

Christian Henaff

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES

CP

Manipuler et calculer

RETZ

editions-retz.com

CHRISTIAN HENAFF a été professeur des écoles, maître formateur, puis conseiller pédagogique en Corrèze.

© Éditions Retz 2021
ISBN : 978-2-7256-3997-0

Direction éditoriale : Céline Lorcher

Édition : Anne-Sophie Perret

Illustrations : Sébastien Chebret

Correction : Christel Desmaris

Maquette : Cécile Rouyer

© istock pour les illustrations des pages 47 h, 48, 49 h, 50, 52 h, 53, 54, 57 h, 58, 59 h, 60, 97 b, 111

Mise en page : Patrick Leleux PAO



Cet ouvrage suit l'orthographe recommandée par les rectifications de 1990 et les programmes scolaires. Voir le site <http://www.orthographe-recommandee.info> et son miniguide d'information.



 **Conçu & fabriqué**
en France

N° de projet : 10266795

Dépôt légal : janvier 2021

Achévé d'imprimer en France en décembre 2020 sur les presses de SEPEC.

Sommaire

Introduction	5
La résolution de problèmes de la petite section au CP	5
La catégorisation des problèmes	6
La manipulation pour résoudre des problèmes, une phase de l'apprentissage....	7
La phrase collective	9
Quelques repères pour la mise en œuvre des séances	10
Modalités.....	10
La démarche	11
Programmation des apprentissages	14
Méthodologie.....	14
Catégories étudiées	16
Stratégies de résolution.....	16
Les outils pour la classe	18
Les outils de programmation	18
Les outils pour la mise en œuvre des apprentissages	18
Période 1	
Programmation de la période 1	21
Se familiariser avec les situations en manipulant les jetons	22
Semaines 1A et 1B • Situations d'augmentation et de diminution	24
Semaines 2A et 2B • Situations de composition de deux parties d'un tout	28
Semaines 3A et 3B • Situations de multiplication (... groupes de ...)	31
Semaine 4A • Situations d'addition (réunion de collections)	33
Semaine 4B • Situations de multiplication et d'addition	35
Semaines 5A et 5B • Situations de partage	36
Semaine 6A • Situations de groupement	39
Semaine 6B • Situations de partage et de groupement	41
Période 2	
Programmation de la période 2	43
Résoudre des problèmes avec des jetons	44
Semaine 7 • Problèmes d'addition et de soustraction	46
Semaine 8 • Problèmes d'addition et de multiplication	48
Semaine 9 • Problèmes de groupement et de partage	51
Semaine 10 • Problèmes d'addition et de soustraction	53
Semaine 11 • Problèmes de partage et de soustraction	56
Semaine 12 • Problèmes de division et de multiplication	58

Période 3

Programmation de la période 3	61
Résoudre des problèmes avec des jetons	62
Semaine 13 • Problèmes d'addition et de soustraction	64
Semaine 14 • Problèmes d'addition et de multiplication	66
Semaine 15 • Problèmes de groupement et de partage	68
Semaine 16 • Problèmes d'addition et de soustraction	70
Semaine 17 • Problèmes de partage et de soustraction	72
Semaine 18 • Problèmes de division et de multiplication	74

Période 4

Programmation de la période 4	77
Résoudre des problèmes de recherche	78
Résoudre des problèmes relevant de toutes les situations étudiées	80
Semaine 19 • Problèmes de recherche (1)	81
Semaine 20 • Problèmes de recherche (2)	83
Semaine 21 • Problèmes de recherche (3)	85
Semaine 22 • Salade de problèmes (1)	87
Semaine 23 • Salade de problèmes (2)	89
Semaine 24 • Salade de problèmes (3)	91

Période 5

Programmation de la période 5	93
Résoudre des problèmes par le calcul	94
Lire un énoncé	96
Créer et rédiger un problème	97
Semaine 25 • Résoudre par le calcul des problèmes d'addition et de soustraction (1)	99
Semaine 26 • Résoudre par le calcul des problèmes d'addition et de soustraction (2)	101
Semaine 27 • Résoudre par un calcul additif des problèmes d'addition et de multiplication	104
Semaine 28 • Lire un énoncé	106
Semaine 29 • Rédiger un problème (1)	109
Semaine 30 • Rédiger un problème (2)	111

Introduction

La résolution de problèmes de la petite section au CP

Les problèmes dits de recherche – qui privilégient la mise en œuvre d’essais et, plus généralement, d’un raisonnement – sont importants dans le parcours des apprentissages en résolution de problèmes. Au CP, nous leur accordons toute leur place en période 4, avec des objectifs méthodologiques simples et un guidage collectif qui sont explicités en introduction de la période (cf. page 78). Toutefois, ce sont les problèmes numériques ou problèmes dits classiques qui constituent l’essentiel de la programmation et c’est sur les apprentissages les concernant que nous devons prioritairement nous pencher.

