

Fabrice Baudart - Jean-Baptiste Mayenson

numération & calculs

CYCLE 3

Comprendre les nombres
pour mieux s'en servir

Fabrice BAUDART est professeur de mathématiques, docteur ès lettres et formateur dans le domaine de la maîtrise de la langue. Après avoir longtemps enseigné au collège Politzer à Bagnolet (93), il enseigne au collège Camus à Thiais (94).

Jean-Baptiste MAYENSON est professeur et formateur de mathématiques. Il enseigne au collège Clemenceau (REP+ à Paris 18^e) et mène une expérimentation de co-enseignement avec une professeure des écoles pour un groupe d'élèves de CM2/6^e. À l'ESPE de Paris, il est principalement en charge de la formation des professeurs des écoles stagiaires.

Ces deux enseignants se sont rencontrés dans un groupe académique (Créteil) « Maitrise de la langue ».

Les auteurs remercient

- *Annie Portelette et Bénédicte Étienne, animatrices du groupe de travail sur la Maitrise de la langue de l'académie de Créteil.*
- *Jessica Brissac, qui fut à l'initiative de ce livre.*
- *Danielle Rousseau, Anne Bilgot, Emmanuelle Servat, Françoise Herault et Cléo Fraisse, pour leurs relectures attentives.*
- *Tous les auteurs et chercheurs dont les travaux ont nourri leur réflexion et particulièrement Claire Margolinas, Éric Mounier, Marc Pécheny, Nicolas Rouche, Frédérick Tempier, Elisabeth Bautier, Sylvie Cèbe, Jacques Crinon, Roland Goigoux, Bernard Lahire, et Marceline Laparra.*

© Éditions Retz 2018

ISBN : 978-2-7256-3660-3



Cet ouvrage suit l'orthographe recommandée par les rectifications de 1990 et les programmes scolaires. Voir le site <http://www.orthographe-recommandee.info> et son miniguide d'information.



Sommaire

| | |
|---|-----|
| Présentation | 4 |
| 1 / Vers l'abstraction | |
| chapitre 1 • Écrire les nombres | 11 |
| chapitre 2 • Le signe égal (=) | 23 |
| 2 / Les entiers | |
| chapitre 3 • Retour sur la numération décimale – Le pays de quatre | 33 |
| 3 / La multiplication avec des entiers | |
| chapitre 4 • <i>fois et multiplié·e·s par</i> , ce n'est pas la même chose | 57 |
| 4 / Les divisions avec des entiers | |
| chapitre 5 • Que signifie <i>divisé·e·s par</i> ? | 71 |
| 5 / Les fractions | |
| chapitre 6 • Exprimer les mesures de longueur en unités et sous-unités sans écriture fractionnaire | 89 |
| chapitre 7 • L'écriture fractionnaire | 143 |
| chapitre 8 • Paver des surfaces pour mesurer leurs aires | 171 |
| chapitre 9 • Multiplier par un nombre non entier, comment est-ce possible? | 209 |
| chapitre 10 • Mais pourquoi associe-t-on <i>deux tiers</i> à <i>deux divisé par trois</i> ? | 227 |
| 6 / Les nombres décimaux | |
| chapitre 11 • Des unités, des dixièmes et des centièmes avec les longueurs | 237 |
| chapitre 12 • Jusqu'aux dix-millièmes avec les aires | 259 |
| chapitre 13 • Comment introduire l'écriture à virgule? | 281 |
| Présentation du CD-Rom | 302 |

Présentation



« L'aspect profond échappe aisément. »
Ludwig Wittgenstein, *Remarques philosophiques*, § 387, 1964.

Ceci n'est pas un manuel

Ce livre est une méthode didactique et pédagogique plus qu'un manuel de mathématiques. Il ne s'adresse d'ailleurs pas directement aux élèves¹ mais aux enseignants de cycle 3. Les activités, toutes testées et retestées en classe avec des élèves de cycle 3, sont pensées pour **amener à une véritable compréhension en profondeur des notions mathématiques** et éviter (le plus possible) l'émergence de représentations qui seront ultérieurement des obstacles à la compréhension².

Les enseignants sont guidés tout au long de ces chapitres qui sont tous présentés selon le même canevas :

- Ils commencent par quelques pages où est donné, pour l'enseignant, l'essentiel des savoirs visés (pages « l'essentiel »).
- Ils se poursuivent avec la justification de nos choix didactiques et pédagogiques. Les enjeux d'apprentissages sont explicités dans des formulations rigoureuses, rendues (on l'espère) facilement accessibles. Leurs liens avec les apprentissages futurs sont indiqués, on explique ainsi pourquoi il est fondamental de les maîtriser (pages « Pourquoi ce chapitre ? »).
- Ensuite, le déroulement de chaque activité est très détaillé, selon une même structure :
 - Les objectifs de chaque activité.
 - Le matériel nécessaire ; sur le CD-Rom, les supports des activités destinées aux élèves sont prêts à imprimer et les corrigés sont fournis.
 - Guidage pédagogique des activités : modalités de déroulement en classe, points de vigilance et exemples de mise en commun avec notamment des difficultés potentiellement rencontrées par les élèves ainsi que la manière d'y faire face (pour cela, des productions d'élèves sont insérées et commentées).
 - En marge, des commentaires viennent attirer l'attention sur certains points importants.

Remarque : cet ouvrage ne propose ni les exercices d'application qui font suite aux leçons ni les évaluations.

Le contenu mathématique

Les chapitres de ce livre sont conçus pour constituer une progression cohérente et rigoureuse tout au long du cycle 3 (y compris la sixième, donc), commençant par un travail approfondi autour de la numération, s'achevant sur la notion de nombre décimal en passant par une réelle compréhension de certaines significations de l'écriture fractionnaire. **L'objectif est la compréhension fine des nombres ainsi que leur utilisation pertinente et raisonnée.**

¹ Les supports d'activités destinés aux élèves (et leurs corrigés) figurent dans le CD-Rom, prêts à être vidéoprojetés et/ou imprimés.

² Pour n'en citer qu'une seule : on ne trouvera pas ici les traditionnelles représentations des fractions à l'aide de gâteaux ou de camemberts...

Cette progression est celle recommandée par les instructions officielles³.

Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires [...]. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes... [...]. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux [...].

Repères de progressivité

Fractions et décimaux : Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude des fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) et des fractions décimales. Du CM1 à la 6^e, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6^e. Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en 6^e.

