Problématix

Apprendre à comprendre les mathématiques par la résolution de problèmes

Catherine Rivier
Chargée d'enseignement à la Faculté de psychologie
et des sciences de l'éducation de l'université de Genève (Suisse)

Emmanuel Sander
Professeur à la Faculté de psychologie et des sciences
de l'éducation de l'université de Genève (Suisse)

CM1 CM2

RETZ
editions-retz.com

Nous remercions, pour leur engagement à nos côtés dans la recherche et en particulier pour la mise en œuvre du dispositif d'enseignement-apprentissage dans les classes :

- les enseignantes et enseignants des écoles primaires publiques françaises ainsi que leurs conseillères et conseillers pédagogiques de circonscription et leurs inspectrices et inspecteurs de circonscription,
- les enseignantes et enseignants des écoles primaires du canton de Genève ainsi que leurs coordinatrices pédagogiques et leurs directions.

Nous remercions le département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP) du canton de Genève, et particulièrement sa direction de l'enseignement obligatoire (DGEO) pour leur aide dans l'implémentation de cette recherche et dans l'évaluation de sa contribution à la réussite des élèves d'école primaire du canton de Genève.

Nous remercions la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève pour son soutien, ainsi que les anciens et actuels membres de l'équipe IDEA (Instruction, Développement, Éducation, Apprentissage) et les collectifs des projets ACE, DEEC et RAIFLEX et AIR2. Ils ont contribué de manière majeure par les travaux réalisés et la richesse des échanges aux réflexions qui ont présidé à l'élaboration de ce dispositif.

Nous remercions enfin l'équipe éditoriale de Retz pour son précieux accompagnement dans la réalisation de l'ouvrage *Problématix*.

© Éditions Retz 2024
ISBN : 978-2-7256-4528-5

Code éditeur : 374257 – **Dépôt légal** : aout 2024
Achevé d'imprimer en France en juillet 2024, sur les presses de l'imprimerie Champagne.

Direction éditoriale : Céline Lorcher
Édition : Valentine Camus
Mise en page : STDI
Maquette de couverture : Atelier Senuba
Relecture : Cindy Clément
Code projet : 10295679

Ce livre est imprimé sur du papier issu de forêts gérées durablement.

Sommaire

Présentation **5**

La résolution de problèmes : la représentation en soutien de la compréhension et de l'apprentissage 6

Le dispositif d'apprentissage *Problématix* 16

Mettre en œuvre *Problématix* en classe 28

La progression pédagogique 31

Séances 1 et 2 — Découvrir, s'approprier et utiliser les outils de modélisation des situations additives et soustractives : le Schéma-ligne et la Boite à nombres 33

Séance 3 — Activité intercalaire métacognitive : associer schéma et calcul 43

Séances 4 et 5 — Résoudre des problèmes additifs de comparaison : compréhension des expressions « de plus » et « de moins » .. 45

Séance 6 — Activité intercalaire métacognitive : associer schéma et énoncé 57

Séances 7 et 8 — Résoudre des problèmes soustractifs de comparaison : compréhension des expressions « de plus » et « de moins » .. 59

Séance 9 — Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution 68

Séances 10 et 11 — Découvrir et s'approprier le nombre rectangle : outil de modélisation des situations de multiplication et de division 69

Séance 12 — Activité intercalaire métacognitive : associer schéma et calcul 80

Séances 13 et 14 — Résoudre des problèmes additifs de comparaison à scénarios discordants 83

Séance 15 — Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution 93

Séances 16 et 17 — Résoudre des problèmes multiplicatifs de comparaison : compréhension de l'expression « fois plus » 95

Séance 18 — Activité intercalaire métacognitive : vrai ou faux ? 105

Séances 19 et 20 — Résoudre des problèmes divisifs de comparaison : compréhension de l'expression « fois moins » 107

Séance 21 — Activité intercalaire métacognitive : créer un énoncé multiplicatif 117

Séances 22 et 23 — Résoudre des problèmes soustractifs de comparaison à scénario atypique (discordant) 119

Séance 24 — Activité intercalaire métacognitive : trier des énoncés 129

Séances 25 et 26 — Résoudre des problèmes multiplicatifs à scénario atypique (discordant) 131

Séance 27 — Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution 141

Séances 28 et 29 — Résoudre des problèmes divisifs à scénario atypique (discordant) 143

Séance 30 — Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et calcul 154

Séances 31 et 32 — Résoudre des problèmes additifs de transformation 155

Séance 33 — Activité intercalaire métacognitive : créer un énoncé additif 166

Séances 34 et 35 — Résoudre des problèmes multiplicatifs de comparaison avec emploi de l'expression « de moins » 167

Séance 36 — Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution 177

Séances 37 et 38 — Résoudre des problèmes soustractifs de transformation 179

Séance 39 — Activité intercalaire métacognitive : formuler la question 190

Séances 40 et 41 — Résoudre des problèmes divisifs de comparaison avec emploi de l'expression « fois plus » 191

Séance 42 — Activité intercalaire métacognitive : créer un énoncé divisif 201

Références et sources bibliographiques **203**

Quels principes ont présidé à l'élaboration de *Problématix* ?

• Dans le domaine des recherches en éducation, la conception et l'implémentation de dispositifs d'intervention en classe visant le progrès des élèves et le développement des compétences professionnelles des enseignants[1] sont d'autant plus abouties que la collaboration entre chercheurs et enseignants est développée, dans une démarche de coconception (Gentaz et Richard, 2022[2] ; Sensevy, 2021). Cèbe et Goigoux (2018) relèvent l'importance de ce partenariat dans la mise en cohérence des résultats de recherche avec les pratiques habituelles des enseignants. Ces chercheurs ont identifié trois conditions à cette cohérence :
– une conception d'outils didactiques et pédagogiques qui répondent aux besoins des enseignants et des élèves ;
– une mise en œuvre qui n'implique pas de bouleversements des pratiques habituelles d'enseignement ;
– une formation des enseignants au cadre théorique auquel s'adosse le programme d'intervention.

• *Problématix* répond à ces différentes exigences. Il constitue en effet le prolongement de la recherche *AIR2* (**A**nalogies **I**ntuitives, **R**ecodage et **R**ésolution de problèmes), déployée dans plus de 150 classes d'école primaire entre 2020 et 2024. L'objectif de cette large étude a été d'évaluer les effets sur la réussite des élèves d'un apprentissage des notions mathématiques par la résolution de problèmes. Les enseignants se sont portés volontaires pour participer à cette étude et ont, dans ce cadre, bénéficié d'un module de formation continue (Rivier et Sander, 2023a) comprenant des apports théoriques et méthodologiques ainsi que des temps d'analyse de pratique et de retour sur expérience. Ils ont conduit les séances à partir de documents travaillés collectivement en amont de la mise en œuvre en classe. Dans une démarche de coconception, la structure des séances a été analysée et sa faisabilité évaluée, notamment compte tenu des divers contextes scolaires concernés. En outre, au fur et à mesure de l'avancée dans le dispositif, chaque enseignant participant a élaboré un document répertoriant des informations sur les adaptations et modifications apportées au déroulement, sur les obstacles rencontrés et sur les effets observés sur les apprentissages. L'ensemble de ces retours a permis aux chercheurs de faire évoluer le dispositif dans l'objectif de le rendre le plus en phase possible avec les besoins des élèves et des enseignants.