Quand on fait des mathématiques, on travaille dans l’**abstraction**, en raisonnant sans utiliser d’objets et donc sans manipuler... On résout les problèmes numériques par le calcul et avec les nombres.

Amener tous les élèves à savoir résoudre des problèmes par le calcul et avec les nombres ne signifie pas pour autant s’affranchir de la **manipulation**. En effet, tous les élèves n’accèdent pas à l’abstraction en même temps et ils ont besoin, pour la plupart, d’accumuler les expériences de manipulation.

Dès la petite section, vivre les situations

Dès leur première année d’école maternelle, les élèves mettent en œuvre les diverses procédures qu’ils retrouveront plus tard dans les problèmes. C’est ainsi, par exemple, qu’ils apprennent à réaliser un **partage-distribution** ou un **groupement**.

1. Lucas a des morceaux de sucre. Il les partage entre les trois ours. → *partage-distribution*
2. Lydie a des bonbons. Elle en met deux dans chaque assiette. → *groupement*

Les élèves se familiarisent ici avec les situations qui servent de support à la rédaction des problèmes de division. Notons que ce travail se poursuit jusqu’au début du cours préparatoire afin que les élèves abordent la résolution de problèmes avec une bonne connaissance des différentes situations.

En grande section, résoudre les premiers problèmes

Un problème se différencie d’une situation par la présence d’une question à laquelle on peut répondre en utilisant les informations contenues dans l’énoncé.

1. Milan a 10 billes. Il en donne 2 à Jade. Maintenant il lui reste 8 billes. → *situation*
2. Milan a 10 billes. Il en donne 2 à Jade. **Combien lui reste-t-il de billes ?** → *problème*

En grande section, les élèves apprennent le contrat didactique de l’activité, c’est-à-dire à répondre à la question en utilisant les informations données :

- ils manipulent pour faire « ce que raconte l’énoncé » ;
- ils observent le résultat de leur manipulation.

Les élèves ne savent pas encore lire et les énoncés sont lus ou racontés par l’enseignant, des images et du matériel accompagnant la présentation d’un problème.

Au CP, apprendre en manipulant les problèmes

Les catégories de problèmes sont nombreuses¹ et certaines sont difficiles d'accès pour de jeunes enfants. Le principe de progressivité s'impose donc. Il amène à étaler sur plusieurs années l'apprentissage des différentes catégories de problèmes.

Seules les catégories de problèmes manipulables seront étudiées au CP. Notons que les apprentissages du CE1 seront menés sur ces mêmes catégories.

La catégorisation des problèmes

Les problèmes dits « manipulables »

On peut les donner à résoudre à de jeunes enfants par la manipulation d'objets.

Cette manipulation suit la chronologie des actions (cf. l'exemple 1 ci-dessous) ou met en place un état décrit par l'énoncé (cf. l'exemple 2 ci-dessous).

Elle permet de répondre à la question posée en dénombrant une collection, en constatant le résultat.

1. Lilou a 12 images. Elle en donne 4 à Maxime. **Combien lui reste-t-il d'images ?**
2. Lilou a 12 billes dans une boîte. Dans sa boîte, elle a 8 billes rouges et les autres sont bleues. **Combien a-t-elle de billes bleues ?**

Les problèmes manipulables recouvrent les catégories suivantes :

Les problèmes d'addition

- Recherche de l'état final dans un problème d'augmentation

Samuel a 8 bonbons. Lilou lui donne 3 bonbons.

Combien Samuel a-t-il de bonbons maintenant ?

- Recherche du tout dans la réunion de plusieurs parties

Léa a 8 bonbons à la fraise et 6 bonbons au citron. **Combien Léa a-t-elle de bonbons ?**

Remarque

.....
Au CP, il n'est pas nécessaire d'apprendre aux élèves à opérer la distinction entre ces deux catégories.
.....

Les problèmes de multiplication

- Recherche du tout dans la réunion de plusieurs parties de cardinaux identiques

Rémi a 4 paquets de 8 bonbons. **Combien Rémi a-t-il de bonbons ?**

Remarque

.....
Les problèmes de multiplication sont des problèmes d'addition particuliers.
.....