Cela est aussi précisé dans les documents d'accompagnement⁴ :

Au cycle 3, on fait évoluer le statut du nombre pour exprimer des quantités et des mesures de grandeur qui ne sont plus égales à un nombre entier d'unités. L'étude des fractions, initiée dès le début du cycle, se poursuit en différents temps sur plusieurs mois. Les formulations orales (du type « trois quarts » ou « vingt-sept dixièmes ») sont privilégiées dans un premier temps ; les écritures symboliques ($\frac{3}{4}$ ou $\frac{27}{10}$) apparaissent ensuite très progressivement, avant que l'écriture d'un nombre décimal sous la forme d'une écriture à virgule n'intervienne. L'introduction de l'écriture à virgule, en première année du cycle, ne remplace pas les écritures utilisant des fractions décimales, ces deux types d'écritures coexistent tout au long du cycle, pour renforcer la compréhension du codage que constitue l'écriture à virgule d'un nombre décimal. Ces travaux sont l'occasion de nouvelles manipulations où cette fois, si une plaque représente l'unité, une barre représentera un dixième et un petit carré ou cube un centième, comme dans le tableau de l'introduction pour trois-cent-dix-huit centièmes.

La construction des différents types de nombres (ici : entiers, décimaux, rationnels) s'effectue progressivement du cycle 1 au cycle 4. La compréhension des concepts qui les sous-tendent est complexe, et nécessite du temps.

Ce livre aborde également des points souvent négligés et pourtant indispensables à la bonne compréhension de la signification des **fractions** et des **écritures à virgules** : qu'est-ce que l'écriture d'un nombre ? Que signifie le signe égal ? Quelle différence entre « fois » et « multiplié par » ?, etc.

Une attention toute particulière est accordée à la notion fondamentale et souvent mal comprise par les élèves d'**unité de mesure**. Pour faciliter ces acquisitions, les unités de mesure des longueurs et des aires utilisées dans nos chapitres ne sont pas les unités usuelles.

³ Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4) NOR : MENE1526483A Arrêté du 9-11-2015 - J.O. du 24-11-2015 MENESR - DGESCO MAF 1

⁴ http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf

Nos choix pédagogiques et didactiques

Une part importante donnée aux manipulations et à leur verbalisation

Les manipulations sont des préalables. La manipulation d'objets physiques concrets est, on le sait, un ancrage fécond pour les apprentissages. Dans les activités, on découpe, on colle, on plie, on mesure vraiment... Mais, bien entendu, cela est loin d'être suffisant et doit s'accompagner d'un travail de verbalisation ou de production de texte.

Cela est d'ailleurs rappelé dans le rapport Villani-Torrosian⁵.

Mesure 5 : Les étapes d'apprentissage

Dès le plus jeune âge, mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur la manipulation et l'expérimentation ; la verbalisation ; l'abstraction.

La trace écrite ne peut arriver qu'après des étapes importantes comme celles où les élèves manipulent, s'approprient les notions avec leur cheminement, leurs mots. Ce passage de la manipulation, de la découverte, vers l'abstraction doit vraiment prendre appui sur une phase intermédiaire, souvent oubliée ou trop implicite : la phase de verbalisation, de « mise en mots » par les élèves. Et ceci de la maternelle au lycée ; ces trois phases d'apprentissage peuvent se résumer dans le triptyque : manipuler, verbaliser, abstraire.

Veiller à ce que les élèves interprètent correctement la situation scolaire

La posture attendue ici de la part des élèves est donc bien différente de ce que nombre d'entre eux imaginent. Il ne s'agit pas d'effectuer des tâches successives afin d'obtenir des résultats, ni de répondre simplement aux questions posées (pour montrer que l'on sait faire mais sans se poser de questions...) : les activités ne sont pas un but mais un moyen pour construire et comprendre des savoirs nouveaux.

Pour cela, les chapitres d'apprentissage fonctionnent toujours de la même façon :

- une succession de tâches désignées sous le nom d'activités sont destinées à faire découvrir des choses nouvelles ;
- ensuite, à partir de ces activités, la classe et le professeur élaborent le texte de la leçon contenant ce que l'on a appris.

Rendre les enjeux et les cadres visibles, lisibles pour les élèves

On rappellera régulièrement aux élèves les enjeux des séances. Il est en effet indispensable, pour l'efficacité des chapitres proposés, que l'élève s'y situe précisément : c'est la globalité qui donne sens à ce qui est travaillé. Il sera donc indispensable d'être explicite sur le lien à faire entre les différentes activités.

Pour accompagner au mieux les élèves, on a fait le choix ici de proposer des bilans à la fin des activités, mais les savoirs nouveaux ne doivent en aucun cas être nommés en début de séance. C'est la raison pour laquelle, les activités pour les élèves n'ont aucun titre (cela pourrait faire surgir des représentations qui bloqueraient le travail des élèves ou iraient à l'encontre des objectifs de l'enseignant ou donneraient des éléments de réponse non souhaités à ce moment du travail).⁶

⁵ Rapport Villani-Torossian : « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques », 21 février 2018.

⁶ Plus généralement, il faut tendre vers une plus grande efficacité et s'interroger sur ce que chaque élève a appris à l'issue d'une séance. (rapport Villani-Torrosian)

Un fil rouge de la méthode : le langage pour apprendre

Les écrits de travail

De façon générale, plus les élèves écrivent, plus ils progressent. Ils doivent donc être fréquemment et régulièrement amenés à rédiger des textes courts [...].⁷

Associer les élèves à la formalisation des savoirs

Les élèves sont le plus souvent possible invités à formuler les savoirs visés par le chapitre. L'expérience montre que les élèves prennent le pli (pas tous au même rythme...) et que les textes qu'ils produisent s'enrichissent au fil du temps⁸. Associer les élèves à l'élaboration du texte du savoir⁹ en permet une meilleure appropriation et contribue à changer les représentations, à constituer les leçons non comme des textes à apprendre et à réciter, souvent ressentis comme éloignés (voire sans rapport avec) les activités censées leur avoir donné naissance, mais comme des ressources à utiliser ultérieurement. Une telle démarche permet d'éviter les sauts cognitifs faits sans qu'on s'en rende compte, sauts qui peuvent faire perdre à l'élève le lien avec les activités et vider le texte de la leçon de sa signification.

