagogiques.

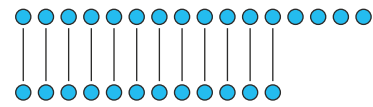
Comprendre une opération (1) : en maîtriser les différents sens ou usages

Qu'est-ce que comprendre une opération arithmétique ?

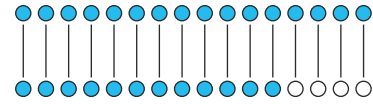
Comprendre une opération comme la soustraction, par exemple, c'est avoir acquis « le sens », ou plutôt « les sens », de cette opération. Illustrons cette pluralité des sens d'une même opération en prenant pour exemple la soustraction. On sait que la différence entre 2 grandeurs (entre 2 collections, entre 2 longueurs, entre 2 aires, etc.) peut se définir comme « ce qui dépasse lorsqu'on met en correspondance ce qui est pareil dans les 2 grandeurs ».



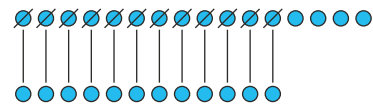
... et leur différence :



Mais la différence, c'est aussi ce qu'il faut ajouter au petit nombre pour obtenir le grand :



C'est aussi ce qui reste quand on retire le petit nombre au grand :



Grâce à cette mise en correspondance, on comprend que « ce qui est différent » est à la fois ce qu'il faut ajouter à la petite grandeur pour obtenir la grande et ce qui reste lorsqu'on retire la petite grandeur à la grande. Comprendre cela, que ce soit explicitement ou de manière intuitive, conduit à l'idée que la soustraction permet à la fois de :

- comparer deux grandeurs (lorsqu'on cherche ce qui est différent),
- déterminer le complément qu'il faut ajouter à la petite grandeur pour obtenir la grande,
- déterminer ce qui reste lorsqu'on retire la petite grandeur à la grande.

On a là les trois principaux « sens » de la soustraction arithmétique, ou encore les trois principaux usages.

De même, la division $a \div b$? permet de résoudre deux sortes de problèmes qui apparaissent a priori très différents :

- des problèmes dits de partition où l'on cherche la valeur d'une part lors d'un partage équitable ou, plus généralement, la « valeur à l'unité » : 4 objets identiques valent 248 €. Quel est le prix d'un objet ?, par exemple. Ce dernier problème se reformule de manière encore plus générale sous la forme : 248 est égal à 4 fois combien ? La division-partition de a par b est ainsi celle où l'on cherche : « a est égal à b fois combien ? » ;
- des problèmes dits de quotition où l'on cherche « En a combien de fois b ? » : Si l'on veut faire un 10 000 m autour d'une piste de 368 m, combien de tours faut-il faire ?, par exemple. La partition et la quotition sont donc les deux principaux sens de la division arithmétique.

Qu'en est-il des propriétés conceptuelles de l'addition et de la multiplication ? La principale de ces propriétés, commune à ces deux opérations, est la commutativité : « $a + b = b + a$ » et « $a \times b = b \times a$ ». Avoir acquis la commutativité de l'addition conduit, par exemple, à savoir que 10 ans après l'an 2000, ou 2000 ans après l'an 10, sont deux façons différentes de désigner la même année. Pour calculer $10 + 2000$, on peut effectuer un autre ajout que celui qui correspond au déroulement temporel de l'« histoire »

ou un autre ajout que celui correspondant à une lecture de gauche à droite de cette addition. De même, avoir acquis la commutativité de la multiplication conduit à comprendre que le nombre 2 répété 28 fois ($2 + 2 + 2 \dots$) conduit au même résultat que 28 répété 2 fois : $28 + 28$ (on peut donc effectuer une autre répétition que celle dont on parle dans un énoncé de problème). Ainsi, dans le cas de l'addition et de la multiplication, la pluralité des sens de ces opérations renvoie pour l'essentiel à la pluralité des sens de leur utilisation : on peut calculer dans un sens ou dans l'autre.

En résumé, la compréhension des opérations arithmétiques renvoie à l'utilisation de ce qu'on pourrait appeler leur « aspect couteau suisse » : une seule opération (la soustraction, par exemple) a des usages très différents (la comparaison, la recherche d'un complément et celle d'un reste). D'une manière générale, en psychologie, conceptualiser, c'est réduire la diversité du monde qui nous entoure, c'est percevoir ce qui est pareil au-delà des différences.

Les situations de recherche de la valeur d'un complément et de recherche du résultat d'un retrait, par exemple, sont « pareilles » au sens où elles peuvent être traitées par la soustraction. Et pourtant, elles apparaissent bien différentes puisque les premières parlent d'un ajout et les secondes d'un retrait. L'élève qui a compris la soustraction a réduit la diversité des situations qu'il est susceptible de rencontrer.

Les principaux sens des 4 opérations

L'addition

Ses 2 sens de calcul ($a + b = b + a$)

La soustraction

La comparaison

La recherche d'un complément

La recherche d'un reste

La multiplication

Ses 2 sens de calcul ($a \times b = b \times a$)

La division $a \div b$?

La partition (a est égal à b fois combien ?)

La quotition (En a combien de fois b ?)

Remarquons que l'un des principaux reproches que l'on pouvait faire aux programmes de 2002 (ceux qui précédaient les programmes de 2008) et aux textes pédagogiques qui les accompagnaient est de ne pas suffisamment souligner cette propriété des opérations arithmétiques. À l'époque, l'ensemble constitué des programmes des cycles 2 et 3 et de leurs documents d'application formait un document de 108 pages. Or, nulle part il n'était dit que la propriété essentielle de la division est d'être un traitement commun aux problèmes de quotition et de partition. Nulle part il n'était dit, en s'exprimant de façon moins générale, que la division par n est un traitement commun aux problèmes de groupement par n et de partage en n parts égales⁵.

5. Brissiaud R. (2006). Calcul et résolution de problèmes : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu. Texte mis en ligne sur *Le Café pédagogique* : <http://www.cafepedagogique.org/dossiers/contribs/brissiaud2.php>

Les conceptions naïves des opérations

Quand quelqu'un sait résoudre les trois principaux types de problèmes qui donnent sens à la soustraction, on peut dire de cette personne qu'elle dispose d'une première compréhension de cette opération. Des chercheurs comme Gérard Vergnaud ont insisté sur le fait que certains problèmes de soustraction, plutôt ésotériques, restent mal résolus en dernière année de collège. Il s'agissait de montrer qu'une compréhension approfondie des opérations arithmétiques est un processus de longue haleine. Cependant, ce sont évidemment les débuts de la conceptualisation de ces opérations qui intéressent prioritairement les professeurs des écoles. Or, lorsqu'une personne sait utiliser la soustraction pour déterminer à la fois un reste, un complément et pour procéder à une comparaison, cela atteste du fait que, pour elle, l'usage de la soustraction ne se réduit plus à la seule recherche d'un reste. Il faut insister sur le fait que cela ne va pas de soi ; ainsi, considérons le problème de recherche d'un complément suivant :

« Léo a 17 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ? »

Aux USA⁶, à l'âge du CM2, il y a encore 20 % d'échec à ce type de problème du fait que les enfants calculent $17 + 41$. Comme l'énoncé parle d'une quantité d'argent qui croît, ces élèves pensent qu'il faut utiliser une addition !

En effet, derrière la notion de « connaissance conceptuelle d'une opération », il y a l'idée fondamentale que, pour chacune des opérations arithmétiques, l'un des sens est plus saillant que les autres et qu'il risque d'empêcher l'accès aux autres sens : de nombreux élèves pensent longtemps que la soustraction ne s'utilise que dans un contexte de retrait. Or, il n'y a pas de début de compréhension d'une opération sans accès à au moins un autre sens que celui qui est saillant. Ainsi, l'addition arithmétique n'est pas un simple ajout, la soustraction arithmétique n'est pas un simple retrait, la multiplication arithmétique n'est pas une simple répétition d'un ajout à l'identique (on parle souvent d'addition réitérée) et la division n'est pas un simple partage. L'élève qui penserait cela pour l'une ou l'autre de ces opérations disposerait seulement de ce que certains chercheurs appellent une « conception naïve » de cette opération, conception qu'il convient tout aussi bien de qualifier de « stéréotypée » parce que le mot « naïf », en l'occurrence, renvoie à l'idée d'une élaboration insuffisante.

C'est évidemment dans le fonctionnement quotidien des mots « additionner », « soustraire », « multiplier » et « diviser » que les conceptions naïves trouvent leur origine⁷. Si, face à une assiette de gâteaux, vous demandez à quelqu'un de diviser le tas de gâteaux par 4, la personne fera systématiquement

6. Riley M. & Greeno J. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems, *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.

7. Rémi-Giraud, S. (2008). Mots courants et connaissances scientifiques. In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (Eds) : *Les Connaissances naïves*, 154-195. Paris : Armand Colin.

4 parts égales ; jamais elle ne se mettra à grouper les gâteaux par 4. Et pourtant, la division par 4 permet tout autant de savoir combien de groupes de 4 gâteaux il est possible de former (quotition) que de les partager en 4 parts égales (partition). L'école a évidemment pour responsabilité de mettre l'accent sur les sens des opérations qui ne sont pas portés par le langage quotidien : sur les sens « complément » et « comparaison » de la soustraction, sur le sens « quotition » de la division et sur la commutativité de l'addition et de la multiplication.

C'est d'ailleurs là un autre reproche qu'on pouvait faire aux programmes de 2002 et aux textes pédagogiques qui les accompagnaient : ils n'étaient pas suffisamment attentifs à la responsabilité d'éviter que les élèves s'enferment dans une conception naïve des opérations arithmétiques⁸. En prolongeant la métaphore du couteau, favoriser la compréhension des opérations arithmétiques, c'est éviter que les élèves les considèrent comme des couteaux à une lame plutôt que comme des couteaux suisses.

La façon classique d'évaluer la compréhension des opérations

Il est important de souligner que pour être crédité d'une connaissance conceptuelle de la multiplication, par exemple, il n'est pas nécessaire qu'un élève connaisse le mot « commutativité », ni qu'il sache définir cette propriété : l'essentiel est qu'il l'utilise de façon ordinaire lors des résolutions de problème. Rappelons la définition qui a été avancée des connaissances conceptuelles : « *conceptual knowledge is defined as implicit or explicit understanding of the principles governing a domain* ». Il n'est donc pas obligatoire que l'élève sache verbaliser cette sorte de connaissance pour la lui attribuer ; lorsque ce n'est pas le cas, on dit de cette connaissance conceptuelle qu'elle est implicite.

Ainsi, utiliser la soustraction pour résoudre aussi bien des problèmes de comparaison, de détermination d'un reste ou d'un complément, utiliser la division pour résoudre aussi bien des problèmes de quotition que de partition, c'est-à-dire, plus généralement, faire usage de l'aspect « couteau suisse » des opérations arithmétiques, tous ces comportements révèlent l'usage de connaissances conceptuelles.

Classiquement, c'est ainsi qu'on évalue la compréhension des opérations chez les élèves : on leur propose des problèmes variés, en étant particulièrement attentif à proposer d'autres types de problèmes que ceux qui correspondent aux sens typiques des opérations. En effet, si l'on veut diagnostiquer les élèves qui n'ont qu'une conception stéréotypée des opérations, il est nécessaire de proposer des problèmes qui mettent en échec leur résolution à partir d'une telle conception.

Distinguer la compréhension des situations et celle des opérations : le paradigme « petits nombres vs grands nombres »

Pourquoi il faut distinguer la compréhension de la situation de celle de l'opération

Mais tous les élèves échouent-ils dans la résolution de tel ou tel problème parce qu'ils n'ont pas compris l'opération ? On entend souvent les professeurs des écoles dire de tel ou tel élève qu'il échoue en résolution de problèmes parce qu'il n'en comprend pas les énoncés ou encore parce qu'il ne cherche pas à les comprendre. Ce comportement est en effet fréquent : de nombreux élèves dysfonctionnent gravement parce qu'ils fondent leur choix d'une opération sur des indices superficiels (l'opération qui vient d'être étudiée en classe, par exemple), sans chercher à comprendre la situation décrite dans l'énoncé.

Soyons plus précis en considérant à nouveau le problème de recherche d'un complément :

« Léo a 17 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ? »

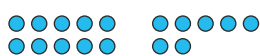
Lorsqu'un élève calcule de manière erronée $17 + 41$, il est possible qu'il ait effectivement lu l'énoncé et compris la situation au sens où il a construit une représentation mentale de celle-ci sous la forme d'une quantité initiale connue, d'un accroissement inconnu et d'une quantité finale connue. Dans ce cas, l'échec provient d'une mauvaise compréhension de la soustraction (et de l'addition !). Mais il se peut aussi que l'élève n'ait lu que très superficiellement l'énoncé et qu'il ait choisi l'addition parce que c'est l'opération... qu'il sait le mieux calculer en colonnes ! Dans ce cas, l'échec provient avant tout d'une mauvaise compréhension de la situation.

Une façon d'essayer de surmonter cette difficulté consiste à évaluer séparément la compréhension de la situation et celle de l'opération en proposant deux versions de ce problème : l'une avec des très petits nombres (5 euros au départ et 7 après l'ajout, par exemple) et l'autre avec de grands nombres (17 et 41, par exemple). C'est ce qu'on appellera le paradigme « petits nombres vs grands nombres ».

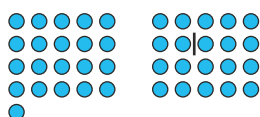
L'enfant qui donne la bonne réponse au problème avec des petits nombres prouve en effet qu'il a compris la situation. En revanche, cette réponse s'obtient facilement soit par comptage mental, soit en évoquant la relation numérique : « $5 + 2 = 7$ ». Répondre n'exige pas de penser à la soustraction. Or, nous avons vu que c'est le fait de penser à une retrait dans une situation de recherche d'un complément qui est caractéristique de la compréhension de l'opération. D'où l'intérêt de proposer à la fois le problème avec des petits et des grands nombres : c'est seulement lorsque l'enfant utilise la soustraction pour résoudre le problème avec des grands nombres qu'on juge positivement sa compréhension de l'opération.

8. Brissiaud R. (2006). *Ibid.*

Une autre façon d'apprécier la compréhension de la situation consiste à utiliser les nombres 17 et 41, mais en invitant les élèves à faire un schéma analogue avec des collections organisées. L'élève a alors la possibilité de représenter les 17 euros par des points, par exemple de la façon suivante :



Il peut alors ajouter d'autres points jusqu'à en avoir 41, mais il doit être attentif à séparer d'abord les 17 premiers points afin que ceux qu'il ajoute apparaissent en tant que tels :



En effet, une erreur fréquente consiste à répondre par le nombre total de points, 41, du fait que l'enfant n'a pas anticipé la nécessité de séparer le complément.

Là encore, lorsqu'un élève résout le problème à l'aide du schéma ci-dessus, on est sûr qu'il a compris la situation ; en revanche, on voit que l'usage d'un tel schéma analogue permet d'accéder à la solution numérique sans penser à l'opération arithmétique : l'élève simule l'ajout dont parle l'énoncé et, à aucun moment, il n'a besoin de penser à la soustraction $41 - 17$; à aucun moment il n'est nécessaire d'avoir à l'esprit un quelconque retrait pour accéder à la solution numérique.

Cela ne signifie pas que cette pratique pédagogique est sans intérêt : l'usage de problèmes avec des petits nombres comme l'usage de schémas analogiques avec de plus grands nombres constituent d'excellentes pratiques pédagogiques lorsqu'on souhaite mettre l'accent sur la compréhension... des situations. *J'apprends les maths avec Picbille CE2* en fait grand usage dans ce que nous avons appelé les *Problèmes pour apprendre à chercher* (ils sont présentés plus loin dans ce *Guide pédagogique*). En revanche, cet usage de problèmes avec des petits nombres comme l'usage de schémas analogiques ne permettent pas d'apprécier si les élèves maîtrisent les propriétés conceptuelles des opérations. C'est pourquoi les pédagogues ne peuvent pas s'en contenter.

