

J'apprends les MATHS

Sous la direction de
RÉMI BRISSIAUD

Maitre de conférences en psychologie expérimentale

ANDRÉ OUZOULIAS

Professeur agrégé

PIERRE CLERC

Instituteur

FRANÇOIS LELIÈVRE

Professeur des écoles

Nouvelle édition réalisée par **LUC TIENNOT**

Maitre de conférences en mathématiques, formateur d'enseignants

RETZ

editions-retz.com

Sommaire

Présentation	3
Chap. 1 <i>Le progrès en arithmétique :</i> continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne	5
Chap. 2 <i>L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes :</i> quatre attitudes pédagogiques	15
Chap. 3 <i>Enseigner la division euclidienne</i>	28
Chap. 4 <i>Les fractions et les décimaux au CM :</i> une nouvelle approche	37
Chap. 5 <i>Proportionnalité et conversions au CM1</i>	51
Chap. 6 <i>Initiation à la pensée algébrique et aux probabilités</i>	60
Guide pédagogique	69
7 conseils pour bien utiliser J'apprends les maths CM1	70
Les Problèmes pour apprendre à chercher (PAC)	71
Période rouge (p. 14 à p. 45 folio élève)	74
Période orange (p. 46 à p. 73 folio élève)	102
Période verte (p. 74 à p. 103 folio élève)	128
Période bleue (p. 104 à p. 131 folio élève)	162
Période violette (p. 132 à p. 157 folio élève)	188
Matériel à photocopier	216
Bibliographie	224

Présentation

Les choix pédagogiques de *J'apprends les maths* depuis plusieurs éditions sont aujourd'hui confortés par la recherche scientifique et mis en œuvre dans les programmes. C'est le cas notamment de la distinction de deux types de stratégies de résolution de problèmes : la « résolution par simulation de la situation » et la « résolution arithmétique ». Les pages « Problèmes pour apprendre à chercher » contribuent largement à faire comprendre cette distinction.

La progression de *J'apprends les maths* concernant les nombres décimaux est un des points forts de la collection. Les fractions sont en effet abordées avant les décimaux et, de plus, le sens « division » des fractions est abordé en premier (13/10 se lit d'abord : « 13 divisé par 10 », avant de se lire « 13 dixièmes »). Les raisons de tels choix sont exposées ci-dessous, après avoir abordé le thème de la division.

Cette présentation comporte trois parties : les chapitres 1 à 4 qui, à quelques détails près, figuraient déjà dans le précédent guide pédagogique, le chapitre 5 qui est original et spécifique au CM2 et un chapitre 6, qui concerne aussi bien le CM1 que le CM2, et qui a été rendu nécessaire par les spécificités des actuels programmes.

Les questions abordées dans cette présentation sont, par exemple : comment un enfant apprend-il que le problème « *Éric a 37 billes. Il gagne des billes et il en a 61. Combien en a-t-il gagnées ?* » peut être résolu par une soustraction, alors qu'Éric a gagné des billes ? Ou encore : comment un enfant apprend-il que le problème « *On dispose de 1 243 stylos et on forme des lots de 3 stylos. Combien peut-on en former ?* » se résout par la même opération arithmétique qu'un autre où l'on partage équitablement 1 243 stylos entre 3 personnes ?

Dans le chapitre 1, on montre que les enfants ne s'approprient pas les opérations arithmétiques seulement en continuité avec leur expérience quotidienne. Si l'école ne favorisait pas certaines réorganisations, il est peu probable que les opérations arithmétiques leur seraient accessibles.

Dans le chapitre 2, on montre qu'il existe différentes façons de gérer les continuités et les réorganisations qui conduisent aux opérations arithmétiques, et que c'est l'objet d'un débat entre les chercheurs en didactique des mathématiques. La position défendue ici est que l'enseignement des 2 « grands gestes mentaux » du calcul d'une soustraction et celui des 2 « grands gestes mentaux » du calcul d'une division sont fondamentaux parce qu'ils anticipent les réorganisations nécessaires.

On montre ensuite comment ce cadre théorique permet d'élaborer une progression, dans le chapitre 3 concernant la division et dans le chapitre 4 concernant les décimaux-fractions.

Dans le chapitre 5, qui est spécifique au CM2, on montre comment les mêmes choix théoriques permettent d'aborder des thèmes comme la proportionnalité, les conversions d'unités de mesures, la division « poussée après la virgule », etc.

Le chapitre 6, enfin, apporte des précisions à l'enseignant(e) sur les notions nouvellement ajoutées aux IO 2025 : initiation à la pensée algébrique, aux probabilités et à la pensée informatique.

Chapitre 1

Le progrès en arithmétique : continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne

PLAN DU CHAPITRE

- Trois niveaux de résolution d'un même problème.
- La transition du 1^{er} au 2^e niveau se fait dans la continuité.
- L'équivalence de deux gestes mentaux comme fondement de chacune des opérations arithmétiques.
- Pourquoi les problèmes de multiplication sont-ils « plus faciles » ?
- La transition du 2^e au 3^e niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne.
- À propos de la notion de « champ conceptuel ».
- Résumé.

La recherche nous renseigne sur le développement des compétences arithmétiques d'enfants qui vivent dans les rues des grandes métropoles sud-américaines et se livrent au commerce de fruits ou de paquets de pop-corn pour subsister. Ces enfants sont donc très peu scolarisés et ils apprennent à partir de la seule résolution des problèmes auxquels ils sont confrontés « dans la rue »¹.

Ces jeunes gens se montrent suffisamment performants pour exercer leur commerce et en tirer un certain bénéfice mais, dans le même temps, leurs compétences arithmétiques présentent des limites qu'il est intéressant d'analyser. Par exemple : si l'un d'eux doit chercher le prix de 10 bananes à 4 cruzeiros la banane, il calculera très vraisemblablement 10 fois 4 par ajout réitéré² : $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ (quatre et quatre, huit. Et encore quatre, douze. Et quatre...), comme s'il payait successivement chacune des 10 bananes. Le calcul de 4 fois 10 serait beaucoup plus facile, mais, pour une personne qui construit ses connaissances à partir de la seule expérience quotidienne du commerce de rue, ce calcul correspond à un autre problème que celui qui est posé (Quel est le prix de 4 objets à 10€ l'un ?). Ces jeunes gens ne savent donc pas que 10 fois 4 est égal à 4 fois 10 ; ils ne disposent pas réellement de la multiplication en tant qu'opération arithmétique.

Leur situation est ainsi très différente de celle des enfants scolarisés. Ils ne commettent pas certaines erreurs grossières que l'on observe à l'école, mais, dans le même temps, ils sont dépourvus de certaines connaissances que l'on aurait tendance à croire élémentaires du fait que la quasi-totalité des élèves de CE2 les maîtrisent.

Ce type de recherches montre que les compétences arithmétiques se construisent en partie dans la continuité avec les expériences quotidiennes (pour peu que le quotidien confronte l'enfant à des problèmes numériques), mais aussi, en dehors de ces expériences quotidiennes, et même parfois, comme nous le verrons, en rupture avec elles.