On obtiendra ainsi des « écrits de travail », des premiers jets, des textes provisoires¹⁰ qui ne seront pas évalués mais pourront être utilisés par l'enseignant. Ce qui compte alors, c'est le travail de la pensée. L'expression maladroite d'une bonne idée vaut mieux qu'une phrase bien formée sans signification – on laissera donc de côté les considérations d'orthographe, de grammaire. Dans les écrits de travail, on ne doit pas se distraire de l'enjeu : on est en phase de recherche. Cette démarche est indissociable de la place importante qui est réservée à la parole et aux productions écrites des élèves, celles-ci étant envisagées comme moyen d'accès à leurs représentations et donc comme chemin possible (et riche) vers la compréhension des difficultés qu'ils rencontrent.

Prendre des notes, résumer, reformuler les textes lus, y ajouter des croquis, des schémas, etc., sont des activités qui développent les capacités des élèves à construire leur pensée. Le brouillon, en tant qu'écrit provisoire, a toute sa place dans la classe, pour préparer les écrits et pour les retravailler.

[...] À ce premier stade de la production d'un écrit, l'enseignant se positionne, avant tout, comme lecteur du travail de préparation de l'élève et l'entraîne à l'enrichir en le questionnant sur le contenu de sa production (et non sur la forme). Une évaluation de l'orthographe serait prématurée à ce stade.¹¹

Le statut de l'erreur

Les erreurs ne sont pas considérées comme devant être l'objet d'une réprobation quelconque. Bien au contraire, elles servent de support à la réflexion collective. Elles sont souvent un point d'appui à une mise en commun pour confronter les procédures et les soumettre à la discussion.

⁷ Recommandations CNESCO, conférence consensus « Écrire et rédiger ».

⁸ Par ailleurs, procéder ainsi met à l'abri de sauts cognitifs, d'introduction subreptice de concepts, d'expressions nouvelles... que le professeur peut faire sans y penser tant le domaine abordé lui est familier.

⁹ Il s'agit selon les mots d'Elisabeth Bautier de « construire une des fonctions du langage nécessaire à la réussite scolaire : son rôle dans l'appropriation des savoirs », in *Pratiques langagières pratiques sociales*, éd. L'Harmattan.

¹⁰ Terme que l'on préférera à celui de « brouillons ». Sur ces questions, on pourra consulter, sur le site du CNESCO, conférence de consensus « Écrire et rédiger ».

¹¹ Recommandations CNESCO, conférence consensus « Écrire et rédiger ».

Une grande attention à la précision du discours

Ce livre porte une grande attention aux aspects langagiers, à ce que l'on fait avec le langage, à l'oral comme à l'écrit. Cela constitue une part de son originalité. Au-delà du lexique, de la grammaire, du vocabulaire, il y a aussi les usages, les pratiques langagières. Or celles de l'école (mettre l'expérience, le langage à distance, les constituer en objets de savoir...) sont très différentes des pratiques familières à nombre d'élèves. Il ne s'agit donc pas ici de plaquer sporadiquement et artificiellement des activités qui relèveraient de la « maîtrise de la langue » sur quelques séquences de mathématiques mais de se mettre (autant que possible) au clair avec ce que l'on (je / nous / le professeur / les élèves) fait, ou ce que l'on est censé faire avec et dans la langue quand on fait des mathématiques.

- Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.
- Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Distinguer (sans les stigmatiser) les usages du quotidien des usages scolaires du langage

Une distinction explicite est faite entre les usages de la vie quotidienne et les usages scientifiques (cf. par exemple le chapitre 2 sur le signe égal). Cependant, il convient de ne jamais stigmatiser les usages du quotidien, ni de présenter les usages scolaires comme leur étant supérieurs. Il s'agit d'usages différents, adaptés à des contextes et des enjeux différents. La précision terminologique est le signe de l'entrée dans un domaine de connaissances spécifique forgé par les générations qui nous ont précédées, avec ses modes de fonctionnement propres inséparablement cognitifs et langagiers.

On remarquera dans les réponses attendues que l'on est loin d'exiger des textes. Par exemple, la réponse attendue en mathématiques à la question « Combien y a-t-il de jours dans la semaine ? » est « 7 » (ou toute autre écriture équivalente). Tout en allégeant la tâche de l'élève (ce qui le pousse à se concentrer sur les enjeux mathématiques), cela participe pleinement à la construction de la notion de nombre.

Utiliser des expressions porteuses de sens

Nous avons proscrit les façons de dire qui sont potentiellement porteuses d'incompréhensions, d'erreurs ou de malentendus. Ainsi, s'agissant des écritures des nombres, est-il imposé de prononcer la virgule « unité » et non « virgule » (« treize *virgule* treize » ne renvoie à aucune signification, cf. chapitre 14). De même, la barre de fraction ne doit pas se prononcer « sur ». Ainsi dira-t-on « deux tiers » pour oraliser la fraction $\frac{2}{3}$.

Cela est d'ailleurs précisé dans les documents d'accompagnement :

Le passage d'une écriture sous forme de fraction décimale à une écriture à virgule nécessite du temps pour que la signification en soit maîtrisée. L'usage de l'oral est primordial et doit être sans cesse repris à l'école comme au collège : 2,4 se lira « deux et quatre dixièmes » plutôt que systématiquement « 2 virgule 4 » ; cette dernière formulation contribue en effet à ce que l'élève conçoive le nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers, et son emploi trop souvent exclusif génère de nombreuses erreurs dans les diverses utilisations (comparaison, opérations) des écritures à virgule. Il est de ce fait absolument nécessaire, sur toute la durée du cycle 3, de varier les formulations et de faire vivre différentes manières de désigner les nombres décimaux, cette flexibilité à passer d'une formulation à l'autre, ou d'une représentation à l'autre, est essentielle pour accéder à la compréhension des nombres décimaux.

L'écriture symbolique, par exemple $\frac{4}{3}$, nécessite un effort d'interprétation pour être pensée « 4 fois un tiers » et lue « quatre tiers », le nombre du dessus se lit directement 4 alors que le nombre du dessous ne se lit pas 3 mais s'interprète « tiers ». La lecture « quatre sur trois » n'a à ce stade pas de sens et est potentiellement source d'erreurs ; elle prendra sens en dernière année

de cycle et deviendra plus tard la seule formulation possible lorsqu'il s'agira de quotients d'expressions littérales (exemple $\frac{3x^2}{4x+1}$). La verbalisation « quatre tiers » joue donc un rôle essentiel dans la construction du concept de fraction, elle doit être préalable à l'introduction de la notation symbolique et vivre tout au long du cycle 3.

Bien entendu, les raisons de ces choix doivent être explicitées et communiquées aux élèves.