Les problèmes de soustraction

- Recherche de l'état final dans un problème de diminution

Max a 8 bonbons. Il donne 3 bonbons à Lisa. **Combien Max a-t-il de bonbons maintenant ?**

- Recherche d'une partie dans la réunion de deux parties

Ali a 14 bonbons. 8 de ces bonbons sont à la fraise et les autres bonbons sont au citron. **Combien Ali a-t-il de bonbons au citron ?**

1  Annexe 3 – Catégorisation des problèmes.

Les problèmes de division

- Recherche du nombre de groupes dans un problème de groupement

Lou a 15 bonbons. Elle fait des paquets de 5 bonbons.

Combien Lou peut-elle faire de paquets ?

- Recherche de la valeur d'une part dans un problème de partage

Léon a 15 bonbons. Il les partage avec ses amis Tim et Tom.

Combien chacun aura-t-il de bonbons ?

Les problèmes dits « non manipulables »

Ces problèmes peuvent être résolus par la manipulation à la condition de reformuler l'énoncé.

Mia a 12 images maintenant. Elle vient d'en donner 5 à Loane.

Combien Mia avait-elle d'images avant ?

→ Mia n'a pas pris les 5 images dans les 12 pour les donner. Elle avait ces 5 images en plus des 12 images qui lui restent. Il faut constituer une collection de 12 et une collection de 5.

La manipulation de ces problèmes présente un tel degré de difficulté qu'il est plus pertinent d'étudier leur résolution directement par le calcul. On élabore alors des règles de choix des opérations.

Ces catégories de problèmes non manipulables seront enseignées à partir du CE2.

En fin de CP, apprendre à résoudre par le calcul

Les catégories de problèmes qui sont devenues familières peuvent faire l'objet d'un apprentissage de la résolution par le calcul. C'est le cas des problèmes d'addition (recherche de l'état final et recherche du tout lors de la réunion de collections différentes ou de collections identiques) et des problèmes de soustraction (recherche de l'état final).

La manipulation pour résoudre des problèmes, une phase de l'apprentissage

La manipulation pour...

Simuler le réel

Bibi avait un paquet de 24 gâteaux, mais il en a mangé 8. Combien lui reste-t-il de gâteaux ?

La manipulation permet aux élèves de résoudre « en faisant comme si... ». Avec des cubes ou des jetons, l'élève prend la place de Bibi.

Attention, les problèmes relatifs aux grandeurs et mesure ne sont pas propices à la manipulation. Il est difficile, par exemple, de représenter un kilomètre par un jeton et donc de simuler une mesure de distance.

Résoudre des problèmes avant que les opérations soient étudiées

Comprendre l'enjeu de l'activité et accepter la difficulté de la tâche est parfois difficile pour de jeunes élèves. La manipulation permet de démarrer la résolution de problèmes sans affronter la difficulté supplémentaire que constitue l'utilisation des outils mathématiques.

Favoriser la construction du sens de toutes les situations

Chaque catégorie de situations doit être rencontrée à plusieurs reprises afin que les élèves en repèrent les invariants et construisent ainsi un « bagage culturel » qui trouvera tout son sens lorsque le recours aux opérations sera enseigné. C'est un **objectif intermédiaire** qui est fixé ici et non le but à atteindre. Il s'agit de rendre chaque catégorie familière, avant que soit enseigné l'outil mathématique correspondant.

Favoriser le respect du contrat didactique

Les problèmes sont concrets, les modalités de travail également. La mise en œuvre des séances contraint chaque élève à résoudre seul puisque deux voisins ont les mêmes problèmes à résoudre mais avec des données numériques différentes (cf. « Les outils pour la classe », p. 18). Les conditions sont réunies pour que chaque élève résolve tout ou partie des problèmes.

Cette phase permet à l'élève d'avoir confiance en lui et, à l'enseignant, de renforcer la conviction que chaque élève est capable de résoudre des problèmes.

Les limites de la manipulation

Attention !

La manipulation amène à constater la réponse, et ce n'est pas « faire des maths » !

La résolution des problèmes par manipulation ne peut être qu'un stade de l'apprentissage, parce qu'elle ne constitue pas une activité mathématique. Les élèves n'y sont jamais dans une activité purement abstraite.

Dans leurs procédures, les élèves dénombrent des collections et constatent les effets qu'elles produisent. Jamais ils ne sont en situation de calculer, le calcul étant une tâche d'anticipation qui s'effectue hors présence de collections. Il importe donc de bien resituer les places respectives de la résolution d'un problème par manipulation et de cette même résolution par le calcul.