• Les résultats d'une étude ayant pour objectif de documenter les progrès d'élèves de CM1 et CM2 ayant suivi le programme AIR2 ont montré des progrès significatifs pour les quatre notions travaillées, et supérieurs à ceux observés dans des classes contrôles qui poursuivaient leur programme habituel (Rivier et Sander, 2022). Deux études conduites dans de nouvelles classes, dont les résultats détaillés sont encore en cours d'analyse, reproduisent ces résultats prometteurs. Cela suggère que l'effet bénéfique du dispositif *Problématix* sur les apprentissages mathématiques est pérenne. De plus, les enseignants ayant mis en œuvre les séances dans leur classe témoignent d'une évolution, notamment par le développement de compétences dans l'analyse des erreurs et dans le soutien qu'ils parviennent désormais à apporter dans les processus de compréhension et de représentation des énoncés mathématiques.

1. Nous avons, dans cet ouvrage, opté pour la forme neutre « enseignant » afin de faciliter la lecture. « Enseignant » fait ici référence aux personnes qui relèvent du corps enseignant, dans sa pluralité de genres.

2. Toutes les références bibliographiques sont à retrouver p. 203.

La résolution de problèmes : la représentation en soutien de la compréhension et de l'apprentissage

Résoudre un problème, ce n'est pas seulement lire et calculer

La résolution de problèmes[1] est une composante essentielle des apprentissages mathématiques. Trois dimensions la rendent indispensable à la conceptualisation mathématique, dont elle est à la fois ***moteur***, ***source*** et ***révélatrice***.

La résolution de problèmes : un moteur de la conceptualisation mathématique

Il s'agit d'un ***moteur***, car en se fixant comme objectif de résoudre un problème, l'élève engage une démarche visant à atteindre un but précis : répondre à la question posée. Cet objectif, soutenu par l'accompagnement de l'enseignant, pousse l'élève à s'impliquer, à s'interroger, à chercher, à explorer, à découvrir et à apprendre de ses impasses et de ses erreurs. Pour des élèves débutants comme pour des chercheurs professionnels, cette dimension constructive de la résolution de problèmes favorise le développement progressif d'une pensée mathématique.

La résolution de problèmes : une source de connexions entre connaissances personnelles et connaissances mathématiques

Les problèmes étant formulés en mots, leur résolution relève à la fois de la compréhension du langage et de celle des mathématiques. À travers un énoncé qui met en scène une situation-problème, l'élève tire parti de la diversité et de la richesse des connaissances acquises tout au long de sa vie. Ces connaissances familières peuvent servir de ***sources*** pour la construction de savoirs mathématiques qui rencontrent l'intuition de l'élève car elles s'appuient sur ses expériences. Ainsi, bien avant d'avoir étudié la division, un élève sait qu'il est courant de partager équitablement quelque chose dans diverses situations de la vie réelle. Ensuite, d'autres scénarios élaborés précisément dans cette perspective, pourront être introduits afin de l'aider à affiner sa compréhension de la division et à dépasser les limites de son approche initiale.

1. Nous parlons ici de problèmes à énoncés verbaux, c'est-à-dire reposant sur une description narrative d'une situation réelle ou hypothétique.

La résolution de problèmes : un révélateur des connaissances mathématiques

La troisième dimension, ***révélatrice***, est plus directement opérationnelle, applicative, liée à la mise en pratique. En effet, être capable de résoudre un problème dans le cadre scolaire signifie également réussir à mobiliser des connaissances mathématiques dans des contextes variés. À l'âge adulte, il s'agira de faire appel à des savoirs mathématiques pour trouver des solutions à des problèmes rencontrés dans la vie professionnelle et citoyenne. Plus cette dimension conduira à adopter un regard informé et à développer son esprit critique en appliquant des connaissances scientifiquement fondées, plus sera évité le recours à des raccourcis de pensée qui peuvent fourvoyer, par exemple lors de l'interprétation de données sous forme de statistiques.

S'engager pour découvrir, s'appuyer sur des connaissances extramathématiques pour développer des connaissances mathématiques, agir dans le monde de manière éclairée, sont ainsi trois bénéfices conjoints et précieux de la résolution de problèmes. Dans cette perspective, **l'objectif de cet ouvrage est de s'appuyer sur la résolution de problèmes pour approfondir la compréhension des quatre opérations arithmétiques**. À travers cet objectif, et en se centrant sur des problèmes pouvant se résoudre par une seule opération, c'est en fait la plupart des compétences attendues au cycle 3 dans les domaines « **Nombres et calculs** » et « **Grandeurs et mesures** » qui sont travaillées. Développer le sens des opérations arithmétiques est en effet essentiel pour être en mesure de maitriser les notions rencontrées au long de la scolarité, telles que, parmi celles déjà travaillées ou qui s'annoncent bientôt, les fractions, le raisonnement proportionnel, ou encore les premiers concepts algébriques.

Des défis d'apprentissage liés aux connaissances extramathématiques des élèves

La résolution d'un problème à énoncé repose sur la capacité de l'élève à construire une représentation mentale de la situation décrite. Pour résoudre le problème, les données fournies doivent être intégrées et mises en relation au sein de cette représentation mentale. Autrement dit, l'élève élabore une image de la situation présentée et s'en sert pour trouver la solution, un processus qui n'a rien d'évident. Depuis plusieurs décennies, il est en effet bien établi (Vergnaud, 1982[2]) que la difficulté d'un problème est influencée par les aspects langagiers et représentationnels de la tâche. Cela explique pourquoi des problèmes qui peuvent être résolus par les mêmes opérations arithmétiques peuvent pourtant varier grandement en termes de difficulté.

La résolution de problèmes mathématiques est influencée par 3 formes d'analogies avec des connaissances déjà acquises

La résolution d'un problème de mathématiques dépend donc de nombreux facteurs qui ne sont pas strictement mathématiques. Nos travaux récents (Rivier et Sander, sous presse ; Sander, 2018a, 2018b) ont conduit à développer le cadre AS3, qui identifie trois facteurs influençant la

2. Toutes les références bibliographiques sont à retrouver p. 203.

résolution des problèmes, constituant autant de leviers potentiels pour soutenir les apprentissages. Ces facteurs sont liés à trois formes d'analogies avec des connaissances acquises dans des contextes extra-scolaires ou scolaires : les analogies de ***substitution***, de ***scénario*** et de ***simulation***[3].

Pour comprendre les difficultés des élèves et proposer des pistes pour les surmonter à travers des séquences d'apprentissage adaptées, il est crucial de prendre en compte ces facteurs, car ceux-ci peuvent interférer avec les apprentissages.

En effet, à la lecture d'un énoncé, un élève construit une représentation de la situation en établissant des analogies reposant sur ses connaissances préalables. Ce processus intervient en priorité car il est cognitivement peu coûteux. Lorsque les connaissances préalables mobilisées conduisent au même résultat que la référence à la notion scolaire, ces analogies peuvent faciliter la découverte de la solution. On se situe alors à l'intérieur du domaine de validité de l'analogie. Cependant, dans de nombreux cas, les connaissances de la vie quotidienne qui sont mobilisées par l'élève ne permettent pas d'aboutir à des conclusions mathématiquement correctes. Hors de leur domaine de validité, ces analogies deviennent alors obstructives, rendant la résolution difficile et conduisant à des erreurs.