Les écrits donnés par l'enseignant

Le texte du savoir : une ressource

Une leçon doit pour l'essentiel contenir un certain nombre d'éléments à mémoriser, les plus séparés possibles dans leur formulation des situations qui leur ont donné naissance afin de permettre leur utilisation ultérieure dans des contextes les plus variés. Il s'agit d'un outil dont on se servira pour la résolution future de « problèmes ». Ajoutons que considérer un texte écrit comme un outil, comme une ressource, n'est pas chose évidente pour beaucoup d'élèves, en particulier pour ceux qui n'ont pas eu l'occasion de le rencontrer dans leur milieu familial. Il est donc indispensable de renvoyer explicitement, chaque fois que possible, au texte du savoir, de demander aux élèves de retrouver dans les textes de savoir ce qui légitime ce qu'ils écrivent.¹²

Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.

Les leçons puzzle

C'est une des originalités de ce livre : il propose une progression quant à l'appropriation des textes de leçon et de leur structuration. Après les activités et (éventuellement) la production d'écrits préparatoires, le texte de la leçon est donné sous forme de puzzle à reconstituer, puzzle conçu pour que les élèves s'approprient la structure de la leçon.

Les consignes : travailler les stratégies de compréhension

Il n'y a pas de difficulté de lecture des consignes, il y a des difficultés de lecture tout court. Les difficultés sont les mêmes que pour les autres textes, aggravées par la concision des consignes (plus un texte est dense, plus il est difficile à comprendre).

Il n'y a pas de consigne transparente. Nous n'avons pas cherché à simplifier les consignes : c'est contreproductif sur le long terme, puisque cela n'aide pas les élèves à s'approprier ce genre de texte. Il convient plutôt, lorsque des difficultés se présentent, d'explicitier les stratégies de compréhension.¹³

Nombre d'élèves conçoivent leur tâche en mathématiques comme la reproduction de procédures déjà vues et expliquées. Autrement dit, face à un exercice, leur stratégie consiste à chercher dans leur mémoire où se trouve l'exercice similaire et à faire pareil. Ce qui explique grandement une attitude fréquente face aux énoncés et aux consignes : ceux-ci ne sont pas appréhendés comme devant être compris mais comme donnant suffisamment d'indices de surface (structures des phrases et mots employés) pour retrouver l'exercice à reproduire.

¹² Amener progressivement les élèves dans cette dimension des mathématiques (l'utilisation de textes, d'écrits pour justifier de ce que l'on fait) relevant de la littératie étendue.

¹³ Par exemple, certaines consignes sont ainsi écrites de manière à focaliser l'attention sur les « petits » mots ; il n'y a pas de mots sans importance : tous sont porteurs de sens (« diviser en », ce n'est pas la même chose que « diviser par »).

Rôle de l'oral, des échanges verbaux

Les moments d'échanges oraux tiennent une grande place, aussi bien dans les « mises en commun » où sont discutées les propositions de solutions des activités, que dans la production du texte du savoir¹⁴. Lors de ces échanges, les erreurs ne sont pas considérées comme devant être l'objet d'une réprobation quelconque. Bien au contraire, elles servent de support à la réflexion collective. Mais il faut alors veiller à ce que les élèves considèrent ces moments comme du travail authentique, n'interprètent pas cet oral comme un oral de conversation ou un oral du quotidien mais appréhendent correctement le cadre et les enjeux.

Le passage aux moments d'oral pour apprendre ne doit pas se faire, au moins au début, sans panneau indicateur, sous peine de graves malentendus. L'oral du quotidien trame l'ordinaire de la classe et il arrive souvent que l'on passe sans crier gare à un oral de réflexion. Mais c'est une gymnastique à laquelle les élèves ne sont pas tous rompus. C'est le même canal, le même média, mais ce qu'il y a à faire est fondamentalement différent.

On veillera particulièrement à ce que les élèves les moins performants scolairement s'engagent aussi dans ces dialogues. On sait, en particulier, que les élèves qui ont des difficultés pour comprendre les écrits ont tout autant de mal à adopter les postures nécessaires quand il s'agit de comprendre l'oral du professeur¹⁵.

On veillera aussi à laisser une vraie place et à réserver une vraie écoute aux questionnements, aux interrogations, aux doutes des élèves et on les encouragera à les exprimer (même sous une forme maladroite).

¹⁴ On veillera aussi à détromper les nombreux élèves qui estiment, si l'on n'y veille pas, que « puisqu'on n'a rien écrit, on n'a en fait rien produit et donc on n'a pas travaillé ».

¹⁵ Un oral qui est fortement structuré sur les modèles de l'écrit. Un oral qui est en fait un « écrit masqué ».

Chapitre 6

Exprimer les mesures de longueur en unités et sous-unités sans écriture fractionnaire

Objectifs du chapitre 6

L'écriture fractionnaire est abordée à travers des activités de mesurages et de tracés. Les fractions vont servir à exprimer des mesures (c'est pour ça qu'elles ont été inventées...). On commence dans ce chapitre par des activités de mesure de longueurs qui utilisent une unité, nommée l'*empan*.

C'est une des originalités de cette méthode (et pourtant recommandé par les instructions officielles) : on y va pas à pas et dans un premier temps sans la notation fractionnaire : les sous-unités seront écrites en toutes lettres (par exemple « 3 huitièmes d'empan »).

Dans les programmes officiels (cycle 3) :

Utiliser des fractions pour rendre compte de partage de grandeurs ou de mesure de grandeurs dans des cas simples ;

Dans les programmes officiels (cycle 3) :

Verbalisation « quatre tiers » joue donc un rôle essentiel dans la construction du concept de fraction, elle doit être préalable à l'introduction de la notation symbolique et vire tout au long du cycle 3.

Plan du chapitre 6

I. Simplification d'écriture

Séance 1

Activité 1 • Introduction de l'unité de mesure : l'empan

Activité 2 • Du segment à la ligne brisée

Séance 2

Activité 3 • Le demi-empan

Séance 3

Activité 4 • Le quart d'empan

Séance 4

Activité 5 • Sous-unités et divisions

Séance 5

Activité 6 • Fabrication d'une réglette

Activité 7 • Utiliser la réglette pour mesurer les longueurs des lignes

Séances 6-7-8

Activité 8 • Simplifier des mesures de longueur

Leçon • Exprimer des mesures de longueur : unité et sous-unité (1)

II. Conversions

Séances 1 et 2

Activité 1 • Distribution, observation et reproduction des réglettes

Activité 2 • Mesurer des longueurs avec les réglettes

Séances 3 et 4

Activité 3 • Tracer des lignes en utilisant les réglettes

Activité 4 • Ordonner des mesures de longueur

Séance 5

Activité 5 • La dernière réglette

Séance 6

Leçon • Exprimer des mesures de longueur : unité et sous-unité (2)

Matériel

Voir le détail donné dans chaque activité.