Important

Notre démarche est claire : elle propose de faire manipuler les élèves avant l'apprentissage des opérations. Son objectif est de favoriser l'accès de tous les élèves aux procédures numériques et de calcul.

Lorsque vient le temps de l'apprentissage de l'utilisation des opérations, on explicite le lien entre manipulation et opération, on montre comment l'opération se substitue à la manipulation. Alors, cette dernière disparaît des dispositifs.

La manipulation ne laisse pas de trace de la procédure

Il s'agit là d'un inconvénient non négligeable qui complexifie, voire rend même souvent impossible l'analyse à posteriori de la procédure de l'élève.

Faire manipuler tous les élèves... Oui, mais pourquoi ?

Le choix de faire manipuler tous les élèves implique d'en freiner temporairement certains qui seraient capables d'utiliser des calculs pour résoudre des problèmes. Il peut donc être discuté et nécessite d'être argumenté.

Les séances de manipulation :

- permettent aux élèves les plus fragiles de résoudre quelques problèmes de chaque catégorie et donc de construire des savoir-faire qui leur seront indispensables ultérieurement pour apprendre à choisir l'opération ;
- amènent les élèves les plus performants à résoudre de nombreux problèmes et donc à consolider leur compréhension des situations ;
- permettent d'installer une méthodologie pour résoudre dont tous les élèves tireront profit ;

Les élèves les plus performants sont rapidement autonomes lors de ces séances. L'enseignant peut alors apporter aux élèves les plus fragiles toute l'attention nécessaire, notamment pour aider à la mise en œuvre de procédures peu familières (ex. : les problèmes de partage).

La phase collective

Temps fort d'une séance de résolution de problèmes

Se pose la question de la stratégie d'enseignement : comment mettre en œuvre les apprentissages identifiés ? En résolution de problèmes, comme dans tous les domaines, les temps collectifs sont plus qu'utiles, ils sont indispensables. Ils permettent bien sûr à l'enseignant d'énoncer un contenu ou d'explicitier une méthodologie mais aussi à chaque élève de contribuer à l'élaboration d'une règle, de redire celle-ci pour manifester sa compréhension ou de formuler ses difficultés.

Il semble préférable d'agir par anticipation plutôt qu'en réaction avec une correction collective de fin de séance. Celle-ci, même bien menée, ne permet pas d'agir avec le recul nécessaire pour analyser les réussites et les erreurs et pour bâtir une remédiation pertinente.

Au début de chaque séance

S'il s'agit d'un nouvel apprentissage, on l'introduit par une recherche collective, par la présentation de modèles ou par l'analyse d'exemples. Si c'est une séance d'entraînement, la phase collective permet de rappeler les connaissances et savoir-faire qui vont être mobilisés ensuite. Si c'est une remédiation, elle permet d'explicitier les erreurs de compréhension. Aucune séance de résolution de problèmes ne peut donc échapper à la règle : une séance de résolution de problèmes commence par une phase collective.

Le support collectif visuel

Les paroles s'envolent, les écrits restent. Chaque élève peut avoir une chute de la concentration et de l'attention, éprouver des difficultés à se représenter correctement ce qui est dit par l'enseignant, oublier ce qu'il avait pourtant compris lors de l'explication. L'écrit présent au tableau est alors le support des interactions.

Situations d'augmentation et de diminution

Objectif Dénombrer l'état final

Présentation de la séance

- Une situation d'augmentation :
Lilou a 12 images. Elle en gagne 4. **Maintenant elle a 16 images.**
- Une situation de diminution :
Lilou a 12 images. Elle en donne 4 à Maxime. **Il lui reste 8 images.**

Ces deux situations se définissent par un état initial, modifié par une action appelée transformation et laissant la place à un état final.

Prendre appui sur la chronologie

L'enseignant énonce chaque situation en trois phases :

- les deux premières phases entraînent une action de la part de l'élève, la première pour constituer l'état initial et la seconde pour effectuer la transformation ;
- la troisième énonce le nouvel état de la collection.

Préparer à la résolution de problèmes

L'énoncé de la dernière phase ne fait que confirmer ce que l'élève peut constater par lui-même sur sa table. Ainsi il développe l'idée que la troisième information peut être retrouvée à partir des deux premières. C'est ce qui lui sera demandé en résolution de problèmes.