Les insuffisances de la comparaison « petits nombres vs grands nombres »

C'est principalement concernant l'évaluation de la compréhension des opérations que ces insuffisances apparaissent. Lorsqu'un pédagogue utilise cette méthodologie, il est en effet conduit à proposer des problèmes variés avec de grands nombres, en interdisant l'usage de schémas analogiques. Il propose, par exemple, un problème de recherche d'un complément avec de grands nombres afin d'avoir une réponse à la question : l'enfant va-t-il poser une soustraction pour résoudre un problème dont l'énoncé parle d'un ajout ? En cas de réponse positive, même si l'élève fait une erreur de calcul, l'enseignant(e) pourra considérer que l'élève a compris le sens « complément » de la soustraction.

La limitation majeure d'une telle méthode est son manque de sensibilité : en effet, nous allons montrer qu'avec cette méthodologie, des enfants apparaissent comme n'ayant pas compris une opération alors qu'ils l'ont comprise ou, du moins, alors qu'ils sont sur le point de la comprendre.

À cet effet, considérons cette version du problème de la tirelire, qu'on ne pense pas à utiliser dans le cadre de la comparaison « petits nombres vs grands nombres » parce qu'elle apparaît mixte : le nombre final d'euros est un grand nombre, mais le nombre initial, lui, est un très petit nombre : « Léo a 3 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ? »

Ce problème a été proposé à des élèves de début de CE2 dans des conditions où ils ne peuvent pas faire un schéma (ils devaient donner la réponse en moins d'une minute). Il conduit à 51 % de réussite lorsqu'on demande seulement aux élèves de donner la solution numérique, sans écrire une égalité qui explique comment ils l'ont trouvée⁹.

Mais lorsqu'on demande aux élèves ayant trouvé la bonne solution numérique d'écrire l'égalité qui leur a permis de trouver ce nombre, 20 % d'entre eux ne savent pas le faire. Parmi ces élèves qui trouvent la bonne solution numérique, mais échouent à produire une égalité correcte, certains commencent par écrire la bonne soustraction : « $41 - 3 = 38$ », mais ils la barrent ou l'effacent ensuite : ils ne comprennent pas comment une soustraction aurait pu les conduire à une réponse correcte alors que la somme d'argent augmente dans la tirelire. Ces élèves ont fait une soustraction mentale, mais, l'ayant écrite, elle leur apparaît en contradiction avec le fait que l'énoncé dise qu'on ajoute des euros dans la tirelire ; ils préfèrent barrer la soustraction. Ces élèves commencent par faire un usage implicite de la soustraction et on peut donc les créditer d'un début de compréhension de la soustraction, même si, finalement, ils n'assument pas explicitement l'usage de cette opération.

Jean Piaget, le grand psychologue genevois, a écrit un beau livre dont le titre est : *Réussir et comprendre*¹⁰. Il y a en effet des réussites qui précèdent et annoncent la compréhension. Celle qui vient d'être analysée est de celles-là : être capable de donner la solution numérique à la suite d'un calcul mental, même si l'on est incapable d'explicitier ensuite comment elle a été obtenue, est l'amorce de la compréhension.

Le phénomène précédent, celui d'enfants qui, par leur comportement, manifestent qu'ils ont commencé à conceptualiser la soustraction, ne peut pas apparaître lorsque les données du problème sont deux grands nombres : 17 et 41, par exemple. En effet, avec ces nombres, la solution numérique ne s'obtient pas facilement par un calcul mental et les élèves ont besoin de poser explicitement une opération pour obtenir la solution numérique : cet usage de deux grands

9. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First Framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-107.

10. Piaget, J. (1974). *Réussir et comprendre*. Paris : PUF.

nombre interdit une utilisation implicite de la soustraction, il oblige à ce qu'elle soit explicite.

La situation semble sans issue : soit on évalue avec des petits nombres ou en préconisant l'usage des schémas et, dans ce cas, on évalue la compréhension des situations, mais pas celle des opérations arithmétiques, soit on utilise des grands nombres, en interdisant l'usage de schémas, et la compréhension des opérations arithmétiques est alors évaluée de manière très grossière : seuls les élèves ayant très bien compris les opérations ont une évaluation positive. En fait, l'exemple du problème de la tirelire montre qu'en utilisant une tâche de calcul mental, il est possible de surmonter cette difficulté.

Utiliser une tâche de calcul mental pour évaluer la compréhension des situations et des opérations : un premier exemple

En effet, tout un ensemble de recherches ont permis depuis près de 20 ans de sortir de ce dilemme, et *J'apprends les maths* a constitué une sorte de « laboratoire pratique » pour ces recherches. Elles ont conduit à une *analyse plus fine de la compétence à résoudre des problèmes arithmétiques*. Elles ont notamment permis de sortir de l'idée préconçue selon laquelle la taille des nombres serait systématiquement source d'une plus grande difficulté. Ainsi, considérons cette autre version du problème de la tirelire où les données numériques sont deux grands nombres, mais qui sont très proches l'un de l'autre :

« Léo a 38 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ? »

Ce problème a, lui aussi, été proposé aux mêmes élèves de début de CE2¹¹ dans des conditions où ils ne pouvaient pas faire un schéma. Le taux de réussite est de 64 % alors qu'il n'était que de 51 % avec les nombres 3 et 41. C'est donc le problème avec les plus grands nombres (38 et 41) qui est le mieux réussi ! L'analyse des stratégies utilisées par les élèves pour chacun des deux problèmes (celui avec 38 et 41 et celui avec 3 et 41) permet de comprendre ce phénomène.

- Avec les nombres 38 et 41, il suffit pour accéder à la solution de simuler mentalement l'ajout décrit dans l'énoncé. Soit les élèves procèdent par essais-erreurs en calculant des additions : « $38 + 2 = 40$, c'est pas assez ; $38 + 3 = 41$, la solution est 3 » ; soit ils simulent l'ajout par un comptage où ils lèvent un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire la somme présente dans la tirelire au départ : 38, 39 (1 euro ajouté), 40 (2 euros ajoutés), 41 (3 euros ajoutés). Il n'est nul besoin de penser à la soustraction pour résoudre un tel problème.

Nous dirons de ce problème qu'il est un **Si-problème** de recherche d'un complément, où le préfixe « Si » renvoie à « situation » ou à « simulation ». En effet, avec ces valeurs numériques, la simulation de la situation décrite dans l'énoncé conduit facilement à la solution numérique.

- Considérons à nouveau le même problème avec les nombres 3 et 41 : « Léo a 3 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ? »

Même avec ces nombres, il est fréquent d'observer des élèves qui utilisent la stratégie de comptage au-dessus du premier nombre, 3. Ils lèvent là encore un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire la somme présente dans la tirelire au départ : 3, 4 (1 euro ajouté), 5 (2 euros ajoutés), 6 (3 euros ajoutés), 7 (4 euros ajoutés)..., mais ils s'arrêtent évidemment bien avant de trouver la solution parce qu'ils ne savent plus combien ils ont levé de doigts (il faudrait continuer jusqu'à avoir levé 41 doigts !). Ce type de comportement est une preuve du fait que pour comprendre un énoncé, il faut dans tous les cas simuler mentalement la situation qui y est décrite (on en a bien d'autres preuves). Mais, avec ces valeurs numériques, la simulation de la situation décrite dans l'énoncé ne suffit pas pour accéder à la solution numérique (ce n'est pas un Si-problème). En fait, la quasi-totalité des élèves qui trouvent la solution et qui savent expliquer comment ils l'ont trouvée disent avoir fait une soustraction. Ces élèves utilisent une soustraction pour résoudre un problème de recherche d'un complément, ils utilisent donc des connaissances conceptuelles concernant cette opération.

Nous dirons de ce problème qu'il est un **CC-problème** de recherche d'un complément, où « CC » renvoie à « Connaissances Conceptuelles »¹², parce qu'avec ces valeurs numériques, si la simulation de la situation décrite dans l'énoncé ne conduit pas à la solution numérique, l'usage de connaissances conceptuelles conduit à une soustraction simple : $41 - 3$.

Il vaut la peine d'insister sur le fait que l'énoncé du CC-problème précédent décrit la même situation que celui du Si-problème, qu'il utilise les mêmes mots et, surtout, que l'une des données numériques y est plus petite que dans le Si-problème (3 au lieu de 38). Pourtant, ce CC-problème est plus difficile que le Si-problème parce qu'il nécessite des connaissances conceptuelles de l'opération (51% de réussite contre 64%). En fait, lorsqu'on s'intéresse aux données numériques d'un énoncé de problème, l'important

12. Dans des écrits antérieurs, dont les précédentes versions de ce *Guide pédagogique*, d'autres façons de qualifier ces 2 types de problèmes ont été utilisées. Ainsi, dans de nombreux articles, ces problèmes ont été distingués en parlant de concordance vs discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique (les cas de concordance correspondent aux Si-problèmes, ceux de discordance aux CC-problèmes). Dans d'autres articles ou chapitres de livres, ils sont distingués en parlant de Q-problèmes parce qu'ils peuvent être résolus à l'aide de concepts Quotidiens et de E-problèmes qui, eux, ne peuvent être résolus qu'à l'aide de concepts appris à l'école. Chacune de ces façons de qualifier ces deux types de problèmes est intéressante : quand une notion est riche, on hésite sur les qualités qu'il convient de mettre en avant. Les dénominations retenues ici présentent l'avantage de permettre une liaison facile avec l'analyse de la compétence arithmétique en 3 sortes de connaissances : celles qui sont spécifiquement relatives aux relations numériques et aux procédures, et des connaissances plus complexes à analyser : les connaissances conceptuelles. En effet, ce dont les pédagogues manquent vraisemblablement le plus est un cadre théorique unifié, et ce texte est une tentative pour en fournir un.

11. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). *Ibid.*

est moins la taille de ces nombres que la façon dont cette taille interagit avec le processus de compréhension de l'énoncé.

En examinant d'autres exemples, nous allons voir qu'il vaut mieux baser l'évaluation des compétences d'un élève et l'élaboration de progressions pédagogiques sur la comparaison des réussites aux Si-problèmes et aux CC-problèmes plutôt que sur une comparaison des réussites aux mêmes problèmes avec des petits nombres et des grands nombres, comme le faisait la pédagogie traditionnelle. En effet, comme dans l'exemple précédent, les CC-problèmes permettent d'apprécier les connaissances conceptuelles indépendamment de la connaissance des techniques en colonnes et, donc, de manière plus précoce et plus fine que lorsqu'on emploie des grands nombres.

Évaluer la compréhension dans une tâche de calcul mental : Si-problèmes vs CC-problèmes

Les résultats de la recherche que nous allons présenter maintenant n'ont pas été obtenus avec des écoliers, mais avec des enfants non scolarisés qui vivent de petits commerces dans les rues de Recife, au Brésil. Dans ces conditions, les différences de performances à un Si-problème et à un CC-problème sont spectaculaires, ce qui favorise une bonne compréhension du phénomène¹³.

Le calcul mental pour évaluer la compréhension des situations et des opérations : un 2^e exemple, concernant l'addition répétée

Considérons les 2 problèmes suivants :

Si : « Quel est le prix total de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ? »

CC : « Quel est le prix total de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ? »

Le Si-problème est résolu correctement par 75 % d'une population d'« enfants de la rue » d'environ 10 ans, qui n'ont aucune connaissance de la multiplication puisqu'ils n'ont jamais été scolarisés.

Le CC-problème, lui, est résolu correctement par... 0 % de la même population d'« enfants de la rue » !

Ces résultats s'expliquent ainsi. Pour résoudre le premier problème, les enfants imaginent la situation décrite dans l'énoncé : ils imaginent les 3 objets avec leurs étiquettes « 50 cruzeiros » et ils simulent l'achat de ces objets en comptant de 50 en 50. Ils disent : 50 (1 objet acheté), 100 (2 objets achetés), 150 (3 objets achetés). Il s'agit là d'une procédure élémentaire accessible à des enfants n'ayant pas été scolarisés, mais qui ont eu la nécessité de manier de l'argent pour leur commerce. Il leur suffit donc de comprendre la situation décrite dans l'énoncé pour réussir ce problème : il s'agit bien de ce que nous avons appelé un Si-problème (où Si renvoie à « situation » ou à « simulation »).

Soyons encore plus précis : comme il n'est nullement nécessaire d'avoir étudié la multiplication pour accéder à la solution de ce problème (75 % de réussite chez des enfants qui n'en

ont jamais entendu parler !), il vaut mieux dire qu'il s'agit d'un Si-problème d'addition répétée plutôt que de dire qu'il s'agit d'un Si-problème de multiplication. En fait, il s'agit d'un « pseudo-problème de multiplication » ou bien d'un « semi-problème de multiplication », dans la mesure où ce problème emprunte à la multiplication la principale des situations qui donnent sens à cette opération, mais ne nécessite pas l'usage de la propriété conceptuelle qui est caractéristique de cette opération : la commutativité.

Analysons maintenant les résultats au 2nd problème :

« Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ? »

Nous avons dit qu'il est résolu par 0 % de la même population d'« enfants de la rue ». Cela s'explique du fait que la stratégie de simulation, basée sur la situation, échoue. Lorsque les enfants imaginent la situation, c'est-à-dire les 50 objets avec leurs étiquettes « 3 cruzeiros », et lorsqu'ils simulent l'achat de ces objets en comptant de 3 en 3 : 3 (1 objet acheté), 6 (2 objets achetés), 9 (3 objets achetés), 12 (4 objets achetés)... il se révèle fastidieux, sinon impossible, de mener à son terme cet ajout de 50 fois 3. Dans le cas de ce problème, il ne suffit plus d'en comprendre l'énoncé (ce n'est pas un Si-problème), il faut de plus utiliser une propriété conceptuelle de la multiplication : l'énoncé parle de 50 fois 3, mais on n'accède à la solution numérique qu'en calculant 3 fois 50. Nous dirons qu'il s'agit d'un CC-problème d'addition répétée (où CC signifie « Connaissances Conceptuelles »). Comme il est absolument nécessaire d'avoir étudié la multiplication pour résoudre un tel problème, on peut en dire qu'il s'agit d'un « authentique problème de multiplication ». Ce problème ne se contente pas d'emprunter à la multiplication la principale des situations qui donnent sens à cette opération, il nécessite de plus l'usage de la commutativité.

On remarquera que les deux sortes de problèmes apparaissent aussi faciles les uns que les autres à n'importe quelle personne scolarisée : pour résoudre le CC-problème, elle utilise ses connaissances conceptuelles en remplaçant, sans même s'en rendre compte, le calcul de 50 fois 3 par celui de 3 fois 50.

Si-problèmes et CC-problèmes conduisent à des différences de performances spectaculaires lorsqu'on les propose à des enfants qui ne sont pas scolarisés. Chez les enfants scolarisés, les résultats sont moins spectaculaires, mais la différence de performances reste forte et elle va dans le même sens, même après l'enseignement de la multiplication¹⁴.

Ainsi, lorsqu'on propose les Si- et CC-problèmes précédents à des élèves de début de CE1 et de début de CE2, le Si-problème est bien mieux réussi que le CC-problème (47 % contre 17 % en début de CE1 et 78 % contre 53 % en début de CE2). Et l'étude des stratégies utilisées par les élèves le confirme : les Si-problèmes sont résolus par une stratégie basée sur la situation alors que les CC-problèmes nécessitent l'usage de la multiplication.

13. Schliemann, A.D., Araujo, C., Cassundé, M.A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

14. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). *Ibid.*

L'explication de cette différence entre les performances aux versions Si et CC est simple. En effet, les élèves scolarisés peuvent se répartir en 3 catégories :

– *Ceux qui échouent au Si-problème et au CC-problème.* Le fait qu'ils échouent au Si-problème prouve que ces élèves ne comprennent pas la situation ; leur échec au CC-problème est lui-même une conséquence de cette incompréhension : on ne peut pas résoudre un problème quand on ne comprend pas la situation décrite dans son énoncé !

– *Ceux qui réussissent au Si-problème, mais pas au CC-problème.* Le fait qu'ils réussissent au Si-problème prouve qu'ils comprennent la situation ; concernant le CC-problème, deux faits doivent être pris en compte : ces élèves échouent au CC-problème bien qu'ils comprennent la situation décrite dans l'énoncé (c'est la même que pour le Si-problème !) et bien qu'ils maîtrisent une procédure permettant d'accéder à la solution numérique (c'est la même que pour le Si-problème, le comptage de 50 en 50). Cela prouve qu'ils n'ont pas encore compris la commutativité de la multiplication.

– *Ceux qui réussissent au Si-problème et au CC-problème :* ceux-là comprennent à la fois la situation et l'opération.