Apprendre à résoudre des problèmes discordants : un moyen d'apprentissage efficient

Néanmoins, ces situations où les analogies avec les connaissances quotidiennes créent des écarts par rapport aux notions mathématiques visées constituent de riches opportunités d'apprentissage que cet ouvrage entend mobiliser par le choix de situations-problèmes adaptées. En les intégrant dans des activités appropriées en classe et à l'aide d'outils adéquats, elles peuvent permettre de dépasser certaines idées restrictives issues de la vie quotidienne et de développer des connaissances véritablement mathématiques, prédisposant favorablement l'élève pour ses apprentissages ultérieurs.

Découvrons ces trois analogies en nous appuyant sur des exemples :

L'analogie de substitution : « additionner » n'est pas (seulement) « ajouter »

Joe avait 8 billes. Il a perdu 5 billes à la récréation. Combien de billes lui reste-t-il ?

Énoncé réussi par 100 % des élèves de 6 ans (d'après Riley et al., 1984).

Joe a 8 billes. Tom a 5 billes. Combien Tom a-t-il de billes de moins que Joe ?

Énoncé réussi par 22 % des élèves de 6 ans (*ibid*).

1. Taux de réussite au CP pour deux problèmes se résolvant par la même soustraction

3. D'où l'intitulé du cadre AS3 (A pour Analogie et S_3 pour chacune de ces trois formes ; substitution, scénario, simulation).

Ces deux taux de réussite montrent l'écart de performance pour des élèves de début de scolarité élémentaire entre deux énoncés se résolvant pourtant par la même opération de soustraction « 8 – 5 = 3 ». Bien que partageant la même structure arithmétique, ils présentent en effet des niveaux de difficulté très différents. Ces exemples permettent d'introduire une première forme d'analogie : l'***analogie de substitution***.

Définition

L'analogie de substitution fait appel au fait que chaque opération arithmétique est associée à une connaissance extramathématique issue de la vie quotidienne (Fischbein, 1989), qui vient se substituer à la notion scolaire dans l'esprit de l'élève. Ces analogies de substitution constituent les intuitions premières des notions. Elles ne sont en général pas spécifiquement induites par l'enseignement mais aussi par le langage et par la culture. Ainsi, il suffit d'ouvrir un dictionnaire et de prendre connaissance des définitions non mathématiques des termes « additionner », « soustraire », « multiplier » et « diviser » pour saisir que des significations extramathématiques leur sont attribuées. Chaque opération arithmétique se voit ainsi attachée à une analogie de substitution, directement applicable en termes d'action parce que fruit d'expériences concrètes répétées issues de la vie de tous les jours.

De cette manière :
– la notion de ***recherche du résultat d'un ajout*** se substitue à celle d'***addition*** ;
– la notion de ***recherche du résultat d'une perte*** se substitue à la notion de ***soustraction*** ;
– l'***ajout répété d'une quantité donnée*** se substitue à la notion de ***multiplication*** ;
– la ***recherche de la taille d'une part lors d'un partage équitable*** se substitue à la notion de ***division***.

Ajoutons qu'une caractéristique des analogies de substitution est de rester influentes chez les adultes, y compris les enseignants (Tirosh et Graeber, 1991).

Les analogies de substitution sont opérantes et concordent avec la notion mathématique à laquelle elles se substituent dans un ensemble considérable de situations. Les énoncés pour lesquels la référence à l'analogie de substitution conduit au même résultat que la référence à la notion scolaire sont qualifiés de **concordants**. Lorsque ce n'est pas le cas, ils sont qualifiés de **discordants** : l'analogie de substitution est alors obstructive pour la résolution.

Pourquoi proposer aux élèves de résoudre des problèmes mathématiques discordants sur le plan de la substitution ?

Le tableau suivant présente huit exemples d'énoncés, concordants pour la moitié d'entre eux et discordants pour l'autre moitié sur le plan de l'analogie de substitution, et les taux de réussite correspondants pour des élèves en 6e.

Énoncé	Opération	Réussite en 6e	Analogie de substitution
Dans mon camion, j'ai 43 kg de peinture et 344 kg de ciment. Combien y a-t-il de kilos de matériaux dans mon camion ?	Addition	75 %	Concordant
Sur la piste des nombres, mon pion est sur une case. Je recule de 36 cases. Maintenant, mon pion est sur la case 180. Sur quelle case mon pion était-il au début ?	Addition	60 %	**Discordant**
Jean avait 320 kg de blé dans son stock. Aujourd'hui, il a vendu 80 kg de blé. Combien de kilos de blé lui reste-t-il ?	Soustraction	78 %	Concordant

Énoncé	Opération	Réussite en 6e	Analogie de substitution
Sur la piste des nombres, mon pion est sur une case. J'avance de 44 cases. Maintenant, mon pion est sur la case 484. Sur quelle case mon pion était-il au début ?	Soustraction	68 %	**Discordant**
J'ai 126 cordes de 3 mètres chacune. Quelle longueur de corde ai-je au total ?	Multiplication	72 %	Concordant
Nina a 7 caisses et des pommes. Elle a 21 fois moins de caisses que de pommes. Combien a-t-elle de pommes ?	Multiplication	34 %	**Discordant**
Nous avons ramassé 150 kg de pommes. Nous les répartissons équitablement dans 25 caisses identiques. Combien de kilos de pommes y aura-t-il dans chaque caisse ?	Division	58 %	Concordant
Sandra a récolté 870 poires. Il y a 10 fois plus de poires que de paniers. Combien y a-t-il de paniers ?	Division	46 %	**Discordant**

2. Taux de réussite chez des élèves scolarisés en 6e selon l'opération en jeu et le caractère concordant/discordant sur le plan de l'analogie de substitution

Pour pouvoir considérer qu'une notion mathématique est acquise au-delà des seuls contextes conformes à l'analogie de substitution, il est important pour l'enseignant de s'assurer que l'élève est en mesure de résoudre non seulement des problèmes concordants mais aussi des **problèmes discordants :**
– il peut ainsi s'agir d'un problème d'addition dans lequel on recherche combien on avait au début, sachant combien on a perdu et combien il reste à la fin ;
– ou encore d'un problème de soustraction dans lequel on cherche combien a été gagné ;
– ou d'un problème de multiplication pour lequel on connait une quantité, le rapport de deux quantités et où l'on cherche l'autre quantité ;
– ou encore un problème de division dans lequel on cherche combien de fois une valeur est présente dans une autre.

Le fait de travailler des problèmes qui se situent hors des contextes de concordance est crucial pour que les élèves soient en mesure de décontextualiser leurs apprentissages et puissent développer une autonomie conceptuelle suffisante pour ne pas être tributaires uniquement de contextes spécifiques favorables. Pour cela, les séances d'apprentissage intègrent des énoncés présentant différentes formes de discordances de substitution (en contexte de transformation, combinaison et comparaison pour le champ additif ; en contexte de rapport et de quotition pour le champ multiplicatif), ce qui permettra également l'élaboration d'évaluations cohérentes avec l'apprentissage, visant à estimer précisément l'ampleur de la maitrise de chaque opération arithmétique.