Quand un enfant est scolarisé, l'expérience quotidienne de l'écolier se situe pour une large part à l'intérieur de l'école elle-même. Il n'en reste pas moins que la distinction précédente est éclairante. En effet, l'écolier développe ses compétences arithmétiques en partie parce qu'il est amené, au sein de l'école, à résoudre des problèmes qui simulent ceux de la vie quotidienne (des problèmes d'achat, de vente, par exemple), et en partie parce qu'il bénéficie des apports d'un milieu culturel spécifique, à savoir le milieu scolaire.

Le projet de ce chapitre est de proposer un cadre théorique qui permette de mieux appréhender, parmi les compétences numériques, celles qui se construisent en continuité avec l'expérience quotidienne (qu'elle soit extérieure à l'école ou

1. Les principales de ces recherches ont été menées par Nunes-Carraher et ses collègues auprès de jeunes Brésiliens. On en trouve une synthèse dans Nunes T., « Ethnomathematics and Everyday Cognition » in Douglas, A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 557-574. N.Y. : MacMillan Publishing Company, 1992.

2. Le mot « réitéré » (on aurait pu dire aussi « itératif ») signifie : « qui se répète à l'identique ».

résulte d'une simulation à l'intérieur de l'école), et celles qui sont spécifiques à l'expérience scolaire.

Un tel cadre théorique intéresse évidemment le pédagogue parce qu'il est de sa responsabilité de permettre les continuités et de gérer les ruptures ou les réorganisations nécessaires au progrès des élèves.

La clef de voute de ce cadre théorique est la distinction de divers niveaux de résolution d'un même problème (on en distinguera trois). Le progrès se fait en passant d'un niveau à un autre, évidemment, mais nous verrons que ces passages se font tantôt dans la continuité avec l'expérience quotidienne, tantôt en rupture avec elle. Nous verrons que pour accéder au niveau le plus expert, l'enfant a besoin que l'école rende explicite l'équivalence de deux gestes mentaux³ et que c'est cette équivalence qui, en fait, « fonde » chacune des opérations arithmétiques.

À la fin de ce chapitre, nous présenterons succinctement une notion théorique que G. Vergnaud a introduite et qui peut sembler incompatible avec la perspective adoptée ici : c'est celle de « champ conceptuel ». Nous verrons qu'en fait le projet de recherche de cet auteur et le nôtre sont très proches, même si les moyens utilisés ne sont pas identiques.

Trois niveaux de résolution d'un même problème

L'exemple d'un problème dit de multiplication

Considérons ce problème de « recherche du résultat d'un ajout réitéré » :

Un pépiniériste a planté 10 rangées de 4 peupliers.

Combien a-t-il planté de peupliers ?

Un exemple de procédure du 1^{er} niveau est le suivant : l'enfant débutant dessine une rangée de 4 bâtons, puis une autre, etc. Il agit donc par le dessin comme le pépiniériste est censé l'avoir fait avec ses peupliers. Quand il a représenté tous les arbres, l'enfant compte le nombre total de bâtons.

Au 1^{er} niveau, donc, l'enfant effectue une sorte de mime de l'énoncé, soit avec du matériel, soit en dessinant, soit encore, quand la taille des nombres le permet, en utilisant ses doigts. Il reconstitue ainsi les données du problème avec du matériel ou par le dessin pour simuler les actions décrites dans l'énoncé (quand celui-ci a un aspect dynamique) ou pour expliciter les relations qui y figurent (quand l'énoncé est plus statique⁴). Décrivons tout de suite le 3^e niveau, qui est aussi le plus expert : c'est celui où l'enfant reconnaît immédiatement, après une pre-

mière lecture de l'énoncé, qu'une opération arithmétique est pertinente. Ici, il reconnaît presque immédiatement qu'il suffit de « faire une multiplication ». Cet enfant a donc construit des catégories d'énoncés : il y a les problèmes de multiplication, de soustraction, de division, de proportionnalité, etc. Chaque catégorie est ainsi indexée par un savoir-faire mathématique : le calcul mental ou en colonnes d'une multiplication, d'une soustraction, etc. Lorsque l'enfant reconnaît le problème comme appartenant à telle ou telle catégorie, il lui suffit de « dérouler » ce savoir-faire mathématique et, sauf erreur de calcul, il obtient ainsi la solution numérique du problème.

On observe évidemment d'autres procédures que les précédentes. Ainsi, pour le problème des peupliers, certains enfants posent une suite d'additions : $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Les procédures de ce type, intermédiaires entre les deux décrites, ont évidemment une grande importance pédagogique ; elles témoignent d'un progrès par rapport au mime (l'enfant travaille sur des écritures numériques), tout en restant proche de ce mime : le signe « + » est utilisé ici dans son sens le plus évident, lorsqu'il exprime un ajout. Ce type de procédure reste donc facilement compréhensible. Ce sont elles dont nous dirons qu'elles relèvent d'un deuxième niveau. En bref, avant d'être un problème de multiplication (3^e niveau), le problème des peupliers est un problème de recherche du résultat d'ajouts identiques répétés. Il se résout soit en simulant ces ajouts (1^{er} niveau), soit par une addition réitérée (2^e niveau).

L'exemple d'un problème dit de soustraction

Considérons ce problème de « recherche de la valeur d'un ajout » :

Éric a 28 billes.

Il va en récréation et il gagne des billes.

Maintenant il a 54 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

Au 1^{er} niveau, l'enfant peut s'y prendre ainsi : il commence par dessiner 28 billes, il change ensuite la couleur de son crayon pour bien distinguer ces 28 billes de celles qu'il va maintenant ajouter et il dessine des billes jusqu'à en avoir 54 en tout. Enfin, il compte combien il vient d'ajouter de billes. Au 2^e niveau, l'enfant teste par exemple des hypothèses : « Éric a 28 billes au départ. $28 + 30$ ça fait 58. C'est trop, ce n'est pas 30 billes. $28 + 25$, ça fait 53, c'est plus de 25, il a gagné 26 billes. » Cette procédure, qui peut aussi prendre la forme d'une « addition à trou », reste très proche d'une simulation de l'action décrite dans l'énoncé. On remarquera notamment que le signe « + » y est employé dans un sens trivial, comme synonyme de « gagner »⁵. Enfin, au 3^e niveau, l'enfant, après une première lecture de l'énoncé, reconnaît presque immédiatement ce problème comme appartenant à la catégorie des problèmes de soustraction et il calcule $54 - 28$.

3. On appellera « geste mental » toute action finalisée et intériorisée : se représenter mentalement un ajout réitéré, par exemple, est un geste mental. Cette notion est utilisée par divers auteurs. La Garanderie est de ceux-là, mais il l'utilise dans un sens plus restreint qu'on ne le fait ici parce qu'il considère essentiellement des gestes mentaux de nature méthodologique : faire attention, chercher à mémoriser, etc.

4. « Éric a 17 billes. Il en gagne 29. Combien en a-t-il maintenant ? » est un énoncé dynamique (il décrit une transformation). « Dans la cour d'une école, il a 17 garçons et 29 filles. Combien y a-t-il d'enfants ? » est un énoncé statique (il décrit une relation).