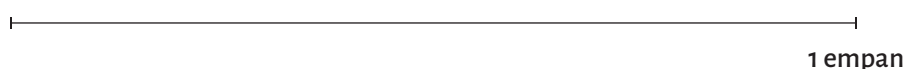
L'essentiel à savoir

Unités et sous-unités

Choix de l'unité

Pour pouvoir exprimer une mesure de longueur, la première chose à faire est de choisir une unité de mesure de longueur.

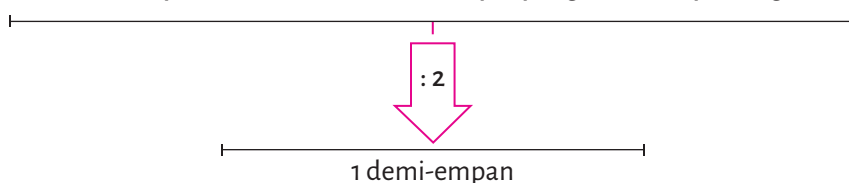
Par exemple celle-ci, que nous utilisons dans les activités et que nous appellerons l'*empan*.



Obtention des sous-unités

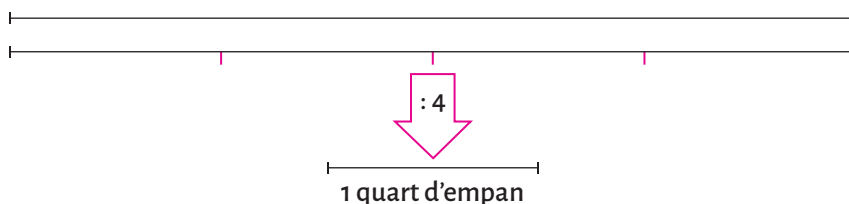
Une sous-unité est obtenue tout d'abord en partageant l'unité en parts égales et en ne gardant qu'une seule part.

Les sous-unités les plus aisées à obtenir le sont par pliage en deux parts égales.



Par définition, 1 demi-empan c'est 1 empan divisé par 2. On réinvestit ici la leçon sur la division partage (voir chapitre 5).

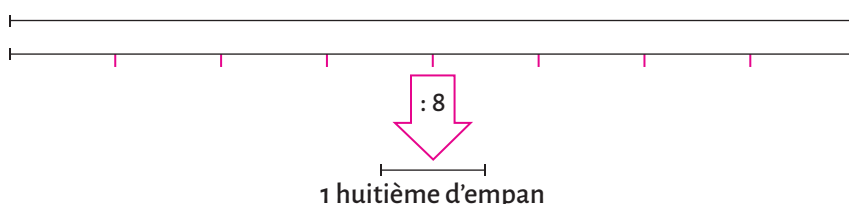
Si l'on continue, on obtient ensuite quatre segments de même longueur.



Par définition, 1 quart d'empan c'est 1 empan divisé par 4.

1 quart d'empan, c'est 4 fois moins long qu'un empan.

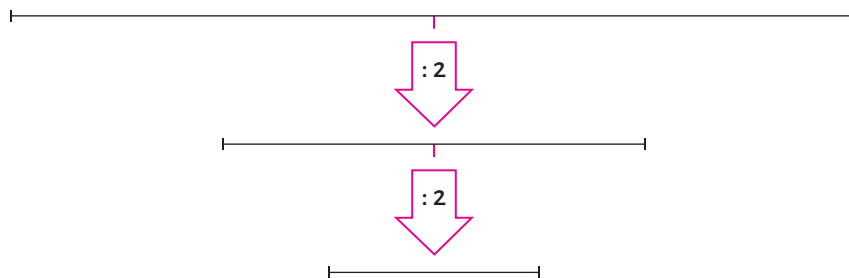
Il s'agit de convaincre les élèves qu'en pliant 2 fois en deux parts égales, on a obtenu quatre segments de même longueur, puis qu'une opération similaire permet d'obtenir huit parts égales.



On obtient des segments huit fois moins longs que le segment étalon : leur mesure est un huitième d'empan (*huitième* est le mot qui correspond à une division par 8).

D'une sous-unité à la suivante

Chaque sous-unité est deux fois moins longue que celle qui la précède. On passe de l'une à l'autre par une division par 2.



Exprimer des mesures de longueur à l'aide d'un nombre et du nom d'une sous-unité

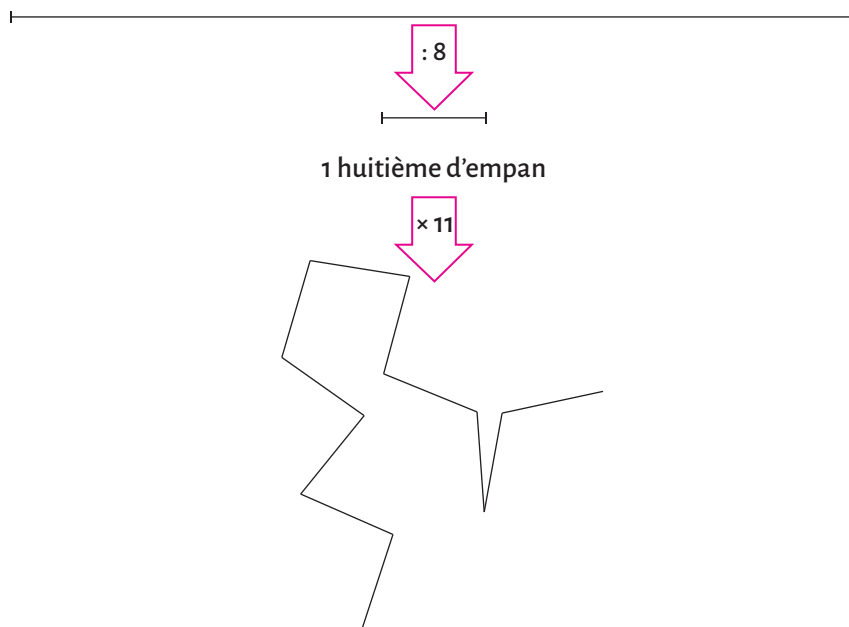
Une sous-unité ayant été choisie, le nombre indique combien de sous-unités sont nécessaires pour exprimer la mesure.