Observer les effets produits par les actions

Ces situations d'augmentation et de diminution sont familières aux élèves à l'entrée au CP. Les deux séances qui leur sont consacrées visent à **faire prendre conscience des effets produits par les actions d'ajouter et d'enlever**. Dans la perspective d'apprendre à utiliser les opérations pour résoudre des problèmes (même si elle est encore lointaine), il est donc important d'amener les élèves à constater qu'« à chaque fois qu'on enlève, il y a moins après » et qu'« à chaque fois qu'on ajoute, il y a plus après ».

Remarque

Dans les situations de diminution, les jetons enlevés ne sont pas remis dans la réserve

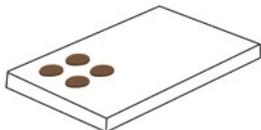
On apprend aux élèves à distinguer les jetons qui appartiennent à la situation de ceux qui constituent la réserve, en particulier dans les situations de diminution.

Au cours de celles-ci, on enlève des jetons qui appartenaient à la collection initiale et ce retrait se matérialise par une mise sur le côté, et non par leur rangement dans la réserve.

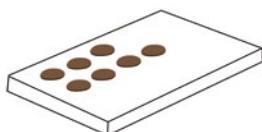
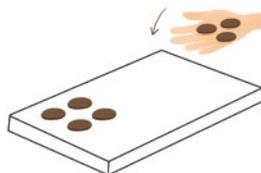
Ainsi l'organisation des jetons sur la table favorise la vérification et une éventuelle correction.

Situations d'augmentation : présentation d'un exemple

Sur ma table, j'ai 4 jetons.



J'ajoute 3 jetons.



Maintenant, j'ai 7 jetons.

 Affichage collectif et fiche élève 1A

Situations d'augmentation : entraînement collectif

Une série de quatre situations à traiter sur le modèle suivant :

- Énoncer et faire mettre en place la situation initiale.
- Faire de même pour la transformation.
- Faire constater que la collection finale (état final) a plus d'éléments que la collection initiale.
- Dénombrer la collection.

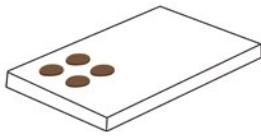
 Fiche élève 1A

Série A

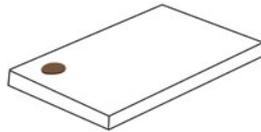
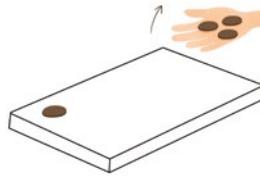
1. Sur ma table, j'ai 3 jetons. J'ajoute 1 jeton. **Maintenant, j'ai 4 jetons.**
2. Sur ma table, j'ai 4 jetons. J'ajoute 4 jetons. **Maintenant, j'ai 8 jetons.**
3. Sur ma table, j'ai 4 jetons. J'ajoute 2 jetons. **Maintenant, j'ai 6 jetons.**
4. Sur ma table, j'ai 3 jetons. J'ajoute 3 jetons. **Maintenant, j'ai 6 jetons.**

Situations de diminution : présentation d'un exemple

Sur ma table, j'ai 4 jetons.



J'enlève 3 jetons.



Maintenant, j'ai 1 jeton.

 Affichage collectif
et fiche élève 1A

Situations de diminution : entraînement collectif

Une série de quatre situations à traiter sur le même modèle que les situations d'augmentation, en faisant constater que la collection finale (état final) a moins d'éléments que la collection initiale.

 Fiche élève 1A

Série B

1. Sur ma table, j'ai 5 jetons. J'enlève 2 jetons. **Maintenant, j'ai 3 jetons.**
2. Sur ma table, j'ai 6 jetons. J'enlève 3 jetons. **Maintenant, j'ai 3 jetons.**
3. Sur ma table, j'ai 7 jetons. J'enlève 1 jeton. **Maintenant, j'ai 6 jetons.**
4. Sur ma table, j'ai 8 jetons. J'enlève 4 jetons. **Maintenant, j'ai 4 jetons.**

Problèmes de recherche (1)

Objectif Résoudre un problème à plusieurs contraintes

Présentation de la séance

Le problème 1 de la semaine 19 est intitulé « Chameaux et dromadaires ».

Résous le problème 1.

Problème 1 – Chameaux et dromadaires

Au zoo, Margot a vu des chameaux et des dromadaires.

Elle a compté les bosses et les têtes, puis elle a dit : « Il y a 12 bosses et 7 têtes. »

Combien a-t-elle vu de chameaux ?