L'analogie de scénario : les pommes et les oranges se multiplient et se divisent aussi entre elles

Une deuxième forme d'analogie, qualifiée d'***analogie de scénario***, influe sur le processus de résolution.

Définition

L'analogie de scénario renvoie à la structure sémantique, non mathématique, induite à partir des éléments situationnels qu'un énoncé comporte. Ces éléments situationnels (les objets présents, les relations qui existent entre eux, la thématique de l'énoncé, etc.) évoquent en effet des scénarios de la vie quotidienne, par exemple un scénario de distribution d'objets entre des individus lorsque des bonbons sont partagés entre des amis ou une relation de contenu à contenant lorsque des pommes sont dans des paniers. Ces scénarios peuvent être plus ou moins en concordance avec les opérations arithmétiques appropriées pour la résolution du problème : un scénario impliquant des contenants et des contenus, comme des vases et des fleurs, évoque une multiplication ou une division plutôt qu'une addition ou une soustraction.

On parle fréquemment « d'habillage » pour désigner ces éléments situationnels, ce qui présupposerait que ceux-ci n'interfèrent pas avec les notions mathématiques en jeu. Pourtant, Bassok, Chase et Martin (1998) ont montré que si l'on demande à des participants d'inventer des énoncés avec des entités de même nature (par exemple, des pommes et des poires qui appartiennent à la catégorie « fruits »), ce sont très majoritairement des problèmes à structure additive qui seront proposés avec une question du type « *Combien y a-t-il de fruits en tout ?* ». À l'inverse, si les entités nourrissent un lien de fonctionnalité (par exemple, des oranges et des paniers, ou des fleurs et des vases), les énoncés proposés auront essentiellement une structure multiplicative, avec des questions du type « *Quel est le nombre d'oranges par panier ?* » ou « *Combien y a-t-il de fleurs dans chaque vase ?* »

Lorsque la structure mathématique du problème est concordante avec la nature des liens entre les entités (objets de même nature pour le champ additif, relation fonctionnelle pour le champ multiplicatif), la résolution est facilitée.

En revanche, en cas de discordance, comme ce serait le cas avec une question telle que « *Combien y a-t-il de fois plus d'oranges que de pommes ?* » (éléments de même nature et champ multiplicatif pour la résolution), la difficulté de résolution du problème s'en trouve accrue. L'analogie de scénario est donc également un facteur d'influence sur le processus de résolution. Lorsque scénario et structure mathématique concordent, on ne peut déterminer, de l'une ou de l'autre, ce qui a présidé à la réussite de l'élève. A contrario, en l'absence de cette concordance, la réussite est un indicateur de la maitrise conceptuelle de la notion par l'élève. Les résultats d'une étude des énoncés proposés par les manuels scolaires de cycle 2 que nous avons menée (Rivier, Scheibling-Sève et Sander, 2022) mettent en évidence une proportion très élevée d'énoncés concordants pour le scénario, ce qui laisse supposer que ce levier de conceptualisation reste exploité de manière ténue.

Remarque :

L'analogie de scénario est dissociable de l'analogie de substitution. Prenons pour exemple l'énoncé : « *J'ai 3 pommes. J'échange chaque pomme contre 4 oranges. Combien est-ce que je reçois d'oranges ?* » Il est concordant sur le plan de l'analogie de substitution (addition répétée 3 fois de la

valeur 4), mais discordant sur le plan de l'analogie de scénario car les pommes et les oranges ne sont pas dans une relation fonctionnelle comme celle qui existe entre des oranges et des paniers.

Pourquoi proposer aux élèves de résoudre des problèmes mathématiques discordants sur le plan du scénario ?

Comme pour l'analogie de substitution, un élève qui résout avec succès des problèmes discordants sur le plan du scénario (tels que l'énoncé précédent d'échange entre pommes et oranges pour lequel la tendance des élèves est d'additionner) montre sa capacité à identifier que ce problème relève du champ multiplicatif. Par ailleurs, être en mesure de répondre à une question telle que « *Combien ai-je de fois plus d'oranges que de pommes ?* » fait partie des attentes scolaires du cycle 3. Il est donc essentiel que les élèves ne s'appuient pas uniquement sur des éléments situationnels pour décider de l'opération arithmétique à mobiliser mais développent une compréhension suffisante pour repérer les relations mathématiques en jeu.

Intégrer des activités d'enseignement et d'évaluation impliquant des énoncés discordants sur le plan du scénario est donc une voie essentielle pour favoriser une meilleure maitrise des notions. Cela permet également à l'enseignant de distinguer chez l'élève une maitrise apparente, qui se traduit par des réussites contextualisées, d'une expertise plus profonde, qui se traduit par une capacité de transfert à de nouveaux contextes.

L'analogie de simulation : résoudre sans solliciter la notion travaillée

Les énoncés peuvent également être analysés selon une troisième dimension, celle de l'***analogie de simulation***.

Définition

L'analogie de simulation renvoie à la possibilité ou non d'aboutir à la solution du problème en simulant mentalement la situation décrite par l'énoncé sans faire appel à l'opération supposément travaillée dans cet énoncé. Il s'agit cette fois de questionner plus en profondeur les valeurs numériques de l'énoncé, usuellement utilisées pour moduler la difficulté des problèmes proposés aux élèves.

Énoncés concordants sur le plan des analogies de substitution et du scénario	Taux de réussite	Analogie		
		Substitution	Scénario	Simulation
Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ?	75 %	Concordant	Concordant	Concordant
Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ?	0 %	Concordant	Concordant	**Discordant**

3. Taux de réussite (d'après Schliemann et al., 1998) chez des adolescents brésiliens non scolarisés de deux énoncés multiplicatifs

Le tableau 3 montre que deux énoncés, bien que concordants sur le plan des analogies de substitution (addition répétée) et de scénario (recherche du prix d'un achat groupé) et comportant les mêmes valeurs numériques peuvent être de difficulté très différente.

Dans le premier cas, la simulation mentale (« 50 + 50 + 50 ») conduit assez aisément à la solution, sans même qu'il soit nécessaire de faire appel à la multiplication ou à des propriétés de cette opération, telle que sa commutativité.

Dans le second cas, la simulation mentale correspondante (la valeur 3 additionnée 50 fois) mènerait à une impasse puisqu'elle est bien trop coûteuse cognitivement à réaliser. Pour résoudre ce dernier problème, il est nécessaire de s'appuyer sur la multiplication, ou au moins sur sa propriété de commutativité.

Pourquoi proposer aux élèves de résoudre des problèmes mathématiques discordants sur le plan de la simulation ?