La répartition des élèves entre les 3 groupes évolue de la manière suivante. Avant l'apprentissage de la multiplication à l'école (début de CE1), l'échec au CC-problème est presque total et les élèves se répartissent dans les deux premiers groupes (comme les enfants sont plus jeunes, il y a plus d'échecs aux Si-problèmes). Après l'apprentissage de la multiplication à l'école, ce n'est évidemment pas du jour au lendemain qu'on observe une réussite totale au CC-problème : il ne suffit pas d'enseigner la multiplication pour que tous les élèves la comprennent et c'est progressivement que les élèves des deux premiers groupes sont de moins en moins nombreux, alors que ceux du troisième groupe le sont de plus en plus.

Le calcul mental pour évaluer la compréhension des situations et des opérations : un 3^e exemple concernant la recherche du résultat d'un retrait

Pour montrer que la possibilité de construire des Si- et des CC-problèmes concerne chacune des situations correspondant aux principaux sens des opérations, intéressons-nous maintenant à un autre sens de la soustraction, son sens typique : la recherche du résultat d'un retrait. Considérons les 2 versions suivantes d'un même problème :

Si : « Il y a 32 personnes dans un autobus. À un arrêt, 3 personnes descendent. Combien reste-t-il de personnes dans l'autobus ? »

CC : « Il y a 32 personnes dans un autobus. À un arrêt, 29 personnes descendent. Combien reste-t-il de personnes dans l'autobus ? »

Lorsque ces problèmes sont proposés à des élèves de fin de CE1, le score est de 78 % au Si-problème contre 38 % au CC-problème¹⁵, et l'étude des stratégies de résolution montre que :

– *pour résoudre le Si-problème de recherche du résultat d'un retrait*, les élèves qui comptent le font à rebours (ils comptent en reculant sur la suite des nombres) : ils baissent un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire le nombre de passagers présents au départ : 32, 31 (1 passager retiré), 30 (2 passagers retirés), 29 (3 passagers retirés). Il s'agit bien d'une stratégie de simulation de la situation décrite dans l'énoncé ;

– *pour résoudre le CC-problème de recherche du résultat d'un retrait*, les élèves qui comptent à rebours échouent. Ceux qui réussissent adoptent un comptage en avançant sur la suite des nombres ; ils lèvent un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire le nombre de passagers qui sont descendus : 29, 30 (1 unité ajoutée), 31 (2 unités ajoutées), 32 (3 unités ajoutées). Ainsi, ces élèves résolvent ce problème comme s'il s'agissait d'un problème de recherche d'un complément : celui où l'on cherche combien de passagers sont montés lorsqu'il y en avait 29 avant l'arrêt et 32 après. Or, le fait qu'on puisse calculer le résultat d'un retrait par recherche d'un complément est l'une des principales propriétés conceptuelles de la soustraction. Ce problème est donc bien un CC-problème. On remarquera d'ailleurs que cela n'a rien d'évident d'explicitement les entités physiques correspondant aux différentes unités ajoutées.

Il vaut la peine de souligner que lorsqu'un élève compte à rebours pour trouver le résultat d'un Si-problème de recherche du résultat d'un retrait, il n'utilise pas réellement la soustraction en tant qu'opération arithmétique. Et cela même si, quand on lui demande d'écrire une égalité, il écrit $32 - 3 = 29$. En effet, on ne peut pas considérer cet usage du signe « - » comme un authentique usage de la soustraction : dans un tel contexte, l'élève se contente d'apparier le symbole « - » de cette opération avec la situation typique qui lui donne du sens, celle où l'on cherche le résultat d'un retrait ; à aucun moment il n'utilise une propriété conceptuelle de cette opération. Dans ce cas, le symbole « - » est une simple abréviation sténographique du verbe « retirer ».

Ceci est très général : lorsqu'un problème arithmétique relève de la signification typique d'une opération (recherche du résultat d'un retrait pour la soustraction, partage équitable pour la division), la réussite à un Si-problème n'assure pas de l'usage d'une propriété conceptuelle de l'opération, c'est-à-dire d'un authentique début de compréhension de cette opération, même dans les cas où l'enfant utilise les signes opératoires. Ce sont des cas où l'usage du signe opératoire crée une illusion.

Comment, de façon générale, créer des Si-problèmes et des CC-problèmes

Ainsi, pour chacune des situations dont nous avons dit qu'elles définissent les différents sens des opérations arithmétiques, il est possible de construire deux sortes de problèmes dont les énoncés sont rédigés avec les mêmes mots, en variant la taille des nombres de sorte que :

15. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). *Ibid.*

– Les **Si-problèmes** sont réussis dès que l'élève comprend la situation décrite dans l'énoncé. Dans ces problèmes, les valeurs numériques et l'ordre dans lequel elles sont utilisées sont choisis pour que l'accès à la solution ne nécessite que des procédures ou des relations numériques élémentaires. Dès que l'enfant comprend la situation, il peut résoudre le problème à partir d'un calcul mental simple. Il est fondamental, en effet, que l'enfant puisse accéder mentalement à la solution numérique sans aucune connaissance conceptuelle concernant les opérations.

– Les **CC-problèmes** sont rédigés avec les mêmes mots et leur solution numérique s'obtient, elle aussi, mentalement : les procédures ou les relations numériques nécessaires à leur résolution doivent être tout aussi élémentaires que celles permettant de résoudre les Si-problèmes. En revanche, la résolution des CC-problèmes, contrairement à celle des Si-problèmes, exige des connaissances conceptuelles concernant les opérations.

Concernant l'addition et la soustraction, pour obtenir un Si-problème ou un CC-problème, on est conduit à choisir un couple de nombres tantôt composé d'un grand nombre et d'un très petit nombre (32 et 3 ou 41 et 3 ou 53 et 4...), tantôt de deux grands nombres qui ont la caractéristique d'être très proches l'un de l'autre (32 et 29 ou 41 et 38 ou 53 et 49...). Comme on n'est pas dans le cadre du paradigme « petits nombres vs grands nombres », on ne choisit jamais deux très petits nombres, ni deux grands nombres quelconques, c'est-à-dire dont l'écart n'est pas très petit.

Concernant la multiplication et la division, on utilise là encore la dissymétrie entre la taille des nombres pour créer des Si- et des CC-problèmes : 4 fois 100 est plus facile à calculer en se laissant porter par la sémantique du mot « fois » ($100 + 100 + 100 + 100$) que 100 fois 4 ($4 + 4 + 4 + \dots$). Dans le cas de ces problèmes, il est cependant nécessaire que les multiples de l'un des deux nombres soient faciles à calculer mentalement : 4 fois 187 et 187 fois 4 sont en effet tous les deux difficiles à calculer mentalement. Ce nombre aux multiples simples peut être 10, 50, 100..., mais il peut également être 15 ou 25, nombres dont les premiers multiples sont au programme du cycle 3.

En fait, pour un(e) enseignant(e) souhaitant créer des Si- et des CC-problèmes, le mieux est de se rapporter aux différents exemples donnés ici :

- Un exemple de problèmes de chaque sorte a été donné pour la multiplication, beaucoup d'autres seront donnés dans la suite de ce chapitre. Concernant l'addition, il suffit de s'intéresser à un très petit ajout ($29 + 3$, par exemple) et, suivant que cet ajout correspond ou non à l'ordre temporel de l'énoncé, on est face à un Si- ou à un CC-problème.
- Concernant la soustraction, des exemples ont été donnés pour la recherche du résultat d'un retrait et la recherche d'un complément. Concernant le dernier des principaux sens de cette opération, la comparaison, une petite différence est plus facile à trouver qu'une très grande différence.

- Concernant la division, des exemples de Si- et de CC-problèmes de quotient et de partition seront donnés dans le prochain chapitre.

Comprendre une opération (2) : en maîtriser les différentes stratégies de calcul mental

Au début de ce chapitre, nous avons rencontré une première face de la conceptualisation des opérations. Comprendre une opération, avons-nous dit, c'est en maîtriser les différents usages, c'est-à-dire reconnaître les principales situations qui lui donnent du sens. C'est savoir que face à des situations différentes (celles de recherche du résultat d'un retrait et de recherche d'un complément, par exemple) on peut utiliser la même opération (la soustraction, par exemple).

C'est une deuxième face de la conceptualisation des opérations arithmétiques que le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes révèle : face à la même situation (la recherche du résultat d'un retrait, par exemple), on peut tantôt utiliser une stratégie où l'on simule ce retrait (cas d'un Si-problème : *Il y a 32 personnes dans un autobus. À un arrêt, 3 personnes descendent...*), tantôt utiliser une stratégie de recherche de la valeur d'un complément (cas d'un CC-problème : *Il y a 32 personnes dans un autobus. À un arrêt, 29 personnes descendent...*). Face à la même situation, donc, on peut utiliser des stratégies différentes.

La première face de la conceptualisation est sa face catégorisante, celle qui réduit la diversité de l'ensemble des problèmes arithmétiques qu'une personne est susceptible de rencontrer. Cette diversité se trouve réduite par la création de la catégorie des problèmes d'addition, celle des problèmes de soustraction, de multiplication, de division. La seconde face est la face stratégique de la conceptualisation : c'est celle qui permet, lorsqu'on est confronté à une situation donnée, d'adapter son comportement aux particularités des données numériques.

Le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes et le calcul mental des opérations

Pour qualifier des tâches telles que celles où l'on demande aux élèves de compléter $3 \times 50 = ?$ ou $32 - 4 = ?$, par exemple, les Anglo-Saxons continuent de parler de « problèmes » : nous dirons que ce sont des problèmes dont l'énoncé se présente d'emblée sous forme symbolique. Montrons que la seconde face de la compréhension des opérations arithmétique est celle qui rend compte des compétences en calcul mental lorsque les problèmes sont présentés d'emblée sous forme symbolique et non sous forme d'énoncés verbaux comme cela a été fait jusqu'ici.

Ainsi, concernant la soustraction, il suffit d'interroger un adulte cultivé pour s'apercevoir qu'il n'utilise pas la même stratégie de calcul mental pour déterminer $102 - 6$ et $102 - 94$. Pour calculer $102 - 6$, la plupart des adultes rapportent qu'ils procèdent par retraits successifs, c'est-à-dire en reculant sur leur file numérique mentale ; ils font : $(102 - 2) - 4 = 96$. En

revanche, pour calculer $102 - 94$, ils rapportent qu'ils calculent par compléments successifs, c'est-à-dire en avançant sur leur file numérique mentale : à partir de 94, il faut 6 pour aller à 100 ; et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout.

Le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes permet de comprendre un tel phénomène : face à des écritures telles que $102 - 6$ ou $102 - 94$, le signe « - » est interprété dans sa signification typique, c'est-à-dire comme renvoyant au calcul du résultat d'un retrait. Or, nous avons vu que ce type de problème, avec les nombres 102 et 6, est un Si-problème : sa solution s'obtient facilement en simulant le retrait, alors qu'avec les nombres 102 et 94, il s'agit d'un CC-problème : sa solution s'obtient facilement en calculant un complément.

Des recherches¹⁶, où l'on mesure le temps nécessaire pour donner la réponse plutôt que la performance en termes de réussites / échecs, ont même montré que l'analyse précédente vaut pour les calculs respectifs de $12 - 3$ (Si-problème) et de $12 - 9$ (CC-problème) : les adultes obtiennent le résultat de $12 - 3$ en calculant un retrait et celui de $12 - 9$ en calculant un complément. Ainsi, même pour les soustractions élémentaires, celles qui conduisent à un résultat inférieur à 10, savoir calculer mentalement une telle soustraction, c'est adopter la stratégie qui conduit à un calcul économique lorsqu'on décrit le comportement à l'aide du paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes.

Ainsi, le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes permet de comprendre que la compétence à résoudre des problèmes arithmétiques et la compétence en calcul mental constituent les 2 faces d'une même entité : la *conceptualisation des opérations arithmétiques*. On comprend mieux que de bonnes performances en calcul mental s'accompagnent de bonnes performances en résolution de problèmes. Précisons mieux encore certaines médiations possibles, susceptibles d'être exploitées par les pédagogues, afin de renforcer le rôle positif du calcul mental sur la résolution de problèmes arithmétiques.

Les problèmes dont l'énoncé se présente d'emblée sous une forme symbolique et qui peuvent s'interpréter comme des Si- ou des CC-problèmes

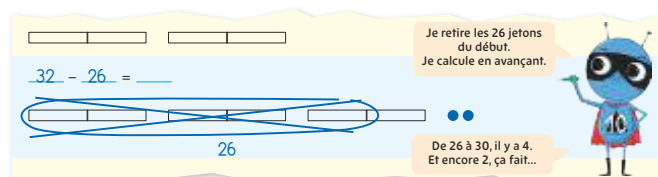
Lorsque l'énoncé d'un problème est de cette forme ($3 \times 50 = ?$ ou $32 - 28 = ?$), c'est-à-dire sans unités et avec des signes arithmétiques plutôt qu'avec des mots, la situation n'est pas exactement la même que face à un énoncé verbal. Il est intéressant de réfléchir à ces différences. Or, la principale différence est la *liberté d'interprétation qu'offre l'écriture symbolique*.

Dans une multiplication, par exemple, on peut décider que c'est tel nombre et non tel autre qui exprime le « nombre de fois » (on qualifie souvent ce nombre de « multiplicateur », l'autre étant le « multiplicande »). Ainsi, on peut décider que dans 13×2 , le multiplicateur est le nombre « 2 », ce qui

conduit à calculer $13 + 13$ et non $2 + 2 + 2 + \dots$. En revanche, dans 3×100 , on peut décider que le multiplicateur est le nombre « 3 », ce qui conduit à calculer $100 + 100 + 100$ et non $3 + 3 + 3 + \dots$. On remarquera que dans le cas de 13×2 , le calcul économique est celui où l'on décide que le multiplicateur est à droite alors que dans 3×100 , c'est celui où l'on décide qu'il est à gauche. L'exercice de cette liberté correspond à l'usage de la commutativité. Dans le cas de la multiplication, les élèves s'en emparent si facilement qu'assez rapidement ils utilisent cette même propriété dans le cadre de la résolution de problèmes verbaux : la commutativité de la multiplication n'est pas la propriété conceptuelle qui pose le plus de difficultés aux élèves. C'est là un premier exemple du fait que le calcul mental d'une opération à partir d'écritures symboliques favorise l'appropriation d'une propriété conceptuelle de cette opération et, donc, la résolution de problèmes.

Donnons un second exemple, concernant la soustraction et une propriété conceptuelle dont l'acquisition résiste beaucoup plus. Pour enseigner le calcul d'une soustraction comme $101 - 98 = ?$ (CC-problème dont l'énoncé se présente d'emblée sous forme symbolique), on peut demander aux élèves d'imaginer des objets numérotés jusqu'à 101 (les cases d'une file numérique, par exemple) et leur faire découvrir combien il est économique de décider que les 98 numéros qui sont retirés sont... les premiers numéros de la suite des nombres. En effet, si l'on retire les numéros 1, 2, 3... jusqu'à 98, il reste les numéros 99, 100 et 101, c'est-à-dire 3 numéros en tout ; d'où le résultat de la soustraction. On remarquera que le résultat de cette soustraction est alors calculé en avançant sur la suite des nombres, c'est-à-dire... par complément. Cette stratégie est évidemment bien préférable à celle où l'on retire les 98 derniers numéros (les numéros 101, 100, 99, 98, 97...) qui, elle, correspond à un comptage à rebours et qui ne conduit pas facilement au résultat !

Dans *J'apprends les maths*, c'est seulement au niveau du CE2 que cette stratégie est enseignée en s'appuyant sur une file numérique : l'un des principaux choix pédagogiques de cette collection est en effet de toujours recommander aux élèves l'usage d'autres stratégies que celle où l'on compte 1 à 1, parce que les élèves les plus fragiles s'enferment dans ces stratégies de comptage 1 à 1. Au CE1, elle est enseignée en s'appuyant sur une « file de boîtes de 10 jetons ». S'il s'agit de calculer $32 - 26$, par exemple (CC-problème), les 26 premiers jetons sont barrés à travers les boîtes.