Combien a-t-elle vu de dromadaires ?

Réponse attendue : *Il y a 5 chameaux et 2 dromadaires.*

 Affichage collectif
et fiche élève 19

Deux méthodes possibles pour résoudre ce problème

Le problème peut être résolu en utilisant des outils mathématiques

C'est un problème à plusieurs contraintes dont la procédure experte de résolution fait appel à la notion de variable.

Soit C le nombre de chameaux et D le nombre de dromadaires, chaque animal ayant une tête, on peut écrire : $C + D = 7$, d'où $D = 7 - C$.

Chaque chameau ayant deux bosses et chaque dromadaire une seule, on peut écrire : $2C + D = 12$.

$$2C + D = 2C + 7 - C = C + 7 = 12$$

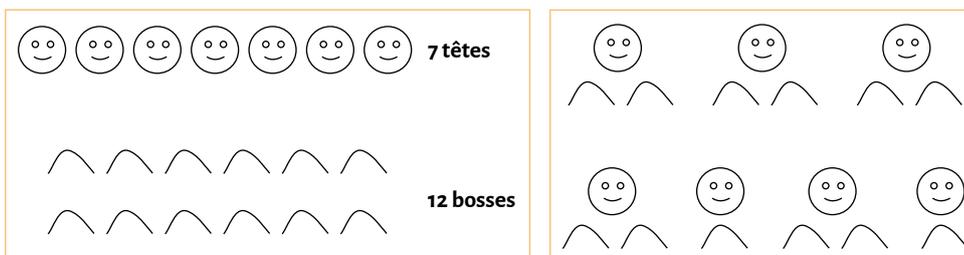
$$C + 7 = 12, \text{ donc } C = 12 - 7 = 5$$

Il y a donc 5 chameaux ($C = 5$) et 2 dromadaires ($D = 2$).

Le problème peut être résolu par le dessin

Pour cela, on peut représenter l'ensemble des têtes et des bosses. Ensuite, chaque animal peut être représenté par une tête et sa ou ses bosses.

Par exemple :



Il y a donc 5 chameaux ($C = 5$) et 2 dromadaires ($D = 2$).

— Résoudre des problèmes de ce type au cours de la scolarité primaire, c'est construire un bagage culturel qui sera utile au collège pour la compréhension des équations.

Déroulement

Le lancement collectif de l'activité doit permettre à chaque élève de démarrer la recherche

Une fois le texte lu et expliqué collectivement, une phase d'échanges permet de verbaliser des modalités de la représentation schématisée d'un chameau et d'un dromadaire, et ce afin d'éviter que la recherche ne se transforme en un exercice de dessin.

Les données numériques sont choisies pour ne pas favoriser le hasard

Quand ils réalisent leur premier dessin, les élèves ont tendance à alterner chameau et dromadaire. Pour que ce dessin fournisse la réponse, il faudrait donc que la solution soit 3 chameaux et 4 dromadaires ou 4 chameaux et 3 dromadaires. Or la réponse est : « Il y a 5 chameaux et 2 dromadaires. » La chance ne suffira donc pas ici !

Après un premier essai qui ne fournit pas la réponse, la principale difficulté consiste à changer d'hypothèse

Pour un élève de CP, il est difficile de corriger un premier essai. Il s'avère plus pertinent de demander à l'élève de faire un autre essai, différent du premier.

Un problème supplémentaire est prévu pour les élèves ayant terminé avant la fin du temps imparti

Il possède les mêmes caractéristiques que le problème 1.

 Fiche élève 19

Résous le problème 2.

Problème 2 – À la ferme

À la ferme d'Antonin, il y a des poules et des lapins.

Il y a 5 têtes et 18 pattes.

Combien y a-t-il de poules ?

Combien y a-t-il de lapins ?



Réponse attendue : Il y a 4 lapins et 1 poule.

Le nombre de têtes (8) détermine le nombre d'animaux.

C'est la variable « nombre de pattes » qui fera l'objet de la réflexion, le nombre 18 pouvant donner lieu à de multiples combinaisons de 2 et de 4 (une poule a 2 pattes et un lapin 4 pattes). Mais une seule de ces combinaisons a 8 termes (il y a 8 animaux) : $4 \times 4 + 2 \times 1 = 18$.

Il y a donc 4 lapins et 1 poule.

La séance

Distribuer la fiche élève.

- Lecture collective expliquée du problème 1 « Chameaux et dromadaires ».
- Résolution individuelle du problème 1.
- Correction collective du problème 1.