3 huitièmes d'empan signifie *3 fois un huitième d'empan*, ce qui s'écrit encore :
1 huitième d'empan $\times 3$.

Pour des raisons pédagogiques, on écrira systématiquement le nombre avec des chiffres ; cela permet de bien le distinguer du nom de la sous-unité.

Ce qui deviendra le numérateur est un nombre : il faut bien le distinguer du dénominateur qui, lui, correspond non pas à un nombre mais à un nom : celui d'une sous-unité.

11 huitièmes d'empan signifie *11 fois un huitième d'empan*, ce qui s'écrit encore :
1 huitième d'empan $\times 11$.



Pourquoi ce chapitre ?



Une perspective historique

Nous avons choisi de nous inspirer de la façon dont les notions sont apparues au cours de l'histoire ; or, les fractions n'ont pas été inventées pour partager des gâteaux mais pour les activités de mesurage pour lesquelles les nombres entiers ne suffisent pas.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la grandeur « longueur ». Pour la grandeur « aire », se reporter au chapitre 8.

Pourquoi des activités de mesurage plutôt que des partages de tarte ?

Contrairement à ce que l'on pense ordinairement, l'explication à base de tarte (ou de gâteau, ou de pizza, ou de camembert), pour évidente qu'elle semble, est loin d'être pertinente : elle génère des incompréhensions durables. En effet, lorsque vous disposez d'une tarte, la quantité est limitée. Une fois que vous avez distribué les quatre quarts ou les huit huitièmes que vous aviez découpés, il ne reste plus rien. On observe d'ailleurs que, pendant de longs siècles après l'invention des fractions, il ne serait venu à l'idée de personne d'utiliser des fractions telles que 5 quarts*.

Dans les activités proposées de mesurage de longueurs, on n'est pas confronté à ce problème car l'unité de mesure comme les sous-unités associées peuvent être reproduites autant de fois que nécessaire. On amène ainsi très vite des expressions comme « 7 quarts d'empan » qui ne posent, dans ce contexte, aucun problème aux élèves.

De plus, travailler avec les longueurs permet un passage plus facile à la droite graduée.

Revenir sur la différence entre la grandeur longueur et sa mesure

Le concept de grandeur

D'après la publication *Mots*, tome IV, « Grandeurs », de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, la **grandeur** peut être considérée comme « tout caractère d'un objet, susceptible de variation chez cet objet, ou d'un objet à l'autre ». Elle est caractérisée par deux relations :

- une relation permettant de dire qu'un objet est de même grandeur qu'un autre ;
- une relation permettant de dire qu'un objet est plus grand qu'un autre.

* En fait ce sont des problèmes internes aux mathématiques et à la physique qui ont amené cet usage et non pas les usages du quotidien. À l'époque où s'inventèrent les signes d'opération et le signe égal, on nota les divisions à l'aide de la notation fractionnaire, avant même d'avoir inventé le signe *divisé* (pour les raisons de ce choix voir le chapitre 9).

Comparer des longueurs

On peut utiliser plusieurs méthodes :

- comparer directement les longueurs en superposant les segments (on fait coïncider les extrémités) pour des segments déplaçables ;
- reporter les longueurs des segments sur un objet intermédiaire (un bord de feuille de papier par exemple) ;
- utiliser le compas et reporter les longueurs des segments sur une ligne droite.

Ces deux dernières procédures sont particulièrement utiles dans le cas de lignes brisées.

Mesurer des longueurs, un vrai travail sur la notion d'unité de mesure

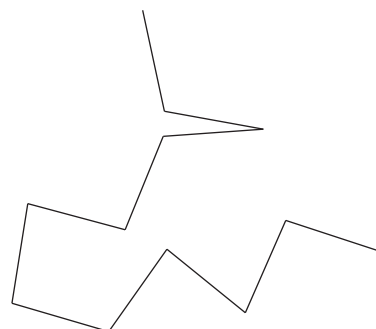
Pour de trop nombreux élèves, mesurer une longueur consiste en une succession de gestes techniques : prendre la règle graduée, la poser sur le segment à mesurer, lire la mesure. Cependant, la maîtrise de ces gestes techniques ne garantit en rien la compréhension de ce qu'est mesurer une longueur.

Mesurer la longueur d'une ligne c'est :

- choisir l'unité de mesure (un segment quelconque auquel on choisit d'attribuer 1 comme mesure de sa longueur, le « segment-unité ») ;
- reporter le segment-unité sur le segment que l'on mesure et compter le nombre de reports ;
- si les nombres entiers ne suffisent pas pour compter les reports de segment-unité, choisir une (ou plusieurs) sous-unités ;
- répondre à la question : combien y a-t-il de fois la sous-unité de mesure dans la longueur à mesurer ?

Exemple : Pour pouvoir dire que cette ligne brisée mesure 11 huitièmes d'empan, il faut avoir en mémoire l'unité de mesure choisie.

On remarque que si l'on peut compter 11 segments sur le dessin, il n'est par contre pas visible qu'il s'agit de huitièmes d'empan.



Usage de règle graduée

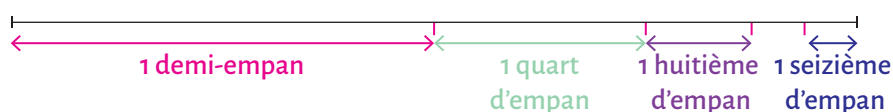
Une règle est un instrument qui sert à tracer des lignes droites.

On peut ajouter des graduations sur cet instrument qui devient alors une règle graduée et qui est utilisé pour mesurer des longueurs.