Cela incite à utiliser une stratégie où l'on s'appuie sur la dizaine supérieure : « 26 pour aller à 30, il faut 4 et encore les 2 jetons que l'on voit : le résultat est 6. »

16. Torbeyns, J., Desmedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 79-91.

En enseignant(e) le calcul mental d'une soustraction par une stratégie de complément, on enseigne une propriété conceptuelle de cette opération et, évidemment, on favorise le progrès dans la résolution des problèmes de soustraction : l'élève qui a appris à calculer une soustraction par complément sera moins surpris qu'on puisse résoudre un problème de recherche d'un complément en posant une soustraction. De bonnes compétences en calcul mental ne font pas que révéler de bonnes compétences en résolution de problèmes, elles les favorisent.

Le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes et l'élaboration de progressions pédagogiques

Pour toutes les situations qui fondent les différents sens des opérations, nous avons vu que le paradigme Si-problèmes vs CC-problèmes permet de répartir les élèves en 3 groupes :

- Ceux qui échouent à la fois au Si-problème et au CC-problème : ceux-là ne comprennent pas la situation.
- Ceux qui réussissent au Si-problème et échouent au CC-problème : ceux-là comprennent la situation, mais pas l'opération.
- Ceux qui réussissent à la fois au Si-problème et au CC-problème : ceux-là comprennent à la fois la situation et l'opération.

Avant tout enseignement d'une opération, les élèves se répartissent pour l'essentiel dans les 2 premiers groupes : il y a ceux qui comprennent les situations et ceux qui ne les comprennent pas. Très peu d'enfants réussissent les CC-problèmes et, donc, appartiennent au 3^e groupe. Le fait qu'un élève soit dans le 1^{er} ou le 2^e groupe dépend évidemment de son expérience de vie (a-t-il déjà rencontré ce type de situation ?), mais aussi de ses compétences langagières (connait-il les mots utilisés pour décrire une telle situation ?). L'objectif initial de toute pédagogie des opérations arithmétiques devrait évidemment être que tous les élèves comprennent les différentes situations qui donnent sens aux opérations arithmétiques. Comment peut-on espérer enseigner à des élèves les propriétés conceptuelles des opérations alors qu'ils ne comprennent même pas les situations qu'il faut nécessairement utiliser pour enseigner ces propriétés conceptuelles¹⁷ ?

Un 1^{er} moment : utiliser des Si-problèmes pour faire comprendre les situations

Il nous faut commencer par préciser ce que signifie « comprendre une situation ». En effet, il est plus difficile de comprendre une situation lorsqu'elle est décrite verbalement que lorsqu'on la vit. D'où l'intérêt des situations « vécues ». Cependant, le plus souvent, ces situations ne conservent

un intérêt pédagogique que lorsque l'enseignant(e) les présente sous la forme de *situations d'anticipation du résultat d'une action*. Considérons, par exemple, cette situation : *8 jetons sont dans une boîte opaque. On y met 4 nouveaux jetons. Combien y a-t-il de jetons en tout dans la boîte ?* Il faut anticiper le résultat du dénombrement de la collection. La même situation, si les jetons étaient visibles, conduirait les élèves à les compter, perdant de ce fait tout intérêt. Les utilisateurs de *J'apprends les maths* retrouvent là une constante de la collection : créer des situations d'anticipation, en utilisant le masquage notamment.

Il est cependant important de souligner qu'à terme, les élèves doivent comprendre les situations à partir de leur seule description verbale et que les énoncés de problèmes verbaux sont donc incontournables : si l'on devait, à chaque fois que l'on évoque une situation en classe, recréer les conditions matérielles de cette situation plutôt que de la décrire verbalement, tout manquerait : le matériel nécessaire, la place dans la classe, mais, surtout, le temps nécessaire. C'est la magie du verbe que de permettre une sorte de présence à ce qui ne peut pas être effectivement présent.

Revenons à la question qui nous préoccupe ici : comment faire comprendre aux élèves les situations qui fondent le sens des opérations arithmétiques, que ces situations soient décrites verbalement ou présentées sous la forme d'une situation d'anticipation ? Le meilleur moyen d'atteindre cet objectif est d'apprendre aux élèves à résoudre les Si-problèmes correspondants. En effet, comme l'accès à leur solution numérique peut se faire mentalement (il nécessite des connaissances arithmétiques élémentaires du point de vue des procédures et des relations numériques), l'attention des élèves, face à ces Si-problèmes, peut se porter quasi exclusivement sur la compréhension de la situation.

Concernant la multiplication, par exemple, les élèves apprennent dans la séquence 11 à résoudre des Si-problèmes aussi variés que :

Combien y a-t-il de mouchoirs en tout dans 3 paquets de 15 mouchoirs ?

Combien y a-t-il d'élèves en tout dans 4 classes de 25 élèves ?

Quel est le prix total de 8 objets à 10 € l'un ?

Quelle est la longueur totale de 3 segments de 50 mm mis bout à bout ?

Il s'agit, dans tous les cas, de Si-problèmes d'addition réitérée. Au passage, on remarquera que cela permet aux élèves de développer leur connaissance de relations numériques dont on peut considérer qu'elles doivent être connues en fin d'année (elles sont d'ailleurs au programme !), à savoir la connaissance des premiers multiples de 15, 25 et 50, et que cela renforce la connaissance de la numération décimale en faisant mobiliser les multiples de 10.

Une question se pose cependant : les élèves ont déjà étudié la multiplication au CE1 où ils ont déjà été confrontés à des Si-problèmes et des CC-problèmes. Ils ont même été

17. C'est là un autre des principaux reproches que l'on peut faire à la pédagogie dite traditionnelle, celle qui était pratiquée avant 1970, lorsque les 4 opérations étaient au programme du CP : on voulait enseigner très précocement les opérations, sans s'être assuré que les enfants comprennent les situations qui donnent sens à ces opérations.

confrontés à des problèmes dont la solution ne s'obtient pas par un calcul mental (la technique de la multiplication par un nombre à 1 chiffre est au programme du CE1). Faut-il, dès lors, commencer à nouveau l'année de CE2 en proposant la résolution de Si-problèmes ? S'il s'agit d'un premier moment au CE1, ce n'est plus vraiment le cas au CE2.

Nous pensons qu'il faut quand même répondre affirmativement à cette question. Rappelons qu'à l'entrée au CE2, le score de réussite aux Si-problèmes d'addition réitérée est de 78 %. Tous les élèves sont loin de rentrer au CE2 en ayant compris la situation qui fonde le sens de la multiplication. En choisissant de mettre l'accent sur la résolution de Si-problèmes en début d'année de CE2, comme cela est fait dans *J'apprends les maths*, l'enseignant(e) offre la possibilité aux élèves qui ne comprennent pas encore les situations de ce type de progresser, et il crée de meilleures conditions pour qu'ils comprennent la multiplication. Lorsque l'école offre une plage de temps réduite pour acquérir telle ou telle connaissance, seuls les élèves qui apprennent vite s'en sortent bien.

Remarquons cependant qu'une précaution importante est prise : en utilisant les multiples de 15, 25 et 50 pour créer ces Si-problèmes, on évite dans *J'apprends les maths* de proposer les mêmes activités qu'au CE1 (ces multiples n'y sont pas travaillés), ce qui assure l'intérêt de tous les élèves, y compris de ceux qui ont déjà tout compris au CE1 quand les multiples utilisés pour créer des Si-problèmes étaient plutôt ceux de 5 et de 10.

Un 2^e moment : utiliser des CC-problèmes pour faire comprendre les opérations

Faire comprendre les opérations, c'est enseigner leurs propriétés conceptuelles. Là encore, le meilleur moyen d'atteindre cet objectif est d'apprendre aux élèves à résoudre les CC-problèmes correspondants. En effet, comme l'accès à leur solution numérique peut se faire mentalement (la résolution nécessite des connaissances arithmétiques élémentaires du point de vue des procédures et des relations numériques), l'attention de l'élève peut se porter quasi exclusivement sur la compréhension de l'opération.

Concernant la multiplication, par exemple, les élèves apprennent à partir de la séquence 35 à résoudre des CC-problèmes tels que ceux-ci :

Combien y a-t-il de mouchoirs en tout dans 15 paquets de 3 mouchoirs ?

Combien d'élèves en tout dans 25 équipes de 3 élèves ?

Quel est le prix total de 10 objets à 8 € l'un ?

Quelle est la longueur totale de 50 segments de 3 mm mis bout à bout ?

On remarquera comment ces CC-problèmes d'addition réitérée sont construits à partir des Si-problèmes utilisés précédemment : on s'est contenté d'intervertir l'ordre des nombres. Une question se pose, cependant : avant tout enseignement de la multiplication, ce type de problèmes

conduit à un taux d'échec important ; comment fait-on pour que ce ne soit plus le cas ? Il faut créer des situations permettant aux élèves de se convaincre que le calcul de a fois b conduit au même nombre que celui de b fois a . La pédagogie dispose de moyens classiques à cet effet, dont le principal, en l'occurrence, est la disposition des éléments à dénombrer en a lignes et b colonnes. En effet, selon que les éléments sont dénombrés ligne par ligne ou colonne par colonne, on a déterminé a fois b ou b fois a ; ces deux façons de faire conduisent au nombre total. Mais, là encore, le paradigme Si- vs CC- problèmes permet une amélioration sensible des pratiques pédagogiques existantes. Il suffit que l'un des nombres soit très petit et que l'autre ait des multiples simples à calculer pour que la situation pédagogique se trouve transformée.

Ainsi, considérons ce CC-problème (il s'agit de calculer 50 fois 3), dont l'énoncé s'accompagne d'un schéma réaliste :

Des voitures vont monter 3 par 3 sur un bateau.

50 rangées de 3 voitures attendent sur le quai pour monter sur le bateau.

Combien y a-t-il de voitures sur le quai ?

Le calcul de $3 + 3 + \dots$ ne menant pas à la solution numérique, les élèves sont invités à imaginer comment l'image se prolongerait vers la droite. Ce qui permet d'explicitier l'organisation en lignes et colonnes. Ils peuvent ainsi accéder à un autre mode d'énumération des unités : dans l'image prolongée, il y a 50 voitures en haut, 50 au milieu et 50 en bas, 150 voitures en tout.

Qu'apporte l'usage de ce CC-problème par rapport aux situations plus classiques utilisant une organisation en lignes et colonnes ? La possibilité, dès que l'on a pensé à l'autre mode d'énumération de l'ensemble des voitures, d'accéder à la solution numérique à l'aide d'un calcul mental. L'accès à la solution se traduit ainsi par une sorte de phénomène d'« illumination » ; les psychologues parlent d'ailleurs d'« insight problème » ou encore de « ha-ha problème ». Face à un tel problème, peu d'élèves en trouvent la solution, mais beaucoup d'élèves, dès que la solution est collectivement explicitée, s'interrogent sur le mode « Comment se fait-il que je n'y ai pas pensé ? ». Et c'est ce qui compte après tout : il est fondamental que quand la solution d'un problème surgit au sein de la classe, elle soit comprise par un maximum d'élèves.

Bref, avant tout enseignement des opérations arithmétiques, les CC-problèmes sont massivement échoués parce que leur résolution nécessite l'usage de propriétés conceptuelles caractéristiques des opérations arithmétiques. Mais il existe des façons d'énoncer certains de ces problèmes qui les transforment en « insight problème » : le pédagogue s'est arrangé pour qu'en changeant de point de vue sur la situation décrite dans l'énoncé, une sorte d'illumination conduise à la solution.

D'un point de vue pédagogique, il est intéressant de choisir ce genre de moment pour, au CE1, introduire le signe opératoire « $\times$ » en classe, ou pour revoir ce signe au CE2. En effet, ce signe apparaît alors de manière très explicite comme

le symbole de la commutativité de la multiplication. L'enseignant(e) peut théâtraliser cette propriété en disant, par exemple : « *Les hommes, pour ne pas oublier que le calcul de 3 fois 50, par exemple, conduit au même nombre que celui de 50 fois 3, ont inventé une opération arithmétique, la multiplication, et un signe, le signe "x". On peut écrire $3 \times 50 = 150$ ou $50 \times 3 = 150$.* »

Dans le prochain chapitre nous verrons qu'il existe de même un « insight problème » de partition dont la résolution permet un enseignement très explicite en classe de la principale propriété conceptuelle de la division : on peut remplacer une stratégie de partition (a est égal à b fois combien ?) par une stratégie de quotition (en a, combien de fois b ?).

Un 3^e moment : apprendre les techniques opératoires pour résoudre les problèmes avec des nombres quelconques

Enfin, dans un dernier moment, après que les élèves aient résolu mentalement des Si-problèmes (pour s'assurer de leur compréhension des situations), puis des CC-problèmes (pour s'assurer de leur compréhension de l'opération), il convient de leur enseigner les techniques opératoires afin qu'ils puissent résoudre les problèmes qui ne peuvent pas être résolus mentalement.

En effet, il est raisonnable de n'enseigner une technique opératoire que lorsque la quasi-totalité des élèves comprennent les situations dans lesquelles ils seront conduits à l'utiliser ; il est de même raisonnable d'éviter le plus possible que l'enseignement des techniques opératoires soit seulement celui de la mise en œuvre de règles dont les élèves ne maîtrisent pas les raisons et, pour que ce ne soit pas le cas, il est raisonnable que le plus grand nombre possible d'élèves maîtrisent les propriétés conceptuelles qui justifient ces règles.

Calcul mental et opérations posées : l'organisation en 5 périodes de *J'apprends les maths avec Picbille CE2*

Ainsi, dans *J'apprends les maths avec Picbille CE2*, l'apprentissage du calcul mental précède-t-il systématiquement celui de l'opération posée. L'organisation retenue est exposée à la page 5 du fichier et à la page 45 de ce *Guide pédagogique* à l'aide d'un tableau synoptique : pour chaque opération (addition, soustraction, multiplication par un nombre à 1 chiffre, division et enfin multiplication par un nombre à 2 chiffres), le calcul mental précède le calcul en colonnes.

Comprendre l'écriture des nombres

Après la compréhension des opérations arithmétiques, intéressons-nous à la compréhension de l'écriture des nombres. Comme dans le cas de la compréhension des opérations arithmétiques, nous allons commencer par définir ce que signifie « comprendre l'écriture de 358 », par exemple.

Qu'est-ce que comprendre l'écriture d'un nombre à plusieurs chiffres ?

Qu'est-ce que comprendre l'écriture d'un nombre comme 358 ? La réponse qui vient immédiatement à l'esprit est la suivante : c'est savoir que le chiffre « 3 » désigne des centaines, le chiffre « 5 » des dizaines et le chiffre « 8 » des unités. Cependant, lorsqu'un(e) enseignant(e) entraîne ses élèves à répondre aux questions portant sur ce que désignent les différents chiffres (« Quel est le chiffre des dizaines ? », par exemple), certains élèves fournissent les réponses attendues sans réellement comprendre les écritures correspondantes. En fait, à force d'entraînement, même les élèves les plus faibles arrivent à répondre correctement à ce type de questions. Mais ils le font seulement pendant les périodes où ces questions sont d'actualité dans la classe, et, dès que ce n'est plus le cas... ils oublient quelles sont les « bonnes réponses ». Par ailleurs, ces « bonnes réponses » restent purement verbales au sens où elles ne sont reliées à aucun savoir-faire (on parle souvent de « verbalisme¹⁸ »). C'est pourquoi il vaut mieux définir la compréhension de l'écriture des nombres à partir de savoir-faire plutôt que de réponses verbales. Avançons une première définition de la compréhension de l'écriture d'un nombre à plusieurs chiffres.

Comprendre l'écriture 358, c'est savoir qu'il existe plusieurs façons de construire une collection ayant 358 objets :

- Il est évidemment possible de compter les objets 1 à 1 jusqu'à entendre le mot « trois-cent-cinquante-huit », mais ce sera long !
- En fait, il vaut mieux commencer par grouper les objets par 100 (10 groupes de 10), puis « compter des cents » plutôt que de « compter des uns » : « 1 cent, 2 cents, 3 cents ». Et lorsqu'il ne reste plus assez d'objets pour compter des cents, plutôt que de se remettre à « compter des uns », mieux vaut continuer en « comptant des dix » : « ... 3 cents et 1 dix (trois-cent-dix), 3 cents et 2 dix (trois-cent-vingt), 3 cents et 3 dix (trois-cent-trente)... ». Enfin, lorsqu'il reste moins de dix objets, cette procédure s'achève en « comptant des uns » : « trois-cent-cinquante-et-un, trois-cent-cinquante-deux... trois-cent-cinquante-huit ».