5. Voir aussi le chapitre 6 : Initiation à la pensée algébrique

En bref, avant d'être un problème de soustraction (3^e niveau), le problème d'Éric et ses billes est donc un problème de recherche de la valeur d'un ajout. Il se résout soit en simulant cet ajout (1^{er} niveau), soit par une addition à trou (2^e niveau).

L'exemple d'un problème dit de division

Enfin, considérons un dernier exemple avec ce problème de groupement réitéré (recherche du nombre de groupes et du nombre d'éléments qui restent isolés)⁶ :

On a 935 paquets de gâteaux et on va former des lots de 4 paquets.

Combien de lots peut-on former ?

Restera-t-il des paquets ?

Il est évidemment fastidieux de dessiner 935 items représentant des paquets de gâteaux, mais on imagine facilement ce que serait, si la taille des nombres l'autorisait, une résolution au 1^{er} niveau : l'enfant dessinerait par exemple autant de rectangles qu'il y a de paquets de gâteaux, avant d'entourer des groupes de 4 et de compter ces groupes.

En revanche, ce type de problème conduit à diverses procédures relevant du 2^e niveau. Ainsi, l'enfant peut s'imaginer en train de former les lots tout en tenant le compte du nombre de paquets utilisés. Il est ainsi conduit à amorcer une suite d'additions : $4 + 4 = 8$, $4 + 4 + 4 = 12$, etc. Comme c'est encore très long, il peut être conduit à former directement 10 lots, ce qui correspond à 40 paquets, encore 10 lots, 80 paquets, encore 10 lots, etc. Il aura évidemment intérêt à former directement 100 lots, ce qui correspond à 400 paquets. Finalement, il trouvera la solution en effectuant des additions successives de multiples de 4 et en contrôlant à chaque étape que la somme de ces multiples reste inférieure à 935. Une autre possibilité consiste à s'imaginer en train de former les lots tout en tenant le compte des paquets restants (et non, comme c'était le cas dans la procédure précédente, de ceux qui ont été utilisés). L'enfant est ainsi conduit à effectuer une suite de soustractions : $935 - 4 = 931$, j'ai formé 1 lot. $931 - 4 = 927$, j'en ai formé 2. Encore une fois, cette procédure étant fastidieuse, l'enfant est conduit à imaginer la formation simultanée de 10 lots et à faire la suite de soustractions : $935 - 40 = 895$, $895 - 40 = 855$... La formation directe de 100 lots permet évidemment d'aller plus vite encore. Finalement, la solution s'obtient en effectuant une suite de soustractions de multiples de 4, cette solution étant d'autant plus rapide que la taille des multiples prélevés est grande. Une autre possibilité, enfin, consiste à tester des hypothèses. Peut-on former 200 lots ? $4 \times 200 = 800$: oui, on a largement assez de gâteaux. Et 500 lots ? $4 \times 500 = 2000$. C'est impossible. Et 300 ? Et 250 ?

Toutes ces procédures restent proches de la simulation de la formation des lots et ressortent du 2^e niveau.

Au 3^e niveau, après une première lecture de l'énoncé, l'enfant reconnaît ce problème comme appartenant à la catégorie des problèmes de division et il cherche le quotient et le reste de la division $935 \div 4$?.

Là encore, résumons : avant d'être un problème de division (3^e niveau), le problème des paquets de gâteaux consiste à rechercher les résultats d'un groupement réitéré (nombre de groupes ? nombre d'éléments isolés restants ?). Ce problème se résout soit en simulant les groupements (1^{er} niveau), soit par une suite d'opérations qui peuvent être des additions, des soustractions ou des encadrements par des multiples (2^e niveau).

La transition du 1^{er} au 2^e niveau se fait dans la continuité

De manière très générale, donc, on peut distinguer trois niveaux dans les procédures qui permettent de résoudre un même problème. La résolution à l'aide d'une opération arithmétique n'est qu'une des procédures possibles, c'est la plus experte.

Nous avons intentionnellement qualifié chacun des problèmes qui nous ont servi d'exemples de problème *dit* de multiplication, *dit* de soustraction, *dit* de division, pour bien souligner qu'ils peuvent tous être résolus au 1^{er} niveau sans aucune connaissance des opérations arithmétiques correspondantes, en faisant seulement appel à la compréhension du langage quotidien et en simulant les actions ou les relations présentes dans l'énoncé, comme le font les enfants brésiliens qui commercent dans la rue.

Il est très important que les pédagogues sachent décrire les problèmes en terme d'actions ou de relations présentes dans l'énoncé : recherche du résultat d'un retrait, recherche de la valeur d'un ajout, recherche du nombre de groupes et du reste d'un groupement réitéré, etc. C'est, en effet, ce type de description qui leur permet de connaître les procédures de 1^{er} niveau, celles que les élèves débutants utilisent.

Il est très important également que les pédagogues ne se leurent pas sur le niveau de connaissance atteint par un élève qui résout un problème au 2^e niveau. Un élève qui résout un problème de recherche de la valeur d'un ajout (« Farid a 43 billes, il gagne des billes et après il en a 61 », par exemple) à l'aide de l'addition à trou : $43 + 18 = 61$, ne dessine plus, il se met à utiliser le symbolisme arithmétique (dans l'égalité précédente, on voit les signes + et =) et les pédagogues pourraient être tentés de considérer cela comme un progrès crucial.

En fait, un élève qui écrit l'égalité $43 + 18 = 61$ pour résoudre le problème de Farid et ses billes fait fonctionner le signe + comme une simple abréviation sténographique du verbe « gagne ». Il s'agit d'un usage banal de ce signe : c'est le langage ordinaire qui continue à fonctionner sous les habits du symbolisme arithmétique.

6. Le mot « réitéré » est utilisé ici pour rappeler que chaque groupe contient le même nombre d'unités et que le groupement se poursuit jusqu'à ce que l'on ne puisse plus former un nouveau groupe. Par ailleurs, on remarquera que la solution d'un tel problème est constituée d'un couple de nombres : le nombre de groupes mais aussi le nombre d'objets qui resteront éventuellement isolés.

C'est ainsi que diverses recherches⁷ montrent que l'ensemble des élèves, dès le CP, savent apparier une telle addition à trou à un problème de recherche de la valeur d'un ajout comme celui de Farid et ses billes. Or, au CM2, tous les élèves ne savent pas encore apparier une soustraction à ce même type de problème (il y a 20 % d'échec environ) et l'on comprend pourquoi : le fait que Farid gagne des billes n'incite guère à utiliser une soustraction ! Le passage du 1^{er} au 2^e niveau de résolution offre donc beaucoup moins de difficulté que le passage du 2^e au 3^e niveau.

Il est vrai que dans les résolutions au 2^e niveau, les élèves utilisent le symbolisme arithmétique qui leur a été enseigné et que le passage du 1^{er} au 2^e niveau correspond donc à un changement dans la forme de l'expression (ce qui justifie la distinction de deux niveaux différents), mais c'est la continuité qui domine quant au mode de résolution : aux deux premiers niveaux, c'est la compréhension du langage quotidien et la simulation des actions ou des relations présentes dans l'énoncé qui conduisent à la solution.

Il en va tout autrement des résolutions au 3^e niveau qui, comme nous allons le voir, sont les seules à témoigner réellement d'un accès aux concepts arithmétiques de multiplication, de soustraction et de division.