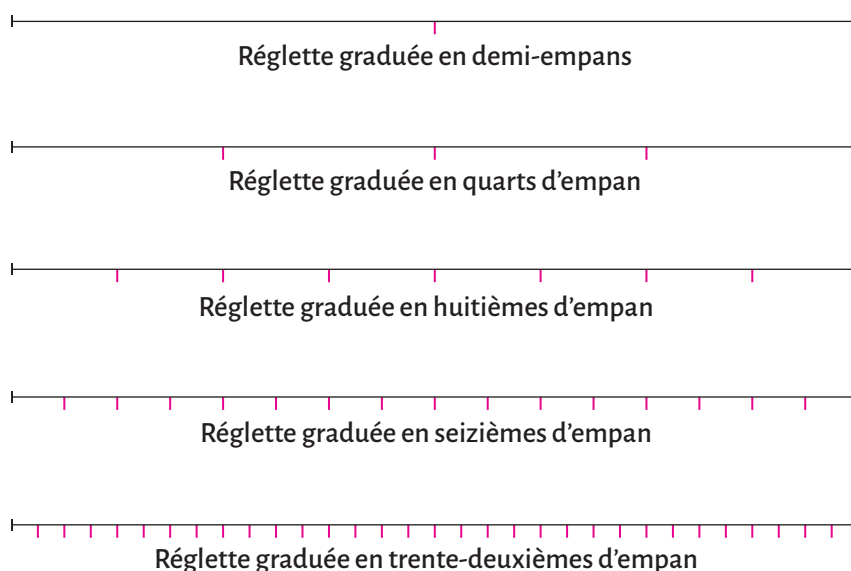
Il est important de faire la différence entre la règle et la règle graduée.

Il a été choisi de travailler sur une seule unité de mesure à laquelle un nom a été donné (ici l'empan). Les mesures s'effectuent à partir de réglettes que les élèves sont amenés à confectionner.

Voici un premier exemple (règle type 1) :



Voici aussi une suite de réglettes graduées que l'on peut obtenir (règle de type 2) :



Lien avec la division

Il s'agit de continuer de familiariser les élèves avec l'usage de l'expression *fois moins* et de l'associer fermement à la notion de division puis ultérieurement à l'écriture fractionnaire et à la signification du dénominateur qui doit, pour être compris, être interprété de la façon suivante :

- c'est le nombre de fois que la sous-unité correspondante est plus petite que l'unité ;
- c'est par ce nombre que l'on divisera l'unité pour obtenir la sous-unité.

Soulignons ici l'importance d'avoir distingué fermement *division* et *partage* (cf. chapitre 5).

Le choix des sous-unités et ses conséquences

Les sous-unités de l'empan que nous avons utilisées sont obtenues de proche en proche par des pliages équivalents à des divisions par 2. Une conséquence immédiate est que 2 fois une sous-unité équivaut à la sous-unité immédiatement supérieure.

- 2 huitièmes d'empan = 1 quart d'empan
- 2 quarts d'empan = 1 demi-empan
- 2 demi-empan = 1 empan

Dès lors, de proche en proche, toutes les mesures de longueur en empan peuvent être exprimées sous la forme d'un nombre entier suivi du nom de l'unité puis des noms de certaines des sous-unités précédées du seul nombre 1.

Considérons la « table de multiplication de 1 huitième d'empan » :

- 2 fois 1 huitième d'empan = 1 quart d'empan
- 3 fois 1 huitième d'empan = 1 quart d'empan + 1 huitième d'empan
- 4 fois 1 huitième d'empan = 1 demi-empan
- 5 fois 1 huitième d'empan = 1 demi-empan + 1 huitième d'empan
- 6 fois 1 huitième d'empan = 1 demi-empan + 1 quart d'empan
- 7 fois 1 huitième d'empan = 1 demi-empan + 1 quart d'empan + 1 huitième d'empan

- 8 fois 1 huitième d'empan = 1 empan
- 9 fois 1 huitième d'empan = 1 empan + 1 huitième d'empan
- Etc.

Une homologie avec les décimaux

On retrouvera un phénomène similaire lorsque nous construirons les nombres décimaux : les sous-unités sont obtenues par des divisions par 10 successives et, par conséquent, on peut exprimer les mesures en n'utilisant que des numérateurs inférieurs à 10.

Un avant-gout des dixièmes, centièmes, etc.

Le principe de la numération décimale est homologue : chaque fois que l'on a 10 unités on les regroupe en 1 dizaine ; chaque fois que l'on a 10 dizaines on les regroupe en 1 centaine, etc.

C'est le même principe que l'on appliquera lorsqu'on introduira les dixièmes, les centièmes, etc. : chaque fois que l'on a 10 dixièmes on les remplace par 1 unité ; chaque fois que l'on a 10 centièmes on les remplace par 1 dixième ; chaque fois que l'on a 10 millièmes on les remplace par 1 centième, etc.

Il peut donc être intéressant, à titre de première approche, de travailler sur les sous-unités de l'empan.

Remarque

Il est parfaitement envisageable de mener cette séquence en sixième, dans le cas où les élèves n'auraient pas abordé les fractions selon les modalités proposées ici. On constate qu'une minorité d'élèves propose à certains moments d'utiliser des écritures fractionnaires. On peut soit ne pas l'autoriser, soit les autoriser à le faire mais en restant très attentif à ce qu'ils écrivent : souvent, entraînés irrésistiblement par l'écriture chiffrée et le tropisme à effectuer les calculs, ces élèves tombent facilement dans des pièges tels que : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$... Ce qui leur montre qu'il est plus prudent que tous suivent les mêmes consignes.

* Les chapitres suivants trouvent en partie leur source dans les travaux de Nicolas Rouche : *Le Sens de la mesure* (Didier/Hatier, 1992) et *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* (Ellipse, 1998).

I. Simplification d'écriture

Activité 1

Introduction de l'unité de mesure : l'empan

Objectifs

- Revoir ce que signifie mesurer une longueur.
- Introduire une unité de mesure des longueurs : l'empan.
- Tracer un segment dont la mesure de longueur est exprimée avec un nombre entier.

Matériel pour les élèves

- Fiche activité 1
- Une règle non graduée pour prévenir toute tentation de se servir des unités de mesures connues
- Des feuilles blanches

Matériel pour le professeur

Un étalon de mesure que l'on appelle « empan prof » (c'est la version agrandie de l'étalon de mesure de l'élève).

Il est important de faire tracer les segments sur une feuille blanche pour que les élèves ne puissent pas utiliser les lignes du cahier et ainsi distinguer l'usage de la règle (une règle sert à tracer des lignes droites) de l'usage de l'unité de mesure (pour obtenir une mesure de longueur).

On peut opter pour un étalon 5 fois plus long que l'« empan élève ».

1 PREMIÈRE PARTIE

Modalités

Avant que les élèves entrent en classe, l'enseignant a tracé au tableau un segment de mesure de longueur 5 empan profs.

Consignes

Pendant la nuit, un méchant sorcier très maléfique a réussi à faire disparaître toutes les graduations de tous les instruments de mesure. Comment peut-on faire pour mesurer la longueur du segment tracé sur le tableau ?