Comprendre l'écriture de ce nombre, c'est donc s'être forgé la conviction que la procédure consistant à compter 1 à 1 trois cent cinquante-huit objets et celle consistant à compter d'abord 3 cents, puis 5 dix et enfin 8 uns conduisent à des collections qui ont la même taille, et qu'on peut donc à loisir remplacer une façon de faire par l'autre. Remarquons que cette définition de la compréhension de l'écriture des nombres est proche de celle que nous avons avancée p. 13 concernant la compréhension des opérations : dans un cas comme dans l'autre, comprendre c'est s'être forgé la conviction que des procédures différentes conduisent au même résultat :

18. Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Actes du Congrès scientifique international de Toulouse : Comprendre*. Numéro spécial de *Rééducation orthophonique*, 223, 225-238.

pour calculer une soustraction, par exemple, on peut chercher le résultat d'un retrait ou la valeur d'un complément. En fait, depuis les travaux de Piaget, on peut considérer que la conceptualisation arithmétique se fonde toujours dans ce type de propriétés des actions, qu'il s'agisse de comprendre des opérations, des nombres ou, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, des relations numériques comme « 8 plus 4 est égal à 12 ».

Une connaissance fondamentale : savoir que 35 dizaines, c'est 350 et que 358, c'est 35 dizaines et 8

En fait, la première définition que nous avons avancée de la compréhension des nombres à 3 chiffres est très insuffisante : lorsque des nombres sont supérieurs à 100, il est important de savoir que l'écriture d'un nombre renseigne sur la façon dont on peut le former en utilisant seulement le groupement par 10. Ainsi, il ne suffit pas de concevoir 100 comme 1 centaine, il faut aussi le concevoir comme 10 dizaines. Et, à la suite, il faut concevoir 110 comme 11 dizaines, 120 comme 12 dizaines, 130 comme 13 dizaines... 190 comme 19 dizaines, 200 comme 20 dizaines, 210 comme 21 dizaines... 350 comme 35 dizaines, etc.

Ainsi, l'écriture des nombres à 3 chiffres reflète-t-elle le fait que 3 stratégies d'énumération des unités conduisent au même résultat. Nous avons vu les deux premières : construire une collection de 358 en comptant 1 à 1 et compter 3 cents, 5 dix et 8 « uns ».

En isolant le dernier chiffre (8) de 358 et en s'intéressant à ceux qui précèdent (35), on se rappelle que cette écriture reflète aussi une troisième stratégie possible : on peut aussi compter 35 groupes de dix et 8 « uns ».

$$\begin{array}{c} 3 \quad 5 \quad 8 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ \text{groupes de 10} \end{array}$$

Or, la lecture typique de l'écriture « trois-cent-cinquante-huit » masque cette dernière possibilité. En effet, l'oral établit une correspondance terme à terme entre chaque chiffre et des informations concernant respectivement les centaines (trois cents), les dizaines (cinquante) et les unités (huit). On est fortement conduit à penser que, dans l'écriture 358, seul le chiffre 5 est porteur d'information concernant les dizaines. Ce qu'on entend en oralisant 358, « trois cent cinquante-huit », fait ainsi obstacle à l'interprétation du chiffre « 3 » comme « trente dizaines » et du nombre « 35 » comme désignant des dizaines.

Mais est-ce utile de s'intéresser à cette façon de former des collections ? Oui, car la compréhension de nombreuses règles de calcul en dépend.

Comprendre les retenues, la multiplication et la division mentales par 10, la division posée...

Imaginons le calcul de la multiplication 171×5 posée en colonnes. Au rang des dizaines, on est conduit à calculer 5 fois 7 dizaines, c'est-à-dire 35 dizaines. Comprendre

la retenue (« Je pose 5 dizaines et je retiens 3 centaines »), c'est savoir que 35 dizaines, c'est 350. Il en va de même de la retenue d'une addition : si l'addition des chiffres dans la colonne des dizaines conduit à 14 dizaines, par exemple, comprendre la retenue (« Je pose 4 dizaines et je retiens 1 centaine »), c'est savoir que 14 dizaines, c'est 140. De même, quelle que soit la technique opératoire d'une soustraction que l'on choisit, il serait facile de montrer que cette même propriété y est sollicitée.

La multiplication par 10 la sollicite tout autant : calculer 42×10 , par exemple, c'est chercher le nombre total correspondant à 42 dizaines : celui qui sait que 42 dizaines c'est 420 accède directement au résultat.

Il en est de même de la division par 10. La recherche du quotient et du reste de la division de 639 par 10, par exemple, se fait par quotition : on cherche « En 639, combien de fois 10 ? » ; ce qui revient à chercher combien il y a de dizaines dans 639 : la réponse est 63 (c'est le quotient) et il reste 9.

Et lorsqu'il s'agit de calculer une division comme 358 divisé par 6 en la posant avec la « potence », le calcul commence en cherchant à partager les 3 centaines en 6 parts égales. Comme ce n'est pas possible, on partage... les 35 dizaines en 6 parts égales. Encore faut-il savoir que 358, c'est 35 dizaines et encore 8 !

Bref, cette connaissance permet de comprendre un grand nombre de règles de calcul. Lorsque cette connaissance fait défaut, ces règles sont apprises isolément, sans lien les unes avec les autres, ce qui conduit certains élèves à être submergés par un tel nombre de règles à mémoriser. L'absence de compréhension de l'écriture des nombres est très certainement une des principales causes de l'échec en mathématiques.

Un matériel de numération qui favorise l'appropriation de cette propriété : l'intérêt du masquage

En fait, le matériel de numération utilisé dans *J'apprends les maths* est particulièrement bien adapté à cet enseignement ; en amenant les élèves à ranger 10 groupes de 10 jetons dans une valise dont ils « ferment le couvercle », on leur permet d'adopter un double point de vue sur le groupe de 100 jetons : c'est 1 centaine, mais les élèves peuvent aussitôt se rappeler l'action qui les a conduits à former cette centaine, à savoir la réunion de 10 groupes de 10 jetons. Ils voient 1 valise, mais peuvent aisément se représenter les 10 boîtes de 10 jetons qu'elle contient.

Considérons une collection de 126 jetons organisés avec le matériel :



Le masquage empêche de voir l'ensemble des groupes de 10, mais il aide à le concevoir : il y a les 10 groupes de 10 « qu'on ne voit plus », mais qui sont là, derrière le couvercle

de la valise, et les 2 groupes de 10 qu'on voit encore (le même raisonnement pourrait être tenu concernant la « caisse de mille ») ; ce faisant, la compréhension du fait que 126, par exemple, contient 12 groupes de 10 et encore 6 unités s'en trouve facilitée.

Une écriture chiffrée aide à concilier ces deux points de vue : dans « 137 », par exemple, sans négliger qu'il y a 1 groupe de 100 noté par « 1 », il suffit de s'intéresser aux deux premiers chiffres pour se rappeler que 137 contient 13 groupes de 10.

1 3 7
}
groupes de 10

Il est cependant fondamental que les élèves soient capables de contrôler l'usage d'une telle règle en se référant au matériel structuré : dans 137, il y a 13 groupes de 10 parce qu'il y a 10 groupes de 10 qui sont cachés dans la valise et 3 groupes de 10 qu'on voit encore. L'enseignant(e) devra régulièrement s'assurer que les élèves sont capables d'interpréter la règle portant sur les écritures chiffrées en se référant au matériel. C'est la garantie d'une authentique compréhension.

Une activité, de ce point de vue, est particulièrement importante. Les élèves sont confrontés à une configuration de valises et boîtes comme celle-ci :



On leur demande combien il y a d'unités en tout (la réponse 260 est facilement accessible) et combien il y a de groupes de 10 en tout. Mais comme certains élèves apprennent à répondre en utilisant une règle qu'ils ne comprennent pas, il est très important, dès que l'on a le moindre doute sur la « bonne réponse » (26) qu'a fournie tel ou tel élève, de ne pas s'en contenter et de s'assurer qu'il comprend les raisons d'une telle réponse en le questionnant : « *Mais je ne vois pas les 26 groupes de 10, je n'en vois que 6 !* » L'élève doit être capable d'explicitier l'emboîtement des groupes de 10 dans le groupe de 100. Cette contre-suggestion (l'enseignant(e) feint de ne pas comprendre qu'il y a 26 groupes de 10 en tout) est le meilleur moyen de s'assurer que c'est le cas.

Mettre d'emblée l'accent sur cette propriété : l'importance des « premières rencontres »

Dans *J'apprends les maths avec Picbille CE2*, lors de la première dictée de nombres à 3 chiffres, l'enseignant(e) dit : « *Écrivez en chiffres le nombre que je vous dicte : 14 dizaines et 3 unités.* » Les élèves écrivent « 143 » (ils ont appris à le faire lors de la leçon !) et l'enseignant(e) poursuit : « *Comment se dit habituellement ce nombre ?* »

De même, lors de la première dictée de nombres à 4 chiffres, l'enseignant(e) dit : « *Écrivez en chiffres le nombre que je vous dicte : 27 centaines et 51 unités.* » Les élèves écrivent « 2 751 » (ils ont appris à le faire lors de la leçon !) et l'enseignant(e) poursuit : « *Comment se dit habituellement ce nombre ?* »

Cela se justifie aisément : la première rencontre des élèves avec un nouveau concept arithmétique (au CE2, la première rencontre avec les nombres à 4 chiffres, par exemple), ou la première fois qu'ils étudient à nouveau un contenu de connaissance récent dans la mesure où il n'a été abordé que l'année précédente (la première fois qu'ils revoient les nombres à 3 chiffres en début de CE2, par exemple), sont des moments importants. Ces jours-là, les élèves sont en général particulièrement attentifs. C'est pour eux une sorte d'évènement (Ça y est, on étudie les nombres à 4 chiffres !). Cet évènement, en tant que tel, favorise la mémorisation et l'apprentissage. C'est pourquoi nous avons choisi, lors de cette première rencontre, de mettre l'accent sur les significations les moins typiques, celles qui ne sont pas véhiculées par le langage quotidien : « deux cent soixante, c'est 26 groupes de 10 » et « quatre mille deux cents, c'est 42 groupes de 100 ».

Mémoriser les résultats d'opérations élémentaires

Parmi toutes les relations numériques qu'il est nécessaire qu'un élève mémorise, les résultats d'opérations élémentaires ($6 + 9 = ?$; $13 - 6 = ?$; $4 \times 8 = ?$; $27 \div 3 = ?$) figurent évidemment en bonne place.

Cela peut surprendre, mais l'accès à la connaissance d'une relation numérique telle que « cinq plus sept, égale douze » est un processus psychologique extrêmement difficile à étudier. Il suffit d'avoir vu des élèves de maternelle qui savent précocement réciter que « un et un, deux ; deux et deux, quatre ; quatre et quatre, huit » alors qu'ils ne savent pas ce que signifient les mots « quatre » et « huit », pour prendre conscience qu'un apprentissage purement « par cœur » est susceptible de conduire à un comportement qui donne seulement l'illusion d'une telle connaissance. La seule association verbale des mots ne conduit pas à une authentique connaissance des relations numériques.

Mémorisation, appropriation de procédures et... compréhension

En fait, pour qu'on puisse parler d'une authentique connaissance numérique, il faut que l'enfant soit capable d'interpréter en termes d'actions ce qu'il énonce verbalement : concernant « quatre plus quatre égale huit », par exemple, cela signifie que si je réunis une collection de 4 objets à une autre ayant elle aussi 4 objets, et si je dénombre le tout, je trouve le même résultat que si j'avais dénombré d'emblée une collection de 8 objets. Réunir, dénombrer, c'est mettre en œuvre des savoir-faire... En mathématiques, la connaissance verbale des relations numériques garde donc partie liée avec des procédures.

Avançons une définition des relations numériques : elles sont l'expression verbale et condensée du fait que des procédures différentes conduisent au même résultat. « 4 fois 8, 32 », par exemple, signifie que si je réunis 4 collections de 8 unités et

si je dénombre le tout ainsi formé, j'obtiens le même résultat que si je forme différemment une collection de 32 unités (en comptant 1 à 1, par exemple). Ainsi, la connaissance de relations numériques renvoie au fait qu'il existe une pluralité de stratégies pour résoudre telle ou telle tâche numérique.

Précédemment dans ce chapitre, nous avons vu que la compréhension des opérations arithmétiques renvoie au fait qu'un élève dispose d'une pluralité de stratégies, que la compréhension de l'écriture d'un nombre renvoie elle aussi à la possibilité d'une pluralité de stratégies de construction d'une collection ayant ce nombre d'éléments. Concernant les relations numériques, leur compréhension renvoie également au fait que des stratégies différentes conduisent au même résultat. Le fait de disposer de plusieurs stratégies, c'est-à-dire le fait d'être dans un rapport stratégique aux tâches apparaît ainsi comme une caractéristique très générale de la compréhension.

Mémorisation et compréhension ayant ainsi partie liée, il n'est guère étonnant qu'une des principales caractéristiques des élèves en difficulté grave et durable dans leurs apprentissages numériques soit... qu'ils ne mémorisent pas les relations numériques les plus élémentaires, à savoir les résultats des additions dont chacun des termes est inférieur à dix¹⁹. Toutes les études sur la difficulté en arithmétique élémentaire montrent en effet que les élèves en difficulté grave et durable dans leurs apprentissages numériques sont des enfants qui ne disposent que d'une procédure pour trouver le résultat d'additions élémentaires : le comptage 1 à 1. On peut considérer que, chez ces élèves, l'absence de mémorisation est en grande partie le résultat d'une absence de compréhension.

Un tel phénomène concerne évidemment les enseignant(e)s de CE2 : parmi les élèves qu'ils reçoivent dans cette classe, certains sont des enfants « compteurs invétérés » et l'une de leurs priorités doit évidemment être de permettre à ces élèves d'accéder à d'autres stratégies. Or, les recherches dans le domaine tendraient à prouver que cela s'effectue différemment dans le cas de l'addition / soustraction et dans celui de la multiplication.

Plus d'association verbale pour la multiplication que pour l'addition et la soustraction

Lorsqu'on interroge un adulte cultivé à brûle-pourpoint : « quatre fois huit ? », la réponse, « 32 », fuse ; lorsque la question posée est « onze moins trois ? », la réponse est rapide, mais elle l'est moins. On a l'impression qu'il y a plus d'association verbale dans le cas de la multiplication que dans celui de la soustraction. Et lorsque la question posée est « huit plus quatre ? », on a, là encore, l'impression que

la réponse ne s'impose pas d'emblée comme le fait « 32 » après l'interrogation « quatre fois huit ? ».

Ce n'est pas qu'une impression : les psychologues, en se basant sur divers moyens d'investigation expérimentaux tels que la mesure des temps de réponses, ont montré que les résultats élémentaires d'additions et de soustractions, d'une part, et de multiplications, d'autre part, semblent stockés différemment en mémoire. Ils parlent de *connaissances procédurales automatisées* dans le cas de l'addition et de la soustraction, de *connaissances déclaratives* dans celui de la multiplication²⁰.

Dire que les résultats d'additions et de soustractions élémentaires sont des connaissances procédurales automatisées signifie qu'ils sont reconstruits à chaque fois. Mais ils le sont de manière si fulgurante et cela est si peu coûteux en ressources cognitives que nous n'avons même pas conscience de cette reconstruction.

Un phénomène d'automatisation familial est celui de la conduite automobile. Souvent, un conducteur débutant ne supporte aucune distraction, il ne supporte même pas qu'on lui parle quand il est au volant ; en revanche, cette activité de parole devient facile et ordinaire lorsque la conduite est plus automatisée. Ce qu'on appelle le processus d'automatisation d'une procédure renvoie donc à l'idée suivante : avec l'exercice, son exécution nécessite de moins en moins de ressources cognitives, laissant ainsi la possibilité de faire autre chose en même temps.

Avec l'exercice, donc, le calcul des additions et des soustractions élémentaires s'automatise, du moins lorsqu'il s'agit réellement d'un calcul, c'est-à-dire lorsque l'élève n'est pas obligé de retrouver le résultat en comptant 1 à 1. En effet, toutes les procédures ne s'automatisent pas au point de permettre un accès rapide au résultat.