L'équivalence de deux gestes mentaux comme fondement de chacune des opérations arithmétiques

Le cas de la multiplication

Considérons ces deux problèmes de « Recherche du résultat d'un ajout réitéré » :

- Combien coutent 2 livres à 17€ l'un ?
- Combien coutent 17 livres à 2€ l'un ?

L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3^e niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant 17×2 .

Mais considérons le cas d'un enfant qui n'a pas encore étudié la multiplication. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau. Il calculera donc 2 fois 17 ($17 + 17$) dans un cas et 17 fois 2 ($2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$) dans l'autre. Rien ne peut lui laisser prévoir qu'il trouvera le même nombre. Si, dans le premier cas, il calcule $17 + 17$ et si, dans l'autre cas, il compte de 2 en 2 en levant successivement 17 doigts (2, 4, 6, 8...), on ne voit pas ce qui lui permettrait d'anticiper qu'il trouvera le même résultat⁸.

L'équivalence de ces deux gestes mentaux (je vais calculer 2 fois 17 dans un cas, 17 fois 2 dans l'autre) n'a donc rien d'évident a priori et pourtant c'est elle qui fonde la multiplication en tant qu'opération arithmétique.

Essayons d'expliquer cet usage du mot « fonde », parce qu'il peut paraître plutôt abstrait. La multiplication est évidemment une création culturelle (certains indices laissent notamment penser que les peuples sans écriture ne possèdent pas la multiplication⁹). Or, c'est l'équivalence des deux gestes mentaux précédents qui, parce qu'elle est source d'économie cognitive, justifie cette création culturelle. Deux raisons peuvent être avancées qui expliquent un phénomène d'économie cognitive.

En premier lieu, cette économie peut résulter de la substitution d'un geste mental à l'autre. Donnons un exemple en envisageant le cas d'une personne qui doit résoudre le problème suivant : *Combien coutent 17 livres à 2€ l'un ?* Il se représentera facilement la situation décrite en la simulant mentalement sous la forme *17 fois 2* ($2 + 2 + 2 + \dots$). Mais c'est bien long de compter autant de 2 ! Aussi, pour obtenir la solution numérique, aura-t-il intérêt à calculer *2 fois 17*. Ce faisant, il résout le problème « *Combien coutent 17 livres à 2€ l'un ?* » comme s'il s'agissait du problème « *Combien coutent 2 livres à 17€ l'un ?* ». Cette personne substitue ainsi un geste mental à l'autre parce que la solution numérique lui apparaît plus directement accessible.

En second lieu, il y a économie cognitive lorsqu'une ou plusieurs autres procédures (algorithme écrit, un certain usage de la calculatrice, par exemple) ont été associées aux deux gestes équivalents et peuvent se substituer à eux : dans ce cas, aucun des deux gestes mentaux n'est utilisé parce que c'est un automate, par exemple, qui prend en charge l'obtention de la solution numérique. On passe ainsi de deux façons de faire à une seule : il y a regroupement, il y a catégorisation, il y a économie.

C'est parce qu'une culture a intérêt à ne pas laisser se perdre de tels phénomènes d'économie cognitive que cette équivalence a été dument étiquetée par une étiquette verbale (cette étiquette est le signe écrit « $\times$ » et le mot « multiplication »), parce qu'ainsi la rencontre de l'un des deux gestes rappelle immédiatement l'autre (via l'étiquette), ce qui favorise notamment la substitution d'un geste mental à l'autre.

Le cas de la soustraction

Considérons les deux problèmes suivants :

- a) Recherche de la valeur d'un ajout
Éric a 3 billes. À la récréation, il gagne des billes. Maintenant il a 21 billes.
Combien a-t-il gagné de billes ?
- b) Recherche du résultat d'un retrait
Éric a 21 billes. À la récréation, il perd 3 billes.
Combien a-t-il de billes maintenant ?

7. On pourra notamment se reporter à Carey, D. A., « Number Sentences : Linking Addition and Subtraction Word Problems and Symbols », *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 266-280 (1991).

8. L'égalité des résultats traduit la propriété de la multiplication que l'on appelle commutativité.

9. Voir, par exemple, Goody, J., *La Raison graphique*, Paris, Les Éditions de Minuit (1979).

L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3^e niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant $21 - 3$.

Mais considérons le cas d'un enfant de CE1, par exemple, qui n'a pas encore étudié la soustraction. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau.

Dans le cas du premier problème, il cherchera ce qu'il faut ajouter à 3 pour avoir 21. S'il utilise une stratégie de comptage sur les doigts pour simuler le gain, l'enfant dira : 3 (quantité initiale de billes), puis il comptera successivement sur ses doigts 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, tout en tenant le compte du nombre de doigts qu'il a ainsi levés, 18, qui constitue la solution numérique¹⁰. Avec cette stratégie, donc, l'enfant avance sur la suite des nombres. Pour résoudre le second problème, en revanche, il est plus probable que pour simuler la perte des 3 billes, l'enfant recule sur la suite des nombres : 21 billes en tout, 20 (1 bille est enlevée), 19 (2 billes sont enlevées), 18 (3 billes sont enlevées). L'enfant avance sur la suite des nombres dans le premier cas, il recule dans le second. On conçoit qu'il ne lui soit guère facile de prévoir que ces deux procédures produisent le même résultat et, plus généralement, de comprendre qu'elles sont équivalentes. Or c'est cette équivalence qui fonde le concept arithmétique de soustraction parce qu'elle est, comme dans le cas de la multiplication, à l'origine d'une économie cognitive considérable.

Le premier problème illustre bien ce phénomène d'économie cognitive car le geste mental qu'il suscite (avancer sur la suite des nombres depuis 3 jusqu'à 21) est plutôt long et pénible, et cela procure une économie cognitive substantielle de le remplacer par le second geste mental (reculer de 3 sur la suite des nombres à partir de 21). C'est parce que ces deux procédures sont équivalentes que l'on peut remplacer l'une par l'autre.

Là encore, c'est parce qu'une culture a intérêt à ne pas laisser se perdre de tels phénomènes d'économie cognitive que cette équivalence a été dument étiquetée par une étiquette verbale : le signe écrit « - » et le mot « soustraction ».

Le cas de la division euclidienne

Considérons les deux problèmes suivants :

- a) Problème de groupement réitéré (recherche du nombre de groupes et du nombre d'éléments isolés)

On a 935 stylos et l'on va former des lots de 4 stylos.

Combien de lots peut-on former ?

Restera-t-il des stylos ?

- b) Recherche des résultats d'un partage équitable

935 images vont être partagées équitablement entre 4 enfants.

Combien d'images chaque enfant aura-t-il ?

Restera-t-il des images ?

10. Comme ce nombre dépasse 10, on observe évidemment de nombreuses erreurs.

L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3^e niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant le quotient et le reste de la division $935 \div 4$.

Mais considérons le cas d'un enfant qui n'a pas encore étudié la division. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau.