Lorsque la simulation mentale mène à la solution sans coût calculatoire excessif, l'analogie de simulation facilite la résolution. Toutefois la réussite de l'élève n'est pas la preuve d'une compréhension de la notion mathématique travaillée si celui-ci a fait appel à un raccourci mental qui n'aurait pas fonctionné avec d'autres valeurs numériques. Ainsi il a été montré que parmi des élèves de CE2, le problème « *Léa a 29 billes. Elle en gagne. Maintenant elle a 32 billes. Combien de billes Léa a-t-elle gagnées ?* » est nettement mieux réussi que « *Léa a 3 billes. Elle en gagne. Maintenant elle a 32 billes. Combien de billes Léa a-t-elle gagnées ?* » car dans le premier cas, la stratégie qui consiste à aller mentalement de 29 à 32 : 30 (1), 31 (2), 32 (3) permet d'aboutir à la solution, sans mobiliser la soustraction, alors que pour l'énoncé suivant il faudrait faire mentalement : 4 (1), 5 (2), …, 32 (29) ce qui est bien trop coûteux (Brissiaud et Sander, 2010). Ainsi, lorsque la simulation mentale est trop coûteuse pour mener à la solution, l'énoncé est discordant sur le plan de l'analogie de simulation et l'élève doit faire appel aux opérations arithmétiques pour résoudre le problème. Sa réussite est alors un meilleur indicateur de sa compréhension de la notion mathématique travaillée.

Le cadre AS3 pour l'enseignement par la résolution de problèmes

Nous avons exposé ici qu'un lien existe entre les connaissances quotidiennes et les notions mathématiques. Les trois formes d'analogies décrites constituent des facteurs d'influence des processus de résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. Elles sont dissociables les unes des autres.

Analyser un énoncé à travers le cadre AS3 permet :
– de caractériser s'il est concordant ou discordant par rapport à chaque forme d'analogie ;
– d'identifier la nature des difficultés que cet énoncé peut présenter pour les élèves dans la perspective d'élaborer des activités en classe pour les travailler.

La combinaison entre ces trois formes d'analogies fait apparaître huit types de problèmes (Figure 1), les énoncés ccc étant les plus simples (ils sont concordants pour les trois formes d'analogies), les ddd les plus complexes (ils sont cette fois triplement discordants).

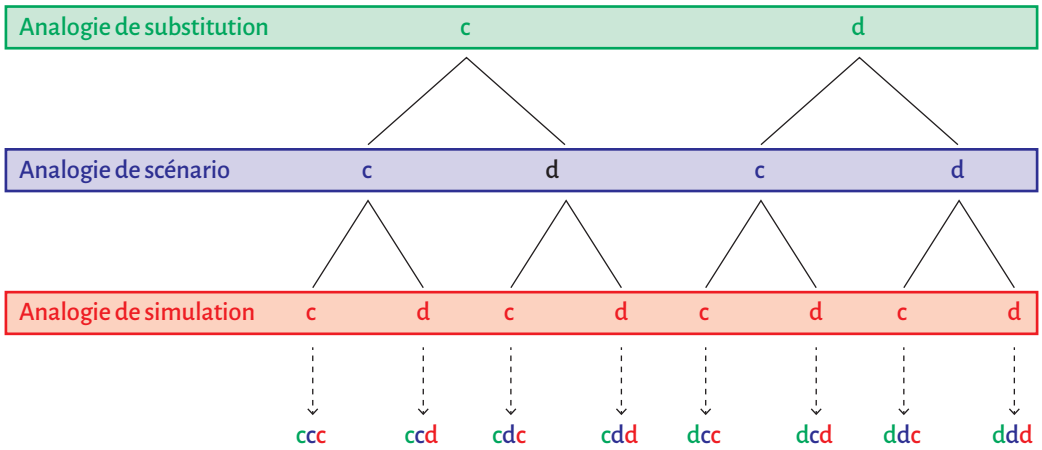


Figure 1. Arborescence des 8 catégories de problèmes selon leur concordance avec les analogies

À la lumière de ces constats, il parait pertinent d'inviter les enseignants à considérer le caractère concordant/discordant de chacune de ces trois analogies comme autant de variables didactiques et de veiller à proposer aux élèves des énoncés de chaque type pour chacune des opérations arithmétiques étudiées. Un objectif essentiel pour les apprentissages mathématiques est que les élèves parviennent à percevoir d'une manière pertinente sur le plan mathématique les énoncés discordants, ce qui requiert d'aller au-delà de leur représentation première.

L'enjeu est de favoriser le développement chez l'élève d'une compréhension non limitée au domaine de validité de l'analogie concernée (par exemple « Soustraire, c'est chercher le reste » ou « Multiplier, c'est additionner plusieurs fois »), et qui au contraire embrasse le maximum de situations concernées par la notion et permet d'en percevoir l'unité. Ainsi, pour la soustraction par exemple, des situations de recherche de la partie restante, du gain, de l'écart, de la valeur manquante, perçues initialement comme ayant pas ou peu de liens les unes avec les autres, en viennent à être considérées comme partageant la même structure mathématique.

Quels leviers pour aider les élèves à mieux se représenter les énoncés ?

Il est crucial d'accompagner les élèves dans l'évolution de leurs représentations pour couvrir le champ des situations possibles. Cela concerne les cas de discordance, qui peuvent être progressivement conçus par eux comme relevant également des notions mathématiques correspondantes. Pour cela, il est nécessaire de développer une compréhension repérant dans les situations les relations mathématiques pertinentes au-delà des discordances et fondant le choix d'une opération plutôt que d'une autre. Afin d'atteindre cet objectif, deux manières de faire, en parallèle pour se nourrir l'une l'autre, sont principalement adoptées dans cet ouvrage.

Favoriser le rapprochement de situations qui semblent différentes

La première est de favoriser le rapprochement dans l'esprit de l'élève entre des situations qui spontanément sont perçues comme de nature différente. Il s'agit donc de rendre visibles des liens qui originellement ne sont pas perçus. Cette activité est qualifiée de « recodage sémantique » (Gros *et al.*, 2020) car elle conduit l'élève à faire évoluer sa compréhension initiale de la situation-problème vers une autre qu'il n'aurait pas adoptée spontanément mais qui serait plus pertinente sur le plan mathématique. Ainsi, une situation multiplicative d'échange va être reformulée dans des termes analogues à une situation pour laquelle le lien multiplicatif est d'habitude porté par une relation fonctionnelle, comme des objets répartis dans des contenants.

Exemple : Si on se demande « *Combien y a-t-il d'oranges par panier ?* » dans une situation où il y a des oranges dans des paniers, alors il est aussi envisageable de se demander « *Combien y a-t-il d'oranges par pomme ?* » dans une situation où des oranges sont échangées contre des pommes. Le défi pédagogique sera d'accompagner l'élève au-delà de l'idée spontanée que seules les relations fonctionnelles portent les situations multiplicatives. Plusieurs activités de *Problématix* sont destinées à favoriser le franchissement de ces frontières rarement explorées et qui ouvrent la possibilité d'envisager des relations mathématiques sollicitées dans d'autres contextes, par exemple lors de raisonnements proportionnels et de résolution de certains problèmes de fractions.

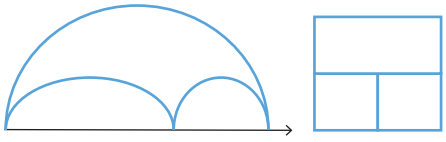
Par les activités de « recodage sémantique », l'élève apprend à abstraire des relations mathématiques et à ne pas se cantonner aux simples indices situationnels. Proposer de tels énoncés permet à l'élève de décontextualiser ses apprentissages et de transférer à bon escient les connaissances apprises.