La clé de la mémorisation des résultats d'additions élémentaires : l'usage de stratégies d'appui sur 10

Un appui exclusif sur le comptage n'aide pas, voire empêche la mémorisation des résultats d'additions.

Un grand nombre d'élèves entrent au CE2 sans avoir mémorisé les résultats des additions et des soustractions élémentaires. Confrontés au calcul de « neuf + sept », par exemple, ils comptent au-dessus de neuf. Ils disent : neuf, dix (1 doigt est levé), onze (2), douze (3), treize (4), quatorze (5), quinze (6), seize (7). Or, pour mémoriser le résultat de cette addition, il faut relier directement « neuf plus sept » et « seize » ; l'élève qui compte 1 à 1 au-dessus de neuf prononce 7 mots-nombres différents (de neuf à quinze) entre l'énoncé du calcul « neuf

19. Geary, D.C. (2005). Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. In M.-P. Noël (Ed) : *La Dyscalculie*. Marseille : Solal.
INSERM (2007) *Dyslexie, Dysorthographe, Dyscalculie – Bilan des données scientifiques*. Paris : Les éditions Inserm.

20. Fischer, J.P. (1992). *Apprentissages numériques : la distinction procédural/déclaratif*. Nancy : Presses universitaires.
Fanget M., Thevenot C., Castel C., Fayol M. (2011). Retrieval from memory or procedural strategies for addition problems : The use of the operand-recognition paradigm in 10-year-old children. *Swiss Journal of Psychology*, Vol 70(1), 35-39.

plus sept » et son résultat « seize ». Cela a pour conséquence que l'énoncé du problème a disparu de ce qu'on appelle sa « mémoire de travail » quand le résultat y figure enfin : tous les mots prononcés entre « neuf plus sept » et « seize » sont autant de parasites verbaux à la mémorisation.

En fait, même lorsque le résultat d'un calcul est mémorisé sous la forme d'une procédure automatisée, on peut considérer qu'un minimum d'association verbale est nécessaire entre l'énoncé du calcul et son résultat. Le comptage 1 à 1 ne l'autorise pas. Par conséquent, il ne conduit pas à la mémorisation. Une preuve de ce phénomène est évidemment le cas des élèves en difficulté grave et durable dans leurs apprentissages numériques : des stagiaires à l'INSPE ont observé que 3 élèves sur 4 environ n'ont pas mémorisé les résultats d'additions élémentaires en sixième de SEGPA. Ces élèves ont reconstruit des centaines, voire des milliers de fois les résultats des additions élémentaires, mais ils l'ont fait par comptage 1 à 1, ils ne les ont pas mémorisés.

Une première condition de la mémorisation : inclure des relations numériques connues dans une procédure de comptage

Si les résultats d'additions et de soustractions élémentaires se mémorisent en automatisant des procédures et si celles-ci ne sont pas des procédures de comptage 1 à 1, une question se pose : de quelles procédures s'agit-il ?

Il s'agit de procédures où l'on s'appuie sur 10 pour trouver le résultat, telle la stratégie que l'on appelle un « passage de la dizaine » : $9 + 7 = 9 + 1 + 6$ ou $7 + 4 = 7 + 3 + 1$.

Cette stratégie permet une association beaucoup plus directe entre l'énoncé du calcul et son résultat. Lorsqu'un élève dit : « neuf plus sept égale... neuf plus un... dix et encore six, seize », il prononce beaucoup moins de ces mots-nombres dont nous avons dit qu'ils sont des parasites verbaux : ceux qui se situent entre les données du calcul et son résultat.

Une preuve du fait que l'automatisation de cette procédure conduit, elle, à la mémorisation des résultats d'additions élémentaires réside dans la précocité de cette mémorisation chez des élèves qui en font un usage massif, parce que leur langue favorise son emploi et parce qu'elle leur est systématiquement enseignée : les élèves asiatiques.

Une deuxième condition de la mémorisation : utiliser la commutativité de l'addition

Une autre condition de la mémorisation consiste évidemment à ne pas calculer $4 + 9$, mais $9 + 4$ parce que le résultat est le même (propriété qu'on appelle la « commutativité » de l'addition) et parce que $9 + 4$ conduit à un calcul beaucoup plus rapide, favorisant mieux l'association verbale. Il est évidemment possible d'obtenir le résultat en cherchant le complément de 4 à la dizaine supérieure ($4 + 9 = 4 + 6 + 3$), mais cela nécessite l'accès à deux décompositions qui ne sont pas immédiatement disponibles : $4 + ? = 10$ et $9 = 6 + ?$. Les décompositions utilisées après l'emploi de la commutativité ($9 + ? = 10$ et $4 = ? + 3$) sont beaucoup plus dispo-

nibles chez un élève parce qu'elles reflètent une propriété fondamentale de la suite numérique : le nombre suivant un nombre donné exprime le résultat de l'ajout d'une unité.

Le choix de *J'apprends les maths* : enseigner et automatiser la stratégie de passage du 10

Remarquons que ce choix pédagogique, favoriser l'emploi de stratégies de passage par la dizaine, plutôt que celui de stratégies de comptage 1 à 1, fut longtemps celui de l'école française avant que, vers 1990, de nombreux pédagogues ne préfèrent, au contraire, centrer leur enseignement sur l'apprentissage du comptage 1 à 1. Dès 1990, une spécificité de *J'apprends les maths* fut de perpétuer cet aspect de la culture pédagogique française : ne jamais favoriser le comptage 1 à 1 chez les élèves en leur proposant systématiquement des stratégies alternatives. Rappelons certaines caractéristiques essentielles de la progression permettant aux élèves de s'approprier la stratégie de passage de la dizaine en commençant par l'apprentissage d'un prérequis à la mise en œuvre de cette stratégie : celui des compléments à 10.

Apprendre les compléments à 10 dans des situations d'anticipation du résultat d'une action

Donnons d'abord un exemple d'une telle situation d'anticipation :



Phase d'anticipation

Il y a 8 jetons dans la boîte.
Imaginez ce que je vois.
Combien y a-t-il de cases vides ?
Écrivez



Phase de validation :
l'enseignant(e) bascule la boîte.

Dans ce cas, il s'agit d'anticiper le nombre de cases vides d'un cadre matériel de 10 cases (avec deux compartiments de 5) lorsque 7 d'entre elles sont remplies. Ou encore : il s'agit d'anticiper le nombre de jetons qu'il faudrait ajouter pour qu'il y en ait 10. Il s'agit donc d'anticiper le résultat d'une action.

Il est important d'analyser ce type de situations parce que, comme cela a déjà été signalé, on demande fréquemment aux élèves qui utilisent *J'apprends les maths* d'anticiper le résultat d'une action (voir, par exemple, la situation d'introduction de la division euclidienne dans le chapitre 2 de cette présentation). Les élèves y prennent conscience de la différence entre l'activité mathématique et la devinette : contrairement à la devinette, l'élève qui raisonne correctement réussit systématiquement. Par ailleurs, la situation est auto-corrective : comme l'enjeu du raisonnement arithmétique est d'anticiper le résultat d'actions avant qu'elles ne soient effectivement réalisées, il suffit de procéder à ces actions (ici, ajouter 3 jetons et observer que la boîte est pleine) pour valider ou non l'anticipation. Dans ce type de situation pédagogique, les élèves prennent ainsi conscience que l'enjeu des tâches arithmétiques se situe dans les transactions avec le monde des objets. Il ne s'agit pas seulement, comme le pensent tant d'enfants en difficulté, de deviner la réponse verbale qui ferait plaisir à l'enseignant(e).

La simulation mentale d'un passage de la dizaine que le maître réalise de façon masquée

Mais les situations d'anticipation utilisant la boîte de Picbille favorisent l'apprentissage du calcul mental pour une autre raison, plus fondamentale encore. Considérons, par exemple, la situation utilisée pour enseigner le « passage de la dizaine » : $8 + 4 = (8 + 2) + 2$. L'enseignant(e) commence par mettre 8 jetons dans la boîte sans que les élèves en voient l'intérieur. Puis il annonce :



Il y a 8 jetons dans la boîte
et j'ai 4 jetons dans la main.
Imaginez le nombre
de cases vides

L'enseignant(e) réalise alors l'ajout, mais toujours de façon à ce que les élèves ne puissent voir l'intérieur de la boîte ni le contenu de sa main gauche :



Il interroge alors les élèves sur le résultat de son action :



J'ai rempli ma boîte.
Imaginez ce que je vois...
 $8 + 4$, c'est 10 et encore...

Les élèves sont ainsi conduits à simuler mentalement l'action que l'enseignant(e) a réalisée de façon masquée. Or, les recherches en neuropsychologie²¹ montrent que l'apprentissage repose grandement sur ce type de processus mentaux. Au-delà des travaux scientifiques, on en comprend bien les raisons en considérant la phase de validation :



Phase de validation : l'enseignant(e) reconstitue la situation initiale tout en basculant la boîte et en ouvrant la main. Il peut ensuite réaliser l'action de manière visible.

Lorsque les élèves sont seulement confrontés à une situation comme celle qui est utilisée ici pour la validation, c'est-à-dire une situation où le complément à 8 est d'emblée visible, où la collection ajoutée est elle aussi visible et donc facilement décomposable, la plupart d'entre eux se trouvent en grande difficulté dès que le matériel n'est plus présent.

Simuler mentalement l'action que l'enseignant(e) a réalisée de manière masquée oblige à reconstituer mentalement les données correspondant aux différentes étapes de la procédure :

- Que faut-il ajouter pour remplir la boîte de 10 ?
- Combien restera-t-il dans la main ?

De plus, cela oblige à gérer mentalement l'enchaînement de ces étapes. Devenir capable de le faire rend autonome dans la mise en œuvre de cette procédure.

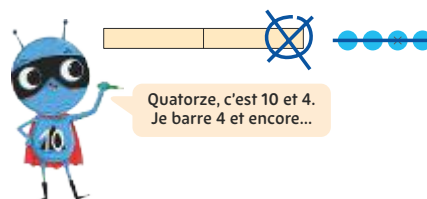
La mémorisation des additions et des soustractions : des processus proches

Comme nous l'avons déjà vu, un adulte n'utilise pas la même stratégie de calcul mental pour déterminer $102 - 6$ et $102 - 94$. Pour calculer $102 - 6$, les adultes procèdent généralement par retraits successifs, c'est-à-dire en reculant sur leur file numérique mentale ; ils font : $(102 - 2) - 4 = 96$. En revanche, pour calculer $102 - 94$, ils calculent par compléments successifs, c'est-à-dire en avançant sur leur file numérique mentale : à partir de 94, il faut 6 pour aller à 100 ; et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout.

Cela reste vrai concernant les soustractions élémentaires ; l'adulte qui a automatisé les calculs correspondants ne s'en rend plus compte, mais, à son insu, son activité mentale est différente. De même que la mémorisation des résultats d'additions élémentaires résulte à la fois de l'usage de la commutativité et de l'automatisation de la stratégie d'appui sur 10, la mémorisation des résultats de soustraction résulte à la fois de l'appropriation des deux grandes stratégies de calcul possibles (retraits successifs et compléments successifs) et de l'automatisation de ces stratégies lorsqu'elles sont mises en œuvre en s'appuyant sur 10. Le mode de représentation des nombres comme Picbille est particulièrement bien adapté pour cet enseignement.

Le calcul de $14 - 6$, par exemple, est enseigné de la manière suivante (cf. séquence 3) :

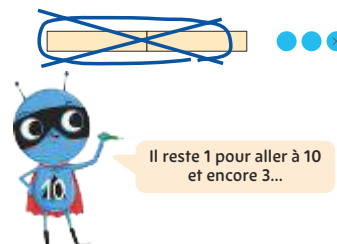
Picbille calcule $14 - 6$



Quatorze, c'est 10 et 4.
Je barre 4 et encore...

Et celui de $13 - 9$ ainsi (cf. séquence 6) :

Picbille calcule $13 - 9$



Il reste 1 pour aller à 10
et encore 3...

Comme dans le cas de l'addition, une activité de simulation mentale d'un retrait que l'enseignant(e) réalise de manière masquée favorise le progrès.

Rappelons que dans *J'apprends les maths* ces deux types de stratégies sont enseignées dès le CP. En revanche, dans de nombreuses méthodes, on retarde cet enseignement pour privilégier la stratégie où le résultat est obtenu

21. Voir, par exemple, Rizzolatti, G. & Sinigaglia, C. (2008), *Les Neurones miroirs*, Paris, Odile Jacob.

en reculant 1 à 1 par comptage à rebours ; les élèves les plus fragiles s'enferment dans cette stratégie et il conviendra donc, au CE2, de consacrer une partie du temps d'aide individualisée à leur appropriation.

La clé de la mémorisation des résultats de multiplications : un apprentissage moderne des tables traditionnelles

À la base de tout choix pédagogique concernant la mémorisation des résultats des multiplications élémentaires, il y a la prise en compte du fait que celle-ci mobilise grandement l'association verbale.

C'est ce qui a conduit certains psychologues à penser qu'un apprentissage basé sur la seule association entre les différents calculs et leurs résultats pourrait constituer la meilleure méthode d'apprentissage. Ils appellent une telle méthode un apprentissage par « drill ». Dans ce cas, l'enseignant(e) écrit un calcul quelconque au tableau (4×8 , par exemple), et les élèves doivent écrire le résultat sur leur ardoise. L'enseignant(e) attend quelques secondes et écrit lui-même la réponse au tableau. À aucun moment il ne favorise la reconstruction d'un résultat qui ne serait pas encore connu. Les psychologues qui défendent une telle approche préconisent souvent de commencer la mémorisation par les faits les plus difficiles (ceux qui concernent les grands nombres, notamment) pour que leur mémorisation s'effectue sur une plus longue durée.

Les méthodes s'opposant à celle-ci sont celles où l'enseignant(e) favorise l'emploi d'une stratégie de reconstruction d'un résultat lorsque celui-ci n'est pas encore connu par cœur. C'est ce qui a été préconisé pour l'addition avec l'emploi d'une stratégie comme le « passage de la dizaine ». On parle souvent dans ce cas d'apprentissage « conceptuel » : l'élève, en effet, est conduit à choisir une stratégie parmi celles qui sont possibles et, donc, l'apprentissage est bien « conceptuel » au sens où nous avons défini ce mot.

Pour un pédagogue, il peut paraître surprenant que des psychologues défendent l'idée de la supériorité d'un apprentissage par « drill » sur un apprentissage conceptuel. Cependant, l'usage de stratégies de reconstruction n'a pas que des avantages : les élèves sont susceptibles de se tromper dans la mise en œuvre de ces stratégies, et s'ils se trompent plusieurs fois de la même manière concernant un résultat, le risque est grand qu'ils mémorisent l'erreur correspondante. Les recherches ont montré qu'avec la multiplication, c'est effectivement ce qu'on observe : les erreurs consistent très souvent à proposer le résultat d'une multiplication proche²². Ce phénomène est très pénalisant parce que cette sorte d'erreur, lorsqu'elle est installée, interfère avec la réponse correcte : l'enfant hésite entre les deux réponses. De plus, un enfant qui subit de telles « interférences » risque de les subir toute sa vie durant. Jamais

il ne sera sûr de lui dans la connaissance du répertoire multiplicatif, ce qui le handicapera grandement dans l'exécution d'un grand nombre de calculs mentaux.

Pour autant, aucun résultat expérimental n'a, à ce jour, prouvé une quelconque supériorité d'un apprentissage par « drill ». On comprend mal, par ailleurs, la façon dont un(e) enseignant(e) pourrait s'y prendre pour que les élèves apprennent seulement par « drill » : est-il réellement possible d'empêcher un élève de chercher à reconstruire un résultat lorsqu'il ne le connaît pas encore par cœur ?