Dans le cas du problème des stylos, l'enfant adoptera une procédure proche d'une simulation de l'action de groupement décrite dans l'énoncé. Il s'imaginera donc en train de former des groupes de 4 : un groupe de 4, un autre groupe de 4, etc. En revanche, dans le cas du partage des images, la procédure « de base », celle que les enfants évoquent longtemps pour donner du sens à l'action de partager, consiste à distribuer une image à chaque enfant, puis une autre, etc.

Ainsi, lorsque l'on s'intéresse à ces procédures « de base », on s'aperçoit que l'enfant forme des groupes de 4 dans le premier cas alors qu'il égrène les images une à une dans le second. Il ne lui est guère facile de prévoir que ces deux procédures produisent les mêmes résultats et de comprendre qu'elles sont équivalentes. Or, comme dans les cas de la multiplication et de la soustraction, c'est cette équivalence qui fonde le concept arithmétique de division parce qu'elle est source de phénomènes d'économie cognitive¹¹.

Pourquoi les problèmes de multiplication sont-ils « plus faciles » ?

La présentation qui vient d'être faite des équivalences qui fondent chacune des opérations arithmétiques pourrait laisser penser que le progrès des élèves se déroule de la même manière quel que soit le problème posé, et quelle que soit l'opération arithmétique qui, à terme, permet de résoudre ce problème. Or il n'en est rien. Les enseignant(e)s le savent bien. Ils soutiennent généralement que la soustraction et la division sont des « opérations difficiles », plus difficiles que la multiplication, et que, parmi les problèmes de soustraction et de division, certains sont faciles et d'autres difficiles.

Le cas de la multiplication

Considérons le cas d'un élève qui doit résoudre le problème suivant : *Combien coutent 2 livres à 17€ l'un ?* Dès que la multiplication a été introduite en classe, la reformulation de cet énoncé sous la forme 2 fois 17 ne pose guère de difficulté et elle conduit l'enfant à reconnaître qu'il s'agit là d'un problème de multiplication. Le plus souvent, l'élève écrit 17×2 , avec le

11. L'addition aurait bien entendu pu figurer dans l'analyse précédente. Dans ce cas, les deux gestes mentaux dont l'addition exprime l'équivalence sont l'ajout d'un nombre b à un nombre a et l'ajout du nombre a au nombre b . Cette équivalence correspond à ce que l'on appelle la commutativité de l'addition. Lorsque l'on doit résoudre un problème tel que celui-ci : « Éric a 3 billes. Il gagne 198 billes. Combien en a-t-il maintenant ? », cette équivalence permet de déterminer $198 + 3$ en comptant 3 nombres au-dessus de 198, par exemple : 198, 199 (1 est ajouté), 200 (2), 201 (3), ça fait 201, plutôt que de compter 198 nombres au-dessus de 3 comme le suggère l'énoncé. L'économie cognitive est substantielle !

17 en premier car beaucoup d'enseignant(e)s recommandent d'écrire d'abord le nombre dont l'ajout est répété¹².

Face à cet autre problème : *Combien coutent 17 livres à 2 € l'un ?*, l'élève se comporte de la même manière : la reformulation de l'énoncé sous la forme 17 fois 2 l'amène à mobiliser la multiplication et à écrire 2×17 , avec le 2 en premier parce que c'est ce nombre dont l'ajout est répété. Or, dès que la commutativité de la multiplication a été exercée en classe, l'élève qui vient d'écrire 2×17 pour exprimer 17 fois 2 le calcule spontanément sous la forme 2 fois 17 ($17 + 17$). La plupart du temps, il ne se rend même pas compte qu'en calculant ainsi, il a utilisé la commutativité.

Une équipe de recherche de l'INRP, Ermel¹³, a récemment souligné qu'« il est étonnant de voir avec quelle facilité la commutativité est utilisée et en quelque sorte admise : les élèves sont très rapidement convaincus que "ça marche" ! ». Nos observations vont dans le même sens.

Ainsi, l'équivalence qui fonde la multiplication n'est pas un obstacle pour les écoliers parce qu'elle n'est pas une équivalence entre deux gestes mentaux radicalement différents. Chercher *a fois b*, d'une part, et *b fois a*, de l'autre, ne sont en fait que deux versions d'un même geste qui est la recherche du résultat d'un ajout réitéré. L'étiquetage par le signe « $\times$ » de l'un de ces gestes entraîne le même étiquetage pour l'autre geste, et l'enfant peut dès lors utiliser la commutativité qui a été exercée.

Il n'en va pas de même dans le cas de la soustraction et de la division.

Le cas de la soustraction et celui de la division

Les deux gestes mentaux dont l'équivalence fonde la soustraction sont de nature très différente : recherche du résultat d'un retrait, d'une part, et de la valeur d'un ajout, de l'autre. L'étiquetage par le signe « $-$ » est très facile pour un problème de recherche du résultat d'un retrait, mais très difficile pour la recherche de la valeur d'un ajout.

Considérons à nouveau les deux problèmes suivants :

a) Recherche du résultat d'un retrait

Éric a 21 billes. À la récréation, il perd 3 billes.

Combien a-t-il de billes maintenant ?

b) Recherche de la valeur d'un ajout

Éric a 3 billes. À la récréation, il gagne des billes.

Maintenant il a 21 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

L'énoncé du premier problème parle d'une perte ; pour l'enfant, l'emploi de la soustraction va de soi. En revanche, dans le second énoncé, on nous dit qu'Éric a gagné des billes : de nombreux enfants ne comprennent pas qu'on puisse utiliser la soustraction dans le cas d'un tel problème. Contrairement

à ce qui se passe avec la multiplication, l'étiquetage par le signe « $-$ » du premier type de problème est loin d'entraîner cet étiquetage pour le second type de problème.

De même, les deux gestes mentaux dont l'équivalence fonde la division sont eux aussi des gestes de nature très différente : l'un est la recherche des résultats d'un partage équitable, et l'autre la recherche des résultats d'un groupement réitéré (Combien de groupes peut-on former ? Restera-t-il des éléments isolés ?). Comme dans le cas de la soustraction, l'étiquetage par le signe « $\div$ » (« divisé ») est très facile pour le premier type de problème mais plus difficile pour l'autre. En effet, les problèmes de recherche des résultats d'un partage sont très vite reconnus comme problèmes de division. Rapportons à ce sujet une anecdote. Un enfant de CE2 à qui l'on demandait d'inventer des énoncés de problèmes avec la contrainte supplémentaire qu'il sache résoudre ces problèmes, répondit : « Je vous aurais bien écrit un problème de partage, mais je n'ai pas encore appris la division ». Avant même que l'enseignant(e) ait introduit la division en tant qu'opération arithmétique, de nombreux enfants en ont déjà entendu parler et elle leur est présentée comme une opération qui permet de connaître le(s) résultat(s) d'un partage.

En revanche, comme dans le cas de la soustraction, l'étiquetage par le signe « $\div$ » (« divisé ») de l'autre type de problème (les problèmes de groupement réitéré) apparaît plus difficile. L'étiquetage par le signe « $\div$ » (« divisé ») pour le premier type de problème est donc loin d'entraîner ce même étiquetage pour l'autre type de problème.