S'appuyer sur des schémas qui modélisent la situation

La seconde est de s'appuyer sur des outils de modélisation, sous forme de schémas, pour favoriser ce « recodage ». En effet, de nombreuses recherches ont montré que l'usage de schémas permet de faire apparaitre visuellement les relations mathématiques présentes dans la situation concernée (Fischer et al., 2017 ; Gvozdic et Sander, 2020 ; Scheibling-Sève et al., 2022 ; Sensevy, 2021).

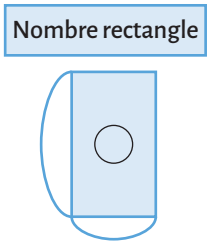
Trois schémas sont privilégiés dans *Problématix* :
– deux pour les relations additives, la Boite à nombres et le Schéma-ligne ;
– un pour les relations multiplicatives.

Boite à nombres et Schéma-ligne permettent d'indiquer les valeurs présentes dans les problèmes ainsi que ce qui est recherché en faisant apparaitre les relations de type « partie-tout » (la totalité est composée de parties).



La Boite à nombres est destinée à rendre saillante la facette cardinale des nombres en jeu et le Schéma-ligne leur facette ordinale (voir p. 19).

Pour ce qui est des relations multiplicatives, le Nombre rectangle offre l'intérêt de ne pas présenter la multiplication comme une simple addition répétée, mais comme le produit de deux facteurs, qui se représente comme la surface d'un rectangle dont chacun des facteurs constitue un côté.



Cette schématisation figure la commutativité de la multiplication de manière assez explicite, de même que la relation inverse entre multiplication et division (Sander et al. 2022).

Les propriétés plus précises de ces outils et la manière dont ils sont impliqués dans *Problématix* sont détaillées page 19.

Le dispositif d'apprentissage Problématix

Le dispositif d'apprentissage *Problématix* est composé de 42 séances, conçues de manière à travailler spécifiquement la diversité des types d'énoncés que l'élève est susceptible de rencontrer pour chaque opération mathématique. Une fois qu'un nouveau type d'énoncé est travaillé, c'est-à-dire un type d'énoncé présentant une difficulté nouvelle, il sera à nouveau proposé lors des séances suivantes, selon une progression spiralaire.

À quel moment de l'année démarrer Problématix *?*

Les quatre opérations arithmétiques travaillées par *Problématix* ne sont pas nouvelles pour les élèves. La progression pédagogique proposée peut donc débuter à tout moment de l'année scolaire. Toutefois, pour conduire l'ensemble des 42 séances durant l'année scolaire, il est préférable de débuter cette progression dès que possible et dans la première moitié de l'année.

À quel rythme conduire les séances ?

Il est conseillé de programmer au moins deux séances *Problématix* par semaine de classe. Le programme s'étend alors au plus sur 21 semaines. Il est aussi possible d'intensifier à certains moments de l'année si l'enseignant estime que cela est adapté à l'avancée de la classe.

Avec Problématix*, sur combien d'énoncés un élève peut-il travailler la résolution de problèmes ?*

L'ouvrage propose :

– un premier ensemble de 168 énoncés, répartis en 14 séries de 12 énoncés ;
– un second ensemble de 168 énoncés, toujours sous la forme de 14 séries de 12 énoncés, avec cette fois un champ numérique supérieur à celui du premier corpus et davantage d'énoncés impliquant des grandeurs ;
– 14 activités métacognitives qui s'insèrent entre les séances de résolution de problèmes afin de consolider les compétences développées.

La présence de deux corpus d'énoncés favorise une mise en œuvre adaptée à différentes configurations de classe, notamment les cas de :

– classe à niveau simple (CM1 ou CM2) avec une possibilité de différenciation ;
– classe à double niveau CM1-CM2 ;
– deux années successives de mise en œuvre.

Pourquoi les notions d'une part d'addition et de soustraction, et d'autre part de multiplication et de division, sont-elles travaillées en parallèle plutôt que successivement ?

Travailler de manière concomitante les opérations réciproques que sont d'une part l'addition et la soustraction, et d'autre part la multiplication et la division a un double objectif. Il s'agit

La progression pédagogique

Séances	Intitulés des séances
Séances 1 et 2	Découvrir, s'approprier et utiliser les outils de modélisation des situations additives et soustractives : le Schéma-ligne et la Boite à nombres
Séance 3	Activité intercalaire métacognitive : associer schéma et calcul
Séances 4 et 5	Résoudre des problèmes additifs de comparaison : compréhension des expressions « de plus » et « de moins »
Séance 6	Activité intercalaire métacognitive : associer schéma et énoncé
Séances 7 et 8	Résoudre des problèmes soustractifs de comparaison : compréhension des expressions « de plus » et « de moins »
Séance 9	Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution
Séances 10 et 11	Découvrir et s'approprier le nombre rectangle : outil de modélisation des situations de multiplication et de division
Séance 12	Activité intercalaire métacognitive : associer schéma et calcul
Séances 13 et 14	Résoudre des problèmes additifs de comparaison à scénarios discordants
Séance 15	Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution
Séances 16 et 17	Résoudre des problèmes multiplicatifs de comparaison : compréhension de l'expression « fois plus »
Séance 18	Activité intercalaire métacognitive : vrai ou faux ?
Séances 19 et 20	Résoudre des problèmes divisifs de comparaison : compréhension de l'expression « fois moins »
Séance 21	Activité intercalaire métacognitive : créer un énoncé multiplicatif
Séances 22 et 23	Résoudre des problèmes soustractifs de comparaison à scénario atypique (discordant)
Séance 24	Activité intercalaire métacognitive : trier des énoncés
Séances 25 et 26	Résoudre des problèmes multiplicatifs à scénario atypique (discordant)
Séance 27	Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution
Séances 28 et 29	Résoudre des problèmes divisifs à scénario atypique (discordant)
Séance 30	Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et calcul
Séances 31 et 32	Résoudre des problèmes additifs de transformation
Séance 33	Activité intercalaire métacognitive : créer un énoncé additif
Séances 34 et 35	Résoudre des problèmes multiplicatifs de comparaison avec emploi de l'expression « de moins »
Séance 36	Activité intercalaire métacognitive : associer énoncé et résolution
Séances 37 et 38	Résoudre des problèmes soustractifs de transformation
Séance 39	Activité intercalaire métacognitive : formuler la question
Séances 40 et 41	Résoudre des problèmes divisifs de comparaison avec emploi de l'expression « fois plus »
Séance 42	Activité intercalaire métacognitive : créer un énoncé divisif

Séances 1 et 2

Découvrir, s'approprier et utiliser les outils de modélisation des situations additives et soustractives : le Schéma-ligne et la Boite à nombres

Exemple 1 : Pour faire un collier, j'ai enfilé 120 perles sur mon fil. J'enfile encore 30 perles. Combien de perles mon collier a-t-il maintenant ?

Exemple 2 : Au départ du train, 150 voyageurs se sont installés. Au premier arrêt, 40 voyageurs descendent. Combien reste-t-il de voyageurs dans le train ?