C'est pourquoi, plutôt que d'abandonner l'idée d'un apprentissage où l'on abandonne toute idée de reconstruction d'un résultat, il convient de s'interroger sur la possibilité d'un apprentissage qui risquerait moins de conduire au phénomène d'interférences parce que la reconstruction, quand elle est nécessaire, se fait d'une seule façon, toujours la même. Or, un tel apprentissage existe : il repose sur un enseignement « moderne » des tables de multiplication traditionnelles. Montrons-le en comparant les deux principaux scénarios didactiques utilisés aujourd'hui dans le système scolaire français pour favoriser la mémorisation du répertoire multiplicatif :

– un premier scénario, vraisemblablement le plus fréquent, repose sur l'usage d'une table de Pythagore (damier de 10 cases sur 10 cases avec les résultats à l'intérieur : 24, par exemple, se trouve à l'intersection de la 4^e ligne et de la 6^e colonne ainsi qu'à l'intersection de la 6^e ligne et de la 4^e colonne – ces deux cases sont symétriques par rapport à la diagonale des carrés) ; nous allons montrer que ce scénario ne favorise guère la mémorisation ;

– un second, celui que *J'apprends les maths* a introduit vers 1990, et qui consiste en un usage pédagogique repensé des tables de multiplication traditionnelles.

Un 1^{er} scénario : l'usage d'une table de Pythagore

Dans ce scénario, tous les résultats sont travaillés d'emblée en utilisant une table de Pythagore (damier de 10 cases sur 10). Le pédagogue n'organise donc pas l'apprentissage en deux phases dans lesquelles l'enfant apprend d'abord les faits numériques comportant un petit nombre (tables de 3, 4 ou 5), puis ceux qui comportent un grand nombre (tables de 6, 7, 8 ou 9). En revanche, il s'agit d'un apprentissage conceptuel ; il s'agit même d'une forme « extrême » d'apprentissage conceptuel au sens où toutes les stratégies permettant de retrouver un résultat sont elles aussi enseignées d'emblée. Pour retrouver 4×6 , par exemple, on enseigne à l'élève qu'il peut le retrouver de deux façons différentes en mettant en relation le résultat cherché avec celui qui correspond à « une fois de moins » :

Première stratégie : 3×7 , c'est 3 fois 7. C'est donc 2 fois 7 et encore 1 fois 7 : 14 et 7, 21.

Deuxième stratégie : 3×7 , c'est 7 fois 3. C'est 6 fois 3, 18 et encore 1 fois 3, 21.

A priori, on est conduit à penser qu'il est nécessairement bénéfique de mettre à la disposition des élèves plusieurs

²². Campbell, J. (1994) Architectures for numerical cognition, *Cognition*, vol 53, 1-44.

moyens de reconstruire un même résultat, comme cela se fait dans ce scénario. Considérons cependant les erreurs de raisonnement du type : $3 \times 7 = 3 \times 6 + 6$. L'élève qui commet cette erreur amorce son raisonnement en utilisant la première stratégie et l'achève en utilisant l'autre. Comme le nombre qu'il obtient (24) fait partie des résultats possibles (il correspond à 3 fois 8), l'élève ne dispose d'aucun signal d'alerte concernant son erreur et il risque de la mémoriser. Ainsi, ces erreurs fréquentes et très pénalisantes que sont les « interférences » trouvent-elles souvent leur origine dans un dysfonctionnement du scénario didactique consistant à enseigner une pluralité de stratégies de reconstruction d'un résultat qui n'est pas encore connu par cœur.

Face à une multiplication telle que 4×6 , par exemple, le choix de la stratégie la plus simple est encore plus complexe parce qu'aux deux stratégies précédentes (*Vais-je me ramener au calcul de 3 fois 6 et encore une fois 6 ou à celui de 5 fois 4 et encore une fois 4 ?*) s'en ajoute une troisième : l'élève peut également calculer 4×6 en cherchant le double de 2×6 . Le choix de la stratégie la plus économique ne va pas de soi. En effet, c'est seulement après s'être engagé dans le raisonnement qu'on est susceptible de savoir si une procédure est plus économique qu'une autre. L'élève qui, face à 4×6 , commence par s'interroger (*Vaut-il mieux m'appuyer sur 3 fois 6, sur 5 fois 4 ou doubler le résultat de 2 fois 6 ?*) a « trop raisonné » entre le moment où il lit les données et celui où il accède au résultat pour qu'il se produise de l'association verbale entre les deux. Une autre façon de le dire est la suivante : dans le cadre d'un tel scénario didactique, l'élève doit être trop attentif à la signification de chacun des termes du calcul qu'il effectue pour que cela permette un accès futur au résultat indépendamment d'une nouvelle réflexion. Ce scénario pédagogique ne favorise pas l'association verbale dont on sait qu'elle est à la base d'une bonne mémorisation.

Un 2nd scénario : un enseignement « moderne » des tables traditionnelles

Dans ce scénario, les résultats sont appris progressivement, par table (table de 5, puis de 3 et 4 ; puis, bien plus tard dans l'année, tables de 6, 7, 8 et 9). Les tables enseignées sont les tables de multiplication « traditionnelles » (ce choix est justifié plus loin) :

Table de 5 : « 5 fois 1, 5 », « 5 fois 2, 10 », « 5 fois 3, 15 », « 5 fois 4, 20 »...

Table de 3 : « 3 fois 1, 3 », « 3 fois 2, 6 », « 3 fois 3, 9 », « 3 fois 4, 12 »...

Table de 4 : « 4 fois 1, 4 », « 4 fois 2, 8 », « 4 fois 3, 12 », « 4 fois 4, 16 »...

Rappelons en effet que les tables traditionnelles, celles que l'on trouve fréquemment au dos des cahiers de brouillon, sont telles que, dans la table de n , toutes les lignes commencent par n fois... On remarquera d'ailleurs que, pour différencier les deux sortes de tables possibles, il vaut mieux qualifier différemment celles qui correspondent à l'autre possibilité :

1 fois 5, 2 fois 5, 3 fois 5..., par exemple, pour la table de 5. Il vaut mieux dire de cette table qu'elle est une table des *multiples de 5* plutôt qu'une table de multiplication par 5.

Dans le 2nd scénario, les élèves apprennent d'abord à réciter la table de multiplication par 5 dans l'ordre, en utilisant le fait que dans cette table les résultats vont de 5 en 5 : « 5 fois 1, 5 », « 5 fois 2, 10 », « 5 fois 3, 15 », « 5 fois 4, 20 »...

Il est essentiel de remarquer que pour déterminer « 5 fois 3 », par exemple, l'élève ne calcule pas $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ parce qu'il est bien plus facile d'ajouter 5 au résultat de « 5 fois 2 » (dans la table de 5, les résultats vont de 5 en 5). L'élève ne s'appuie donc pas sur la signification du mot « fois », il s'appuie sur une règle d'organisation des résultats à l'intérieur de la table. Il est important de souligner ce fonctionnement « asémantique » du mot « fois » dans le processus de mémorisation des tables traditionnelles parce que lorsque la restitution d'une expression se fait sans être obligé d'en interpréter les termes, cela favorise l'association à un niveau phonologique plutôt que sémantique ; à terme, le résultat sera donné « sans réfléchir ».

Il est judicieux de commencer par la table de 5 (avant celles de 3 et 4) parce que la suite correspondante des résultats est simple (5, 10, 15, 20, 25...), et cela permet d'autant plus facilement de s'appuyer sur cette suite plutôt que sur la signification du mot « fois », pour énoncer les résultats.

Pour apprendre à réciter les autres tables, les élèves apprennent de même que, dans la table de 3, les résultats vont de 3 en 3 et qu'ils vont de 4 en 4 dans la table de 4. Il ne s'agit pas d'un simple entraînement, dans la mesure où il est assez simple de justifier cette propriété des différentes tables en s'aidant de collections organisées en lignes et colonnes (cf. séquence 30).

Jusqu'ici, ce qui vient d'être décrit correspond à l'apprentissage traditionnel des tables. Cependant, on peut parler d'un enseignement moderne lorsque deux conditions supplémentaires sont remplies :

1^o) Lorsqu'on s'appuie sur une technique pédagogique moderne, le « jeu du furet », pour aider les élèves à mémoriser la suite des expressions. L'enseignant(e) interroge les élèves au hasard. Le 1^{er} dit « 5 fois 1, 5 » ; le suivant : « 5 fois 2, 10 »... Après « 5 fois 10, 50 », on redescend : « 5 fois 9, 45 »... On remarquera que l'élève interrogé commence toujours par dire « 5 fois... », il ne se contente pas de donner le résultat de la multiplication : en obligeant ainsi les élèves à énoncer dans leur entier les différentes relations numériques, on favorise les associations verbales et, donc, la mémorisation.

2^o) Lorsque l'enseignant(e) est attentif à prévenir le principal dysfonctionnement qu'on pourrait observer avec un tel processus d'apprentissage : que certains élèves soient obligés de réciter la table

Table de 3	
3 fois 1,	3
3 fois 2,	6
3 fois 3,	
3 fois 4,	
3 fois 5,	
3 fois 6,	
3 fois 7,	
3 fois 8,	
3 fois 9,	
3 fois 10,	

depuis le début lorsqu'on les interroge sur un résultat de la « fin de table » (3 fois 6 ?, par exemple).

Là encore, une technique pédagogique « moderne » permet d'éviter cet écueil. Pour « 3 fois 6 ? », par exemple, il suffit de faire remarquer aux élèves que le résultat figure au 6^e rang dans la table de 3, juste après « 3 fois 5, 15 ». Dans un premier temps, l'usage d'une table incomplète peut servir de support au raisonnement :

Comme, dans la table de 3, les résultats vont de 3 en 3, le résultat cherché est : 3 fois 5, 15 (5^e rang) et encore 3, 18. S'il s'agit de déterminer « 3 fois 9 ? », par exemple, le résultat figure juste avant « 3 fois 10, 30 » dans la table de 3. Comme dans cette table les résultats vont de 3 en 3, le résultat cherché est 30 moins 3, 27.

Lorsqu'on interroge les élèves par écrit ($4 \times 7 ?$ ou $7 \times 4 ?$, par exemple) et lorsqu'un résultat n'est pas encore connu par cœur, l'enseignant(e) favorise cette même procédure de reconstruction du résultat :

1°) Il faut déterminer dans quelle table le résultat cherché se trouve : s'il s'agit de trouver le résultat de 4×7 ou 7×4 , par exemple, celui-ci se trouve dans la table de 4.

2°) Pour retrouver le résultat dans cette table, on utilise là encore le fait que dans la table de 4, les résultats vont de 4 en 4. Comme le résultat de 4×7 ou de 7×4 se trouve au 7^e rang dans la table de 4, il est situé deux rangs après « 4 fois 5, 20 », c'est donc 24 et encore 4 : 28.

Les 5 raisons qui conduisent à choisir les tables traditionnelles plutôt que celle de Pythagore

Résumons les points forts du second scénario (usage « moderne » des tables traditionnelles, lorsqu'on le compare au premier – usage de la table de Pythagore) :

1°) Un premier argument en faveur du second scénario réside dans le fait que les tables permettent d'organiser ce que les élèves ont à mémoriser, au sein d'une progression où ils peuvent se concentrer dans un premier temps sur les tables de 5, 2, 3 et 4, dans un deuxième temps sur le début des tables de 6, 7, 8 et 9 et, enfin, sur ces mêmes tables complètes. Les élèves n'ont pas tout à mémoriser en même temps. Or, on sait qu'un apprentissage réparti, tel que celui-ci, conduit à de meilleurs résultats qu'un apprentissage « massé ».

2°) Un autre argument en faveur de l'usage de tables renvoie aux caractéristiques du moment du rappel plutôt qu'à celles du moment de la mémorisation. En effet, lorsque les expressions à mémoriser sont organisées en tables, chacune de ces tables étant indexée par son numéro (la table de 3, par exemple), celui-ci sert d'« indice de rappel ». Les psychologues utilisent cette notion pour rendre compte de phénomènes tels que celui-ci : lorsqu'on sait qu'un mot qu'il convient de se rappeler appartient à telle ou telle catégorie (c'est un mot italien ou encore le mot contient telle ou telle sonorité), le rappel s'en trouve fortement facilité. Plus généralement, on appelle *indice de rappel* toute

caractéristique de ce qu'il convient de se rappeler permettant, au moment du rappel, de restreindre le champ des possibles. Or, lorsqu'on sait qu'une expression multiplicative qu'il convient de se rappeler figure dans telle table, le rappel s'en trouve facilité. Le numéro des tables est un puissant indice de rappel.

3°) L'usage des tables traditionnelles conduit à apprendre les expressions à mémoriser au sein d'une même table, dans l'ordre. Or, on sait, depuis les travaux des philosophes grecs, que l'ordre est une mnémotechnique. De plus, l'usage « moderne » de ces tables, qui vient d'être décrit, permet d'éviter tout phénomène de dépendance à cette récitation dans l'ordre.

4°) Alors que dans les deux scénarios, les élèves sont conduits à raisonner pour reconstruire un résultat qu'ils n'ont pas encore mémorisé, le second scénario (tables traditionnelles), contrairement au premier, les conduit à raisonner toujours de la même manière. Le second scénario est moins susceptible de provoquer le phénomène d'interférence qui, souvent, résulte de la confusion entre diverses manières de raisonner. De plus, le côté systématique du mode de raisonnement en réduit à la fois la longueur et le temps qu'il est nécessaire d'y consacrer ; cela favorise l'association verbale entre les termes du raisonnement et le résultat.

5°) Le second scénario, contrairement au premier, conduit les élèves à accéder aux expressions à mémoriser à partir du seul *pattern* phonologique du mot « fois », sans traiter sa signification. En effet, nous avons vu que dans la table de 4, et dans une expression telle que « 4 fois 7, 28 », par exemple, les données 4 et 7 servent respectivement d'index vers la table et d'index vers une ligne de celle-ci : le nombre « 4 » permet de savoir dans quelle table on se situe, alors que le nombre « 7 » donne le rang auquel se trouve le résultat cherché. Le mot « fois », lui, ne fait que séparer et ordonner ces deux informations. L'énoncé « 4 fois 7 » n'a donc pas à être considéré comme une expression qu'il convient d'interpréter pour en déduire un traitement numérique. L'élève n'a pas besoin de réfléchir, cela favorise l'association verbale.

Une remarque s'impose : certains des arguments précédents conduisent à préférer n'importe quel scénario d'apprentissage dans lequel les expressions à mémoriser seraient organisées en tables, et ces arguments valent donc tout autant lorsque ces tables sont les tables de multiples (celles où la table de n se dit 1 fois n , 2 fois n , 3 fois n ...) que lorsqu'il s'agit des tables traditionnelles (n fois 1, n fois 2, n fois 3...). Une question se pose donc, à laquelle nous n'avons pas encore répondu : pourquoi choisir les tables traditionnelles plutôt que les tables des multiples ?

Les 3 raisons qui conduisent à choisir les tables traditionnelles plutôt que celles des multiples

1°) Une première raison réside dans le fait qu'avec les tables traditionnelles, le numéro de la table est le premier mot de l'expression qu'il s'agit de se rappeler : si l'interrogation

porte sur « 3 fois 8... », le résultat se trouve dans la table de 3, dont tous les éléments commencent par « 3 fois... ». Or, il n'y a pas meilleur indice de rappel d'une expression que les mots par lesquels elle commence. On a tous l'expérience d'un tel phénomène : lorsqu'on a oublié une expression, il suffit souvent de se rappeler que « ça commence par... » pour y accéder dans son entier.

2°) Il suffit de se réciter l'une quelconque des tables de multiples (pour 4, par exemple : « 1 fois 4, 4 », « 2 fois 4, 8 », « 3 fois 4, 12 », « 4 fois 4... ») pour prendre conscience qu'avec ces tables on est beaucoup plus tenté qu'avec les tables traditionnelles de traiter la signification du mot « fois » pour accéder au résultat suivant. Avec les tables de multiples, donc, on procède à un traitement sémantique du mot « fois », on réfléchit, ce qui ne favorise pas l'association verbale.

3°) Enfin, un dernier argument, mais qui n'est pas le moins important, est le suivant : la forme traditionnelle des tables est celle qui permet le mieux de résoudre les problèmes de partage équitable par un petit nombre (2, 3, 4 ou 5) en s'appuyant sur la connaissance des tables de multiplication. En effet, le partage de 27 objets entre 3 personnes se simule facilement en imaginant les 3 personnes et en cherchant ce que chacune doit avoir pour que le total soit 27. Cela conduit à se demander : « 3 fois combien font 27 ? » L'ordre des nombres est bien celui de la table de 3 traditionnelle : « 3 fois 9, 27 ». Comme ce scénario de partage est celui qu'il convient de mobiliser pour les divisions par un petit nombre (voir le chapitre 2), les tables traditionnelles sont celles qui permettent le mieux de s'appuyer sur la connaissance des tables de multiplication pour retrouver les résultats des premières divisions apprises.