L'apprentissage à l'école ou quand l'opération arithmétique fonde l'équivalence des gestes mentaux

L'étiquetage par le symbolisme arithmétique fonctionne donc différemment dans le cas de la multiplication, d'une part, et dans celui de la soustraction ou de la division, d'autre part. Dans le cas de la multiplication, il est vraisemblable que certains enfants scolarisés remplacent parfois la recherche de *a fois b* par celle de *b fois a*, alors même que leur enseignant(e) n'a pas pris la peine, lors de l'introduction du signe « $\times$ », de leur enseigner l'équivalence de ces deux gestes mentaux¹⁴. Comme le dit Ermel, ces enfants le font parce que « ça marche », parce qu'en se comportant ainsi, ils ont « toujours eu bon ». On ne peut pas dire que, chez ces enfants, c'est l'équivalence des deux gestes mentaux qui fonde l'opération arithmétique ; on aurait plutôt envie de dire que c'est l'opération arithmétique (un savoir culturellement transmis) qui fonde l'équivalence des deux gestes mentaux, parce que c'est l'existence du signe « $\times$ » qui les amène à se conduire comme s'ils maîtrisaient l'équivalence de la recherche de *a fois b* et de *b fois a*.

12. Autrefois, il était courant d'appeler ce nombre le multiplicande, l'autre étant dénommé le multiplicateur.

13. Ermel (Équipe de recherche mathématiques à l'école élémentaire de l'Institut national de recherche pédagogique), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année)*, Paris, Hatier, 1993.

14. Il est fréquent que l'on utilise un quadrillage de *a* lignes et *b* colonnes pour enseigner l'équivalence de ces deux gestes mentaux parce qu'ils correspondent alors au dénombrement des cases du même quadrillage, respectivement ligne par ligne (*a fois b*) et colonne par colonne (*b fois a*).

Il s'agit évidemment là d'un cas extrême. D'une manière générale, le pédagogue doit se méfier d'un enseignement qui produit chez ses élèves les comportements adaptés alors qu'il n'a aucune assurance qu'ils maîtrisent les connaissances conceptuelles correspondantes. Mais force est de reconnaître que, concernant la multiplication, le fait de se comporter comme s'ils maîtrisaient l'équivalence de a fois b et de b fois a conduit à terme la plupart des enfants à une réelle maîtrise de cette équivalence. Lorsqu'on les interroge sur les raisons qui expliquent que a fois b est égal à b fois a , la plupart du temps ils ne comprennent même pas que l'on puisse douter d'une telle égalité !

Trois conclusions peuvent être tirées de cette rapide comparaison de la multiplication, d'une part, et de la soustraction et la division, d'autre part :

1°) La multiplication est une opération qui apparaît « facile » aux enseignant(e)s parce qu'ils peuvent s'appuyer sur le symbolisme arithmétique pour amener les élèves à se comporter comme s'ils maîtrisaient l'équivalence de gestes mentaux qui fonde cette opération, ce qui, dans la plupart des cas, favorise à terme une appropriation réelle de cette équivalence. 2°) La soustraction et la division sont des opérations qui apparaissent « difficiles » aux enseignant(e)s parce qu'ils n'ont pas la même possibilité. Concernant ces opérations, l'usage du symbolisme arithmétique ne conduira pas à lui seul aux comportements attendus. Il est donc indispensable que l'enseignant(e) aide ses élèves à s'approprier les équivalences de gestes mentaux qui fondent ces opérations. Le prochain chapitre est entièrement consacré aux différentes façons de le faire.

3°) L'opposition qui vient d'être faite entre la multiplication, d'une part, et la soustraction et la division, de l'autre, doit être nuancée. En effet, la multiplication n'est pas la seule opération arithmétique dont l'appropriation est favorisée par l'usage du symbolisme arithmétique. On essaiera de montrer dans le prochain chapitre que dans le cas de la soustraction et de la division aussi, le pédagogue peut, par un certain usage du symbolisme arithmétique, anticiper l'appropriation par ses élèves des équivalences de gestes mentaux qui sont requises. D'un point de vue épistémologique, ce sont les équivalences de gestes mentaux qui fondent les opérations arithmétiques, mais, d'un point de vue didactique ou psychologique, l'enfant naît dans une culture qui possède ces opérations arithmétiques : il n'a pas à les reconstruire de manière isolée, il doit seulement se les approprier. Aussi est-il tout aussi légitime d'affirmer, concernant l'apprentissage à l'école, que les opérations arithmétiques y fondent les équivalences de gestes mentaux que d'affirmer l'inverse. Une question fondamentale, qui sera débattue dans le prochain chapitre, est évidemment la suivante : comment penser l'articulation entre la transmission culturelle (celle du symbolisme arithmétique notamment) et les reconstructions conceptuelles qui sont nécessairement à la charge de l'enfant ?

La transition du 2^e au 3^e niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne

Contrairement à la transition du 1^{er} au 2^e niveau de résolution des problèmes arithmétiques, celle du 2^e au 3^e niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne. On a vu, par exemple, que l'équivalence de la recherche de a fois b et de la recherche de b fois a fonde l'existence de la multiplication en tant qu'opération arithmétique. Or, la personne qui s'est approprié cette équivalence voit son expérience quotidienne transformée parce qu'elle traite alors de manière identique l'une et l'autre sorte de situation. Elle peut notamment substituer l'un de ces gestes mentaux à l'autre. Là où il y avait auparavant de la diversité, il y a maintenant une unité.

On a vu, de même, que l'équivalence de la recherche du résultat d'un retrait et de la recherche de la valeur d'un ajout fonde l'existence de la soustraction en tant qu'opération arithmétique. Et, enfin, que l'équivalence de la recherche des résultats d'un groupement réitéré (Combien de groupes ? Combien d'éléments isolés ?) et de la recherche des résultats d'un partage équitable fonde l'existence de la division euclidienne. Chacune de ces équivalences transforme l'expérience quotidienne de celui qui se les est appropriées. Des situations qui, auparavant, apparaissaient seulement dans leur diversité, se voient dorénavant réunies parce qu'elles conduisent à un même traitement.

Ces réorganisations de l'expérience quotidienne nécessitent une expérience scolaire. Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons vu que les vendeurs de rues au Brésil ne substituent pas toujours a fois b à b fois a dans des circonstances où il en résulterait une économie cognitive substantielle. Ainsi, la plus accessible des réorganisations, celle qui correspond au concept arithmétique de multiplication, n'a pas nécessairement lieu lorsque le milieu scolaire fait trop défaut. Il est raisonnable de penser que les réorganisations qui correspondent aux concepts arithmétiques de soustraction et de division dépendent encore plus du milieu scolaire que celle qui correspond à la multiplication.

Comment savoir si ces réorganisations ont eu lieu pour un élève donné ?

Rappelons d'abord que l'usage du symbolisme arithmétique au 2^e niveau est susceptible de leurrer les enseignant(e)s : comme la forme a changé, ils peuvent croire que les réorganisations qui conduisent aux concepts arithmétiques ont eu lieu, alors que ce n'est pas le cas.