Point de vigilance

Certains élèves vont absolument vouloir connaître la mesure de l'empan dans l'unité conventionnelle (le mètre). Il est très important à ce moment-là de rappeler que cette unité de longueur n'est plus utilisée dans ce chapitre (on imagine qu'elle a disparu...) et de rassurer les élèves en précisant que, non seulement le mètre n'est pas indispensable pour comprendre et faire les prochaines activités, mais qu'en faisant semblant qu'il n'existe plus, cela aide à comprendre les savoirs visés.

Si la question se pose, cela peut aussi être l'occasion de rappeler que le mètre n'a pas toujours existé, de donner d'autres exemples d'unités de longueur (les milles utilisés par les marins par exemple, ou encore le pouce, unité de longueur utilisée au Moyen Âge et unité anglaise actuelle).

Ce qui est en cause ici, c'est la différence entre « grandeur » et « mesure ». Ces élèves identifient « connaissance de la longueur » et « connaissance de sa mesure », ils n'envisagent donc la situation proposée que comme un problème de conversion.

Mise en commun

Très rapidement des élèves proposent d'utiliser un de leurs doigts. D'autres élèves (ou l'enseignant le cas échéant) peuvent alors soulever le problème suivant : tout le monde n'a pas la même longueur de doigt ; il est alors très difficile de communiquer une mesure et donc de se comprendre dans ces conditions.

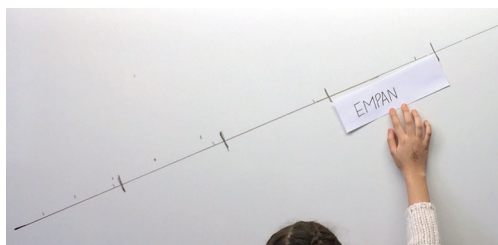
On convient donc qu'il faut une longueur commune à l'unité de mesure que tout le monde va utiliser.

Celle-ci est choisie par le professeur : ce sera l'empan.



À ce moment-là, l'enseignant montre l'étalon de mesure « empan prof ».

On demande alors à un élève de venir l'utiliser et de mettre des mots sur les actions effectuées pour mesurer la longueur du segment, notamment sur le fait de reporter l'unité.



On a reporté 5 fois l'étalon de mesure de longueur. La mesure de la longueur de ce segment est donc 5 empan profs.

Bilan

Mesurer, cela signifie d'abord choisir une unité de mesure puis obtenir la réponse à la question « Combien y a-t-il de fois l'unité de mesure dans ce que l'on veut mesurer ? »

On fera référence à ce bilan chaque fois que ce sera nécessaire au cours de ce chapitre.

2 DEUXIÈME PARTIE

Modalités

Chaque élève reçoit la fiche activité 1 (avec les bandes de papier dont les mesures de longueur sont 1 empan) et une règle non graduée.

Points de vigilance

On ne mesure pas un objet. On mesure une de ses caractéristiques : « mesurer M. Untel » n'a pas de sens. On peut mesurer sa taille, son poids, son périmètre crânien, etc. En toute rigueur, il convient de préciser la caractéristique que l'on veut mesurer. Pour un polygone par exemple, on peut mesurer la longueur de son contour, son aire, son « diamètre » (la plus grande distance possible entre deux de ses points). L'enseignant veille à éviter l'expression « mesurer un segment » et à dire « mesurer la longueur du segment ».

Dans le déroulé qui suit, le mot empan désigne l'« empan élève ».

Il est bien difficile pour des élèves de cycle 3 de distinguer l'unité de mesure (objet idéal et abstrait) de l'étalon de mesure qui est un objet du monde réel. À ce stade on n'insiste pas trop sur ce point.

On peut aussi demander aux élèves s'il s'agit encore de règles : beaucoup argueront qu'il ne s'agit pas d'une règle puisqu'il n'y a pas de graduation. (Pour eux une règle est forcément graduée !) Il faut donc, pour se sortir du dilemme, aller chercher une définition : *une règle est un outil permettant de tracer des lignes droites* et il faut distinguer règle graduée et règle non graduée (voire règle « dégraduée »).*

* *Petit Larousse* : « Instrument long à arêtes vives et rectiligne pour tracer des lignes ou mesurer des longueurs. »

Consignes

Tracez, sur une feuille blanche, un segment de mesure de longueur 1 empan puis un segment de mesure de longueur 2 empans.

Mise en commun

On peut demander aux élèves d'expliquer leur manière d'utiliser la règle et l'empan. On retrouve principalement deux techniques :

- tracer une ligne droite (avec la règle) puis marquer deux points qui correspondent aux extrémités du segment (grâce à l'empan) et effacer « ce qui est en trop » ;
- poser directement l'empan sur la règle et tracer le segment demandé.

- Expliquer pourquoi l'« empan-élève » est beaucoup moins long que l'« empan prof » : pour que les élèves aient l'impression de voir au tableau quelque chose qui concorde avec ce qui figure (ou figurera) sur leur feuille. Lorsque le professeur trace au tableau un segment dont la longueur mesure un empan élève, beaucoup ressentent le besoin de vérifier que ce segment, qui leur paraît si petit, a bien la même longueur que leur bande étalon.

Activité 2

Du segment à la ligne brisée

Objectifs

- Rappeler que la notion de longueur ne concerne pas que les segments et que l'on peut connaître la longueur d'une ligne brisée sans connaître les longueurs des segments qui la constituent.
- Mesurer des longueurs de segments et de lignes brisées.
- Tracer des lignes brisées de mesures de longueur données avec un entier.
- Utiliser le compas pour reporter des longueurs.

- Comme on ne dispose plus de règles graduées, l'usage du compas pour vérifier que des longueurs sont égales s'avère ici particulièrement pertinent (même si ce n'est pas la méthode à laquelle pensent les élèves). Cet usage doit avoir été travaillé antérieurement : il doit s'agir d'un savoir-faire à réinvestir. La séquence est riche en savoirs nouveaux, elle ne saurait donc être l'occasion de l'introduction de cet usage du compas.

1 PREMIÈRE PARTIE

Matériel

- Fiche activité 2
- Les bandes unités (feuille empan)
- Feuille blanche, règle non graduée, compas

Modalités

Travail individuel puis mise en commun.

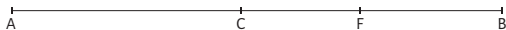
Réponses attendues

Du segment à la ligne brisée

Voici un segment dont la longueur est 1 empan :



Que peut-on dire du segment AB, des deux lignes brisées ACFB et du triangle CFH ?



...