Les caractéristiques des séances 1 et 2

- Ces deux premières séances proposent la résolution de problèmes dont la compréhension est directement accessible à tous les élèves.
- L'enjeu principal de ces deux premières séances concerne l'apprentissage de la modélisation des situations additives et soustractives avec le Schéma-ligne et la Boite à nombres.
- Une vigilance particulière sera accordée aux schémas tracés par les élèves et à la signification qu'ils attribuent à chacun des éléments de ces schémas afin de favoriser leur maitrise de ces outils et leur mobilisation à bon escient lors de résolution de problèmes.
- Les élèves s'entrainent progressivement à désigner sous forme de longueurs (schéma-ligne) les quantités de l'énoncé, associées à leur unité, et à identifier les relations mathématiques qui les lient.
- Les termes de ***partie*** et de ***tout*** sont introduits et leur emploi est encouragé dès ces premières séances pour tout énoncé relevant du champ additif.
- Les séances 1 et 2 instaurent les rituels de résolution qui resteront en vigueur sur l'ensemble des séances de *Problématix*.

Matériel

- La présentation des outils de modélisation (Schéma-ligne et Boite à nombres) prévoit l'utilisation de cubes emboitables afin de faciliter la compréhension de ces représentations abstraites. Il est conseillé que l'enseignant garde à disposition une collection de cubes de deux couleurs afin de construire des barres représentant les valeurs numériques des énoncés. Pour les énoncés 1 et 2, prévoir deux barres de longueurs différentes.

Les énoncés des séances 1 et 2

	Énoncés des séances 1 et 2	opération	type AS3[1]
1	Pour faire un collier, j'ai enfilé 50 perles sur mon fil. J'enfile encore 30 perles. Combien de perles mon collier a-t-il maintenant ?	Add.	ccd
2	Au départ du train, 90 voyageurs sont installés. Au premier arrêt, 20 voyageurs descendent. Combien reste-t-il de voyageurs dans le train ?	Soustr.	ccd
3	Lila a 60 billes bleues et 26 billes rouges. Combien a-t-elle de billes ?	Add.	ccd
4	Pour préparer la salade de fruits, le cuisinier a coupé 50 pommes et 35 kiwis. Combien a-t-il coupé de fruits ?	Add.	ccd
5	J'avais 200 balles dans mon panier avant mon cours de tennis. J'ai lancé 75 balles pendant le cours. Combien de balles reste-t-il dans le panier ?	Soustr.	ccd
6	Dans la volière, il y avait 174 oiseaux. La porte est restée ouverte et 52 oiseaux se sont envolés. Combien reste-t-il d'oiseaux dans la volière ?	Soustr.	ccd
7	Ce matin, Matis et ses amis ont construit 58 tours de cubes. Ils ont construit encore 34 tours de cubes cet après-midi. Combien ont-ils construit de tours de cubes aujourd'hui ?	Add.	ccd
8	Le cuisinier a préparé 137 crêpes. Il a vendu 66 crêpes. Combien de crêpes lui reste-t-il ?	Soustr.	ccd
9	Julie a 105 timbres. Au bureau de poste, elle en achète encore 40. Combien a-t-elle de timbres maintenant ?	Add.	ccd
10	Sur mon arbre, il y avait 328 pommes. J'en ai cueilli 123. Combien reste-t-il de pommes sur l'arbre maintenant ?	Soustr.	ccd
11	Sur la guirlande du jardin, il y avait 230 ampoules. On a enlevé 80 ampoules qui sont cassées et ne s'allument plus. Combien d'ampoules reste-t-il sur la guirlande ?	Soustr.	ccd
12	Sur le lac, il y a 72 bouées jaunes et 114 bouées rouges. Combien y a-t-il de bouées sur le lac ?	Add.	ccd

Énoncés additifs :

- **Énoncé 1 :** *Pour faire un collier, j'ai enfilé 50 perles sur mon fil. J'enfile encore 30 perles. Combien de perles a mon collier maintenant ?*
  - Énoncé de transformation avec recherche de la valeur du tout, ce qui est conforme à la conception intuitive de l'addition « Additionner, c'est ajouter ».

1. Cette colonne présente pour chacune des trois analogies du cadre AS3 les caractéristiques de chaque énoncé de la séance selon le critère de concordance (indiqué c) et de discordance (indiqué d) (cf. introduction p. 9). Ainsi, pour le premier énoncé, indiqué ccd, cela signifie qu'il est concordant pour la substitution, concordant pour le scénario et discordant pour la simulation mentale. La présentation de ces caractéristiques des énoncés permet de situer les facteurs de difficulté et facilite l'anticipation des erreurs des élèves et donc des régulations à envisager. Les trois codes sont indiqués systématiquement dans le même ordre : d'abord substitution, puis scénario et enfin simulation mentale (cf. figure 1 p. 14).

– Scénario familier.
– Non simulable mentalement donc nécessite la mise en œuvre d'un calcul : ajouter 30, unité par unité (51, 52, 53, …, 79, 80) est trop coûteux pour être réalisé mentalement. Néanmoins, le calcul (50 + 30) ne présente pas de difficulté.
– Cet énoncé ne présente pas d'obstacles de compréhension.
– Solution : 50 + 30 = ***80*** ou 30 + 50 = ***80***

• Les énoncés 7 (solution : 58 + 34 = ***92***) et 9 (solution : 105 + 40 = ***145***) ont des caractéristiques similaires à celles de l'énoncé 1.

• Les énoncés 3, 4 et 12 sont des énoncés de combinaison avec recherche de la valeur du tout, conformes eux aussi à la conception intuitive de l'addition. Leurs scénarios sont familiers et leur résolution nécessite un calcul non simulable mentalement. Ils ne présentent pas d'obstacles particuliers de compréhension.

Solutions :

– Énoncé 3 : 60 + 26 = ***86*** ou 26 + 60 = ***86***[1]
– Énoncé 4 : 50 + 35 = ***85*** ou 35 + 50 = ***85***[1]
– Énoncé 12 : 72 + 114 = ***186*** ou 114 + 72 = ***186***[1]

Énoncés soustractifs :

• **Énoncé 2 :** *Au départ du train, 90 voyageurs sont installés. Au premier arrêt, 20 voyageurs descendent. Combien reste-t-il de voyageurs dans le train lorsqu'il quitte son arrêt ?*

– Énoncé de transformation avec recherche de la valeur de la partie restante, ce qui est conforme à la conception intuitive de la soustraction « Soustraire, c'est retirer et chercher le reste ».
– Scénario familier.
– Non simulable mentalement donc nécessite la mise en œuvre d'un calcul : retirer 20, unité par unité, n'est pas accessible mentalement. Néanmoins, le calcul ne présente pas de difficulté.
– Cet énoncé ne présente pas d'obstacles particuliers de compréhension.
– Solution : 90 – 20 = ***70***[2]

• Les 5 autres énoncés soustractifs ont des caractéristiques similaires à celles de l'énoncé 2.

Solutions :

– Énoncé 5 : 200 – 75 = ***125***[2]
– Énoncé 6 : 174 – 52 = ***122***[2]
– Énoncé 8 : 137 – 66 = ***71***[2]
– Énoncé 10 : 328 – 123 = ***105***[2]
– Énoncé 11 : 230 – 80 = ***150***[2]

---

1. Pour tous les énoncés de l'ouvrage avec recherche du tout, ces deux écritures sont valides. Elles permettent de mettre en évidence la propriété de commutativité de l'addition.