Mais de plus, ni l'utilisation de la soustraction (du signe « - ») pour déterminer le résultat d'un retrait (Éric a 21 billes. Il perd 3 billes), ni l'utilisation de la division (du signe « ÷ ») pour chercher les résultats d'un partage équitable ne peuvent être considérées comme des preuves de l'accès au 3^e niveau car, dans ces deux cas, l'usage de ces opérations arithmétiques se fait en continuité avec l'expérience quotidienne (soustraire = retrancher et diviser = partager).

En revanche, lorsqu'un enfant utilise la soustraction pour déterminer la valeur d'un ajout (Éric a 17 billes, il gagne des billes, et après il en a 41) ou lorsqu'il utilise la division pour résoudre un problème de groupement réitéré (On a 935 cubes et l'on va former des piles de 4), on est certain que les réorganisations conduisant aux concepts arithmétiques se sont au moins amorcées. C'est pourquoi nous accorderons une grande place à ces deux types de problèmes dans les chapitres suivants. Ils sont de bons révélateurs du niveau conceptuel des élèves.

À propos de la notion de « champ conceptuel »

Rappelons que cette notion a été introduite par Gérard Vergnaud¹⁵, que le projet de recherche de cet auteur est proche du nôtre et qu'il s'agit d'expliquer ici pourquoi nous n'avons pas repris tel quel le cadre théorique qu'il a proposé. En première approximation, Vergnaud désigne par le terme « champ conceptuel » un ensemble de tâches ou, disons, de problèmes. Les deux « champs conceptuels » les plus fréquemment cités sont celui des problèmes additifs et celui des problèmes multiplicatifs. Il convient de remarquer que cet auteur fait un usage particulier du mot « additif » : il appelle « problèmes additifs » ceux qui peuvent être résolus par une addition, bien sûr, mais aussi ceux qui peuvent l'être par une soustraction. De même, il décide d'appeler « problèmes multiplicatifs » ceux qui peuvent être résolus par une multiplication, mais aussi par une division, une règle de trois, etc. Vergnaud¹⁶ classe les problèmes additifs en 6 groupes. Quatre de ces groupes nous intéressent plus particulièrement parce que les problèmes correspondants peuvent être proposés à l'école élémentaire. Ce sont :

- 1^{er} groupe - *Les problèmes parties-tout*

Par exemple, imaginons que a tulipes et b roses forment un bouquet de c fleurs. Cette situation permet d'engendrer deux types de problèmes selon que a et b sont connus (les parties sont connues) et c cherché (c'est le tout qui est inconnu), ou que c est connu (le tout est connu), que l'une des parties l'est également et que l'autre partie est inconnue.

- 2^e groupe - *Les problèmes d'ajout ou de retrait*

Une quantité est transformée par un ajout ou un retrait pour donner une nouvelle quantité. Par exemple : Éric dispose de a billes. Il gagne (ou perd) b billes. Il dispose maintenant de c billes. Les six types de problèmes correspondants sont soit la recherche du résultat d'un ajout ou d'un retrait (a connu, b connu, c inconnu), soit la recherche de la valeur de l'ajout ou du retrait (a et c connus, b inconnu), soit encore la recherche de la quantité initiale (b et c connus, a inconnu).

- 3^e groupe - *Les problèmes de comparaison*

Donnons deux exemples : « Mme Martin a 30 € et Mme Dupont a 50 €. Combien Mme Dupont a-t-elle de plus que Mme Martin ? »

« Mme Martin a 30 €. C'est 20 € de moins que Mme Dupont. Combien Mme Dupont a-t-elle d'argent ? »

Là encore, on peut engendrer six types de problèmes différents, suivant que la comparaison s'exprime avec « de plus que » ou avec « de moins que », et suivant que le terme inconnu est l'une ou l'autre des quantités comparées, ou encore la différence de ces deux quantités.

- 4^e groupe - *Les compositions d'ajouts ou de retraits*

Donnons un exemple : « Jacques a perdu 27 billes lors d'une première partie, il en a gagnées 19 lors d'une seconde partie. Quel est le bilan de ces deux parties ? ». Là encore, un grand nombre de problèmes peuvent être engendrés selon la nature de l'inconnue (1^{re} transformation, 2^e transformation, bilan), et selon que l'on parle d'ajouts ou de retraits.

Ce type de classification présente un intérêt évident pour le pédagogue : il lui permet d'engendrer un grand nombre de problèmes d'addition et de soustraction et de proposer ainsi des tâches variées à ses élèves. Or, une certaine variété dans les tâches proposées est très certainement un facteur qui favorise le progrès des enfants¹⁷.

Mais il nous semble que ce n'est pas la principale raison qui a conduit Vergnaud à introduire la notion de champ conceptuel. Pour comprendre l'œuvre de cet auteur, il faut en effet avoir présent à l'esprit qu'il se situe de manière critique vis-à-vis de la modélisation de l'apprentissage qui a été dominante jusque vers 1990 aux États-Unis, modélisation selon laquelle les savoir-faire résulteraient pour l'essentiel d'un enseignement explicite (cf. le modèle d'Anderson¹⁸, par exemple).

Or, un grand nombre des problèmes additifs que Vergnaud a distingués ne sont pas travaillés en classe, et pourtant, à terme, les élèves savent les résoudre. C'est la preuve que le progrès ne résulte pas seulement d'une tentative d'application des procédures qui leur ont été enseignées, mais qu'ils abordent un problème nouveau par analogie avec des situations antérieures (on peut parler de « filiations »), et même, à certains moments, en inventant de nouvelles compétences (on peut parler alors de « ruptures »).

Pour Vergnaud, le fait de considérer un vaste ensemble de tâches lui permet de mieux mettre en évidence le fait qu'il existe des filiations et des ruptures dans les modes de résolution utilisés par les enfants, et il défend, avec raison selon nous, l'idée que l'étude de ces filiations et ruptures est la tâche majeure à laquelle les psychologues de l'apprentissage devraient s'atteler.

15. On pourra consulter par exemple : Vergnaud, G., « La Théorie des champs conceptuels », *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 133-170, 1990.

16. Vergnaud, G., & Durand, C., « Structure et complexité psychogénétique », *Revue française de pédagogie*, n° 36, pp. 28-43, 1976.

17. Voir par exemple : Stigler, J., Fuson, K., Ham, M. & Kim, M., « An Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in American and Soviet Elementary Mathematics Textbooks », *Cognition and Instruction*, 3, 153-171, 1986.

18. Anderson, J.-R., *The Architecture of Cognition*. Cambridge, Harvard University Press, 1983.

Des projets scientifiques proches, mais des moyens différents

Notre projet est donc très proche de celui de Vergnaud. Cependant, nous n'avons pas envisagé ici le même ensemble de problèmes que lui et nous ne le ferons pas non plus dans les prochains chapitres.

L'analyse qui sera présentée s'appuiera seulement sur l'étude des cinq sortes de problèmes que nous avons déjà envisagés : un problème de multiplication (recherche du résultat d'un ajout réitéré), deux problèmes de soustraction (recherche du résultat d'un retrait et recherche de la valeur d'un ajout) et deux problèmes de division (recherche des résultats d'un partage et problème de groupement réitéré). On ne s'intéressera donc pas à l'ensemble des problèmes d'addition-soustraction, ni à l'ensemble des problèmes de multiplication-division ; mais on s'intéressera en revanche à un ensemble de problèmes qui comprend à la fois des problèmes d'addition-soustraction et des problèmes de multiplication-division.