Dans une recherche déjà ancienne, l'examen de manuels publiés entre 1850 et 1970 avait montré que, pendant plus de 100 ans, les pédagogues ont constamment préféré l'usage des tables traditionnelles à celui des tables de multiples²³. On comprend mieux aujourd'hui ce phénomène qui, de prime abord, peut paraître surprenant.

La mémorisation des résultats d'additions et de multiplications : une comparaison

Nous avons commencé cette section consacrée à la mémorisation de relations numériques en soulignant une différence entre la façon dont les résultats d'additions élémentaires et les résultats de multiplications élémentaires sont stockés en mémoire : les premiers le sont sous la forme de résultats de procédures automatisées et les seconds sous la forme d'associations verbales. Cependant, au terme de l'examen de ces deux processus de mémorisation et des conditions

pédagogiques les favorisant, ils apparaissent avoir plus de points communs que cela semblait le cas de prime abord. En effet, dans les deux cas, l'automatisation de procédures est nécessaire : celle du passage de la dizaine pour l'addition, celle permettant de retrouver les résultats de la deuxième partie des tables (4 fois 6, c'est 4 fois 5, 20 et encore 4, 24, par exemple) pour la multiplication. De même, dans les deux cas, un minimum d'association verbale est nécessaire entre l'énoncé du calcul et son résultat : c'est évident concernant la multiplication, cela reste le cas concernant l'addition et c'est même ce qui explique qu'une procédure telle que le comptage 1 à 1 ne conduise pas, par automatisation, à la mémorisation.

Finalement, une différence reste : il n'existe pas, pour l'addition, de contexte de récitation des tables comme il en existe pour la multiplication. En effet, réciter une table d'addition de 3, par exemple, conduit à dire : « trois plus un, quatre ; trois plus deux, cinq ; trois plus trois, six ; trois plus quatre... ». Or, le résultat resté en suspens, « sept », s'obtient comme le suivant de « six ». Il suffit donc de savoir dire le suivant d'un nombre pour savoir réciter une table d'addition. C'est trop facile ! Cela est d'emblée trop automatique pour permettre l'association verbale nécessaire. C'est, vraisemblablement, la raison pour laquelle l'école française n'a jamais accordé aux tables d'additions l'importance qu'elle accorde aux tables de multiplications. Il est très probable que la différence observée par les psychologues dans la façon dont les additions et les multiplications élémentaires sont mémorisées ne soit, finalement, qu'une conséquence de ces contextes différents dans les conditions d'apprentissage.

23. Brissiaud, R. (1994). Penser l'usage du mot « fois » et l'interaction oral/écrit lors de l'apprentissage initial de la multiplication. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnigot (Eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 195-202). Grenoble : La pensée sauvage.

Conclusion : le calcul mental, moteur du progrès

Évaluer à partir du calcul mental, fonder le progrès sur lui : les apports du paradigme Si- vs CC-problèmes

Ces apports se situent dans un domaine qui inclut la résolution des problèmes arithmétiques, la compréhension des opérations arithmétiques et le calcul mental. Faisons-en un récapitulatif. Ils sont, pour l'essentiel, au nombre de cinq :

- Le paradigme Si-problèmes vs CC-problème permet d'évaluer le progrès des élèves dans la résolution des principaux problèmes arithmétiques en leur proposant *des tâches de calcul mental*. Plus précisément, lorsqu'on propose, pour chacun des principaux sens d'une opération, un Si-problème et un CC-problème correspondants, on a la possibilité d'évaluer à la fois la compréhension de la situation correspondante et celle de l'opération. On a de plus la possibilité de distinguer les élèves qui échouent parce qu'ils n'ont pas encore compris la situation de ceux qui l'ont comprise, mais n'ont pas encore compris l'opération. Enfin, l'évaluation de la compréhension de l'opération s'effectue de manière fine au sens où la tâche proposée permet de repérer un début de conceptualisation.
- Le paradigme Si-problèmes vs CC-problème permet de construire des progressions pédagogiques dans lesquelles l'enseignement respecte un ordre qui semble incontournable : on ne peut guère enseigner à des élèves une opération arithmétique lorsqu'ils ne comprennent pas les situations qui lui donnent sens. Dans les progressions correspondantes, l'enseignant(e) utilise d'abord des Si-problèmes pour favoriser la compréhension des situations (1^{er} moment), puis des CC-problèmes pour favoriser la compréhension des opérations (2^e moment). Dans chacun de ces deux moments, la solution des problèmes peut être obtenue à l'aide de calculs simples, pouvant être conduits mentalement. Les élèves apprennent ensuite les techniques opératoires qui permettent de généraliser l'usage des opérations aux situations décrites avec de grands nombres quelconques (3^e moment).
- Certains CC-problèmes, que nous avons appelés des « insight CC-problèmes », ont des caractéristiques qui conduisent à en privilégier l'usage au tout début du 2^e moment, celui où l'enseignant(e) souhaite définir explicitement l'opération arithmétique en explicitant aux élèves ses propriétés conceptuelles (*a fois b et b fois a conduisent au même nombre*, par exemple). Un « insight CC-problèmes » est un CC-problème et, donc, sa solution peut s'obtenir à l'aide d'un calcul simple. Cependant, en ce début de 2^e moment, un obstacle important s'oppose à la réussite : l'absence de connaissance conceptuelle (les élèves ne savent pas encore que *a fois b et b fois a conduisent au même nombre*, par exemple). Mais les « insight CC-problèmes » ont la particularité qu'en changeant de point de vue sur la situation, la

solution surgit. Ce changement de point de vue peut être considéré comme un précurseur de la connaissance conceptuelle et l'enseignant(e) peut l'utiliser pour enseigner cette dernière. Un exemple en a été donné concernant la multiplication, un autre en sera donné dans le prochain chapitre concernant la division.

- Considérons ces problèmes qui se présentent d'emblée sous forme symbolique : $3 \times 50 = ?$; $50 \times 3 = ?$; $32 - 29 = ?$; $32 - 4 = ?$ et, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, $150 : 3 = ?$; $150 : 50 = ?$ Ces problèmes offrent la liberté d'interpréter comme on le veut chacun des termes du calcul : on peut choisir lequel des 2 nombres est le multiplicateur, par exemple. Cela a pour conséquence que leur résolution est une activité favorisant l'apprentissage du calcul mental d'une opération, donc sa conceptualisation et, finalement, la résolution des problèmes correspondants.
- Parce que leur énoncé se construit en employant deux grands nombres proches ou un grand nombre et un très petit nombre (cas de l'addition et de la soustraction), ou bien un grand nombre qui est un multiple simple d'un petit nombre (cas de la multiplication et de la division), les Si- et CC-problèmes conduisent à s'approprier des relations numériques qui vont au-delà des relations numériques élémentaires habituellement travaillées en classe : les élèves, par exemple, s'approprient les multiples de 10, 15, 25, 50, 250... Il n'y a pas de recherches scientifiques sur le sujet, mais quiconque a exercé le métier de professeur des écoles a l'impression que l'échec en mathématiques s'accompagne d'une profonde méconnaissance de ces relations numériques. Les travailler en classe ne peut être que bénéfique.

Calcul mental, compréhension et mémorisation

Trois thèmes ont été successivement abordés dans ce 1^{er} chapitre : la compréhension des opérations, celle de l'écriture des nombres et la mémorisation des relations numériques élémentaires.

Concernant la compréhension des opérations, nous venons de récapituler toutes les raisons qui expliquent que le calcul mental favorise cette compréhension et de rappeler des aménagements pédagogiques susceptibles d'accentuer encore ce rôle bénéfique.

Concernant la compréhension de l'écriture des nombres, nous avons vu qu'elle se fonde non seulement sur la compréhension de la décomposition canonique liée à ces écritures ($432 = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 2$), mais aussi sur la compréhension des relations du type $432 = 43 \times 10 + 2$. Et nous avons vu que cette compréhension est liée à des compétences en calcul mental : le calcul mental d'une multiplication ou d'une division par 10 notamment.

Concernant la mémorisation des relations numériques élémentaires, nous avons souligné le rôle des stratégies de calcul mental d'appui sur 10 pour mémoriser celles d'addition et de soustraction. Et nous avons finalement montré que

la mémorisation des résultats de multiplication, même si elle s'appuie sur la récitation de tables, nécessite l'usage de stratégies de calcul où l'on s'appuie sur les repères 5 et 10 pour retrouver les résultats de la fin des tables.

Ainsi, qu'il s'agisse de la compréhension des opérations, de celle des écritures ou de la mémorisation des relations numériques élémentaires, nous avons explicité de nombreuses raisons qui expliquent que le calcul mental joue un rôle moteur dans le progrès. Comme ces trois domaines couvrent ensemble l'essentiel des connaissances à acquérir en arithmétique élémentaire, on s'explique mieux un phénomène bien établi par diverses recherches récentes : de bonnes compétences en calcul mental constituent une sorte de passeport vers la réussite en mathématiques.

Par conséquent, il convient évidemment d'accorder beaucoup d'importance au calcul mental à l'école élémentaire. Mais la portée des analyses proposées ici va bien au-delà d'un tel conseil qui est devenu banal aujourd'hui. C'est en effet le conseil que donnent de nombreux inspecteurs, tout en sollicitant les professeurs des écoles de leur circonscription afin qu'ils construisent des « progressions en calcul mental ».

Avouons-le : nous serions bien en peine de répondre à une telle demande. En effet, telle que cette demande est exprimée, une progression en calcul mental semble conçue comme venant se juxtaposer aux progressions concernant les opérations, la résolution de problèmes... alors que nous avons essayé de montrer que le progrès en calcul mental et le progrès dans les autres domaines ne sont le plus souvent que les deux faces d'une même réalité : la compréhension ou encore la conceptualisation arithmétique. C'est constamment que l'on doit viser le progrès en calcul mental, et pas seulement dans une progression d'activités qui viennent se juxtaposer aux autres. C'est le cas lorsqu'on adopte, comme nous l'avons recommandé, une progression en trois temps, successivement centrés sur l'apprentissage de la résolution des Si-problèmes, celui des CC-problèmes et enfin la résolution des problèmes avec des nombres quelconques, à l'aide des techniques opératoires.

Signalons à ce propos que ce n'est pas parce que nous recommandons d'enseigner les techniques opératoires dans un 3^e moment seulement que nous considérons cet enseignement comme peu important. Pour se convaincre du contraire, il suffit de remarquer qu'entre 1996 et 2008, *J'apprends les maths* était la seule méthode à enseigner la division posée dès le CE2. Utiliser une technique opératoire impose de se remémorer les relations numériques élémentaires (les résultats de divisions par 2, 3, ... 9, par exemple) et cela consolide la connaissance de ces relations numériques. Il ne faut pas différer cet enseignement au-delà de ce qui est raisonnable.

Une comparaison avec d'autres choix pédagogiques

Un autre moyen de montrer que toute pédagogie qui inclut des activités de calcul mental ne correspond pas à ce qui est recommandé ici consiste à comparer nos propositions pédagogiques aux deux autres propositions qui, aujourd'hui, ont une certaine influence : celle qui correspond à ce qu'on peut appeler la « pédagogie traditionnelle » et celle correspondant à la pédagogie qui était préconisée dans les programmes officiels de 2002 et dans leurs documents d'accompagnement. Cette comparaison a déjà été esquissée au cours de ce chapitre. Rappelons-en les principaux points déjà abordés, sachant que d'autres développements ne sont guère possibles dans le cadre de ce *Guide pédagogique*.

Lorsqu'on souhaite analyser l'évolution des pratiques pédagogiques concernant les apprentissages numériques à l'école, 3 grandes périodes peuvent être distinguées :

- La période 1880 - 1970 (date de la réforme dite des « mathématiques modernes »), période pendant laquelle les maîtres enseignaient d'emblée les 4 opérations avec de petits nombres, puis les techniques opératoires afin d'étendre aux grands nombres ce qui avait été appris avec les petits.

Une des caractéristiques de cette pédagogie était d'introduire très tôt les signes arithmétiques dans les situations typiques (soustraire = retirer, diviser = partager), au risque d'enfermer les élèves dans ces significations. Une autre caractéristique était d'enseigner très tôt les techniques posées, sans s'être auparavant assuré que les élèves comprennent les situations et se sont approprié les propriétés conceptuelles des opérations.

Signalons quand même que cette pédagogie ne manquait pas de points forts, notamment concernant la mémorisation des relations numériques.

- La période 1970 - 1990, celle qui a suivi la réforme des mathématiques modernes de 1970. L'influence de cette réforme est, en effet, restée assez forte pendant une vingtaine d'années. Elle a été très critiquée, et, pourtant, des recherches récentes²⁴ montrent qu'en 1987, soit plus de 15 ans après la réforme des mathématiques modernes, les écoliers français calculaient encore bien, bien mieux qu'aujourd'hui en tout cas. Une analyse circonstanciée des points forts et faibles de cette réforme reste à faire, mais il semble bien que le tournant majeur expliquant la baisse des performances en calcul se soit produit en 1990 (et non en 1970). C'est l'époque en effet où l'on a assisté à une réhabilitation d'une forme de comptage qui a des effets délétères sur les élèves les plus fragiles : le comptage où l'on insiste sur la correspondance 1 à 1 entre les nombres et les objets comptés²⁵.

24. DEPP (2009). *Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007*. Note d'information 08.38.

25. Brissiaud, R. (2011). *L'évaluation, le comptage mécanique et la dégradation des performances en calcul*. Entretien mis en ligne sur le site du SNUipp : www.snuipp.fr/IMG/pdf/EvaluationComptage-Degradation.pdf

• La période 1990 - 2008, qui se caractérise par l'influence de deux grands courants d'idées. Le premier, largement diffusé par les ouvrages de la collection ERMEL²⁶, a trouvé son manifeste dans les programmes officiels de 2002 et leurs documents d'application. Au-delà de la réhabilitation d'une forme de comptage honnie depuis près de 50 ans, ce courant d'idées se caractérisait par une attention extrême à ce que les programmes appelaient les « procédures personnelles » des élèves et par un manque d'attention manifeste à la conceptualisation des opérations arithmétiques.

Rappelons que nulle part dans les programmes de 2002 il n'était dit que la propriété essentielle de la division est d'être un traitement commun aux problèmes de quotition et de partition. Dans ces programmes toujours, il était explicitement recommandé, au CP et au CE1, d'enseigner le calcul d'une soustraction par la seule stratégie où l'on recule sur la suite des nombres, alors qu'enseigner à la fois le calcul en avançant et en reculant est un des meilleurs moyens pédagogiques de favoriser la conceptualisation de cette opération. Bien d'autres exemples pourraient être avancés de ce manque d'attention à la conceptualisation des opérations.

Mais pendant la même période, de nombreux enseignants ont choisi d'utiliser *J'apprends les maths*, c'est-à-dire de

se référer à un cadre théorique sensiblement différent : celui qui est exposé ici dans sa version la plus récente. Ce cadre théorique, articulé autour de la problématique de la conceptualisation, est évidemment très différent de celui qu'on trouvait dans les ouvrages de l'équipe ERMEL. Il l'est tout autant du cadre théorique traditionnel qui s'articulait autour du paradigme « problèmes avec de petits nombres vs problèmes avec de grands nombres ». Concernant la compréhension des opérations arithmétiques, on ne peut guère douter du fait que l'approche présentée ici est préférable à celle de la pédagogie traditionnelle.

Et concernant la mémorisation des relations numériques élémentaires ? Nous avons dit que c'était un des points forts de la pédagogie traditionnelle. C'est d'ailleurs ce qui explique que de nombreuses personnes, dont certaines sont à l'origine des programmes de 2008, prônent un retour à ce cadre théorique. Cependant, même dans le domaine de la mémorisation des relations numériques, nous avons essayé de montrer ici qu'avec les connaissances scientifiques disponibles, on peut aujourd'hui faire mieux que la pédagogie traditionnelle. Surtout lorsqu'on n'hésite pas à utiliser certains de ses outils, les tables de multiplication, par exemple.

26. ERMEL signifie : Équipe de Recherche en Mathématiques Élémentaires. Les ouvrages évoqués ici ont été publiés à partir de 1990 aux éditions Hatier.