La position défendue ici est qu'aucun dogmatisme ne doit présider à l'étude des filiations et ruptures dans les modes de résolution utilisés par les enfants et que le chercheur ne doit pas hésiter, pour répondre à certaines questions, à focaliser son attention sur des ensembles de problèmes différents de ceux que Vergnaud a définis comme, respectivement, le champ conceptuel des problèmes additifs et le champ conceptuel des problèmes multiplicatifs.

Un premier exemple d'une telle question est celle à laquelle nous avons répondu dans ce chapitre : pourquoi les problèmes de multiplication sont-ils « plus faciles » ? Lorsque l'on compare, comme nous l'avons fait, la multiplication à la soustraction, on ne reste pas au sein du champ conceptuel des problèmes multiplicatifs.

Or, c'est bien la comparaison avec la soustraction qui permet le mieux de comprendre la spécificité de la multiplication : dans le cas de la multiplication, l'étiquetage avec le signe « $\times$ » d'un geste mental (recherche de a fois b , par exemple), entraîne l'étiquetage avec le même signe du geste mental qui lui est équivalent (recherche de b fois a), alors que dans le cas de la soustraction, non seulement l'étiquetage avec le signe « $-$ » de la recherche de la valeur d'un ajout ne va pas de soi, mais on peut même considérer que cet étiquetage semble a priori incompatible avec l'action décrite dans l'énoncé (on parle d'un ajout et l'on pourrait utiliser le signe « $-$ » ?).

Donnons un autre exemple de question qui nécessite d'étudier un ensemble de problèmes différents de ceux qui appartiennent à un seul champ conceptuel.

Quand l'équipe Ermel¹⁹ se réfère au champ conceptuel des problèmes additifs, elle recommande explicitement d'introduire le signe « $-$ » la même année que le signe « $+$ », c'est-à-dire l'année du CP. Les justifications avancées sont au nombre de trois : d'une part, le fait que les problèmes d'addition et de soustraction doivent être abordés en même

temps, d'autre part, le fait que les enfants rencontrent le signe « $-$ » dans leur milieu familial ou sur la calculatrice, et enfin le fait qu'il serait dommageable que les enfants ne disposent que d'un seul signe opératoire au CP, le signe « $+$ ».

Ces arguments semblaient pouvoir être utilisés sans grands changements pour parler des rapports qu'entretiennent la division et la multiplication. Et pourtant, lorsque la même équipe²⁰ se réfère au champ conceptuel des problèmes multiplicatifs, elle avait décidé de ne pas enseigner le signe de la division au CE2, créant ainsi un décalage de deux ans entre l'introduction du signe de la multiplication (introduit au CE1) et celui de la division (introduit au CM1).

Ce n'est plus le cas avec les actuels programmes où le signe $\times$ est introduit au CE1 et le signe $\div$ au CE2. Sur ce sujet, nous renvoyons aux Guides pédagogiques de *J'apprends les maths* du cycle 2.

On pouvait évidemment regretter que l'hétérogénéité de ces choix n'ait pas été justifiée, du moins à notre connaissance. La question posée est celle du rôle de l'introduction des écritures arithmétiques dans le progrès des enfants. Ou encore, et de manière plus précise : l'introduction des écritures arithmétiques doit-elle être pensée très différemment pour le couple multiplication-division et pour le couple addition-soustraction ?

Cette question sera abordée dans le prochain chapitre. Pour y répondre, il faut envisager à la fois des problèmes d'addition-soustraction et des problèmes de multiplication-division, et donc se donner un objet d'étude plus large que le seul champ conceptuel des problèmes additifs (addition-soustraction) et plus large que celui des problèmes multiplicatifs (multiplication-division). Mais si l'on s'intéresse à tous les problèmes d'addition-soustraction et à tous les problèmes de multiplication-division, on se trouve face à une « explosion combinatoire » : leur nombre est trop grand pour aborder l'apprentissage de leur résolution de manière précise.

D'où le choix fait ici de ne pas s'intéresser à l'ensemble des problèmes additifs, ni à l'ensemble des problèmes multiplicatifs, mais seulement à certains d'entre eux dont on peut penser qu'ils sont « représentatifs » de leurs champs conceptuels respectifs, du moins pour la question qui nous intéresse : ce sont ceux dont nous avons dit qu'ils « fondent » respectivement la soustraction et la division en tant qu'opérations arithmétiques. Et parmi ceux-ci, on s'intéressera plus particulièrement encore aux deux sortes de problèmes qui sont le mieux susceptibles de révéler que les réorganisations nécessaires à l'accès aux concepts arithmétiques de soustraction et de division s'amorcent : pour la soustraction, les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout, et, pour la division, les problèmes de groupements réitérés.

19. Ermel, *Apprentissages numériques, Cycle des apprentissages fondamentaux, CP*, Paris, Hatier, 1991.

20. Ermel, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (deuxième année)*, Paris, Hatier, 1995.

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté un cadre théorique qui permet de penser, à un niveau encore très général, les filiations et les ruptures entre les différentes procédures de résolution de problèmes utilisées par les enfants. L'analyse des ruptures apparaît cruciale, et dans les prochains chapitres nous nous efforcerons de préciser ce point de l'analyse.

Pour l'instant, trois niveaux de procédures ont été distingués. Au 1^{er} niveau, les enfants simulent la situation décrite dans l'énoncé, soit avec du matériel, soit par le dessin. Au 2^e niveau, les enfants utilisent le symbolisme arithmétique, mais ils en font un usage banal : ils utilisent notamment le signe « + » pour exprimer un ajout et le signe « - » pour un retrait. Au 3^e niveau, les enfants, après une première lecture de l'énoncé, reconnaissent les problèmes comme appartenant à la catégorie de ceux qui peuvent être résolus en faisant telle ou telle opération arithmétique.

Le passage du 1^{er} au 2^e niveau correspond à un premier usage du symbolisme arithmétique, mais il se fait plutôt dans la conti-

nuité avec l'expérience quotidienne, alors que le passage du 2^e au 3^e niveau s'accompagne d'une réorganisation de cette même expérience : les enfants doivent apprendre qu'il est équivalent de chercher *a fois b* et *b fois a*, qu'il est équivalent de chercher la valeur d'un ajout et le résultat d'un retrait, qu'il est équivalent de chercher combien de fois *b* est contenu dans *a* et les résultats du partage de *a* en *b* parts équitables. L'appropriation de ces équivalences ne se fait pas dans les mêmes conditions pour la multiplication, d'une part, et la soustraction et la division, de l'autre, parce que le symbolisme arithmétique ne fonctionne pas de manière identique dans l'un et l'autre cas. Les enseignant(e)s doivent être particulièrement attentifs à favoriser l'appropriation des équivalences requises dans le cas de la soustraction et de la division.

Ce sont respectivement les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout (pour la soustraction) et les problèmes de groupement réitéré (pour la division) qui permettent le mieux de savoir si l'appropriation de ces équivalences est amorcée. Ces problèmes sont donc les meilleurs révélateurs du niveau conceptuel des enfants.