2. Pour tous les énoncés de l'ouvrage avec recherche d'une partie, les écritures soustractives comme les écritures sous forme d'addition lacunaire (par exemple pour l'énoncé 1 : 20 + 70 = 90) sont valides. Dans certains cas, il est intéressant pour l'apprentissage de montrer que ces deux écritures sont équivalentes et que, selon les valeurs numériques, l'une ou l'autre facilite l'établissement du résultat. Dans le cas des 6 énoncés de cette séance, il s'agit de l'écriture soustractive. Lorsque la différence entre partie et tout peut être trouvée pas à pas (cas de simulation mentale), l'écriture lacunaire est moins coûteuse (par exemple 79 + 3 = 82).

séance 1

Les énoncés 1 et 2

1 Présentation des objectifs (5 min)

a. Objectif général de la séquence

• Dire par exemple :

Nous commençons aujourd'hui un travail en mathématiques sur la résolution de problèmes. Lorsqu'on lit un énoncé de problème, on cherche à comprendre l'histoire qui est racontée de manière à trouver quel calcul permet de trouver la solution. Certains problèmes sont particulièrement difficiles à comprendre. Dans ce cas, soit on n'arrive pas à trouver quelle opération faire, soit on se trompe d'opération.
Le travail que nous allons faire à partir d'aujourd'hui en résolution de problèmes va permettre de mieux comprendre ces énoncés difficiles et donc de les résoudre.

b. Objectif spécifique des séances 1 et 2

• Dire par exemple :

Aujourd'hui, je vais vous proposer de résoudre des problèmes qui ne sont pas difficiles à comprendre. J'ai choisi des énoncés plutôt faciles parce que notre objectif aujourd'hui est d'apprendre une nouvelle manière de chercher la solution à un problème.

2 Résolution de l'énoncé 1 (20 min)

a. Modélisation de la situation : découverte du Schéma-ligne et de la Boite à nombres

• Afficher l'énoncé 1 au tableau :

> Pour faire un collier, j'ai enfilé 50 perles sur mon fil. J'enfile encore 30 perles.
>
> Combien de perles a mon collier maintenant ?

Séances 1 et 2

• Lire ou faire lire l'énoncé à voix haute.

• Interroger les élèves pour vérifier que ce problème ne présente pas pour eux de difficulté particulière, qu'il n'y a pas d'obstacle à sa compréhension.

C'est donc un problème facile à comprendre et à résoudre. Vous n'avez pas besoin d'aide pour le comprendre et le résoudre mais dans les séances qui vont suivre, les énoncés seront plus difficiles.

• Modélisations simultanées de la situation avec les cubes emboitables (2 barres de cubes de longueurs et de couleurs différentes), le Schéma-ligne et la Boite à nombres :

J'ai utilisé les cubes pour représenter la situation.

• Montrer la grande barre de cubes.

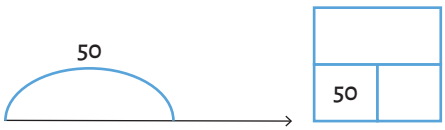
Il n'est pas nécessaire que cette barre soit composée de 50 cubes. Il s'agit de faire comprendre aux élèves que la longueur de cette barre représente 50 objets.

Voici le collier : au début, il a 50 perles.

• Tracer une ligne orientée de la gauche vers la droite et une Boite à nombres vide.

• Tracer un arc (ou pont) à partir de l'origine de la ligne orientée. Inscrire « 50 » au-dessus.

• Écrire « 50 » dans une des deux petites cases (parties du tout) de la Boite à nombres.



• Parcourir du doigt la longueur de ligne qui représente les 50 perles qu'il y a au début sur le fil.

Voici les 50 perles du collier.

• Parcourir du doigt l'arc de 50.

J'ai tracé cet arc (ou pont) et écrit « 50 » au-dessus pour représenter ces 50 perles.

• Montrer la case « 50 » de la Boite à nombres.

J'ai inscrit « 50 » ici. 50 perles, c'est une ***partie*** des perles du collier.
Le problème dit que j'ai 50 perles sur le fil et qu'ensuite, j'enfile encore 30 perles.

Le mot « partie » est ici utilisé pour la première fois. Il est important que les élèves l'emploient systématiquement pour désigner certaines valeurs de l'énoncé et ce qui est recherché dans le cas des énoncés du champ additif (addition et soustraction).

• Montrer la petite barre de cubes et l'emboiter à la suite de la barre initiale.

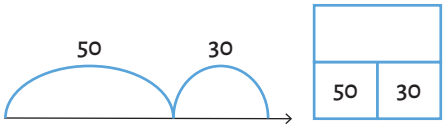
Comme précédemment, il n'est pas nécessaire que cette barre soit composée de 30 cubes. Il est par contre important que cette barre soit d'une longueur visiblement inférieure à la première.

Voici les 30 perles que j'enfile à la suite des 50 premières.

• Tracer un arc (ou pont) strictement à la suite de l'arc de 50 et inscrire « 30 » au-dessus.

• Écrire « 30 » dans la seconde petite case (autre partie composant le tout) de la Boite à nombres.

• Parcourir du doigt la longueur de ligne qui représente les 30 perles qui ont été ajoutées.



Voici les 30 perles qui ont été enfilées à la suite des 50 premières perles.

• Parcourir du doigt l'arc de 30.

J'ai tracé cet arc (ou pont) et écrit « 30 » au-dessus pour représenter ces 30 perles.

• Montrer la case « 30 » de la Boite à nombres.

J'ai inscrit « 30 » ici. 30 perles, c'est l'autre ***partie*** des perles du collier, celles qui ont été enfilées à la suite.

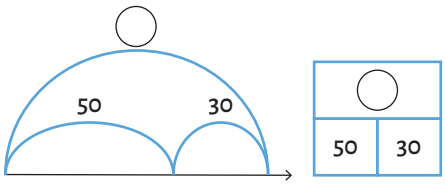
• Tracer un arc englobant strictement les deux premiers et tracer un petit cercle au-dessus pour matérialiser la quantité sur laquelle porte la question.

Il est important de tracer ces trois arcs en utilisant une couleur identique de manière à ce que les élèves n'attribuent pas une signification particulière à ces couleurs. De nombreux énoncés impliquant des objets colorés (par exemple, cubes bleus et rouges), utiliser des couleurs différentes sur le schéma pourrait prêter à confusion. Veiller à ce que le petit cercle, qui symbolise ce qui est recherché, ne puisse être confondu avec le symbole numérique zéro « 0 ». Au besoin, préciser.

• Pour la même raison, tracer un petit cercle dans la grande case de la Boite à nombres.

• Montrer la barre complète de cubes, composée de deux longueurs successives.

• Parcourir du doigt la longueur de ligne qui représente l'ensemble des perles.



Voici toutes les perles du collier.

• Parcourir du doigt le grand arc.

J'ai tracé cet arc (ou pont) au-dessus pour représenter toutes les perles du collier. Le collier est composé de deux parties, une partie de 50 perles et une partie de 30 perles. Ce que l'on cherche dans ce problème, c'est combien il y a de perles en tout. Je trace un petit cercle pour montrer sur quelle quantité porte la question. C'est ici que j'inscrirai la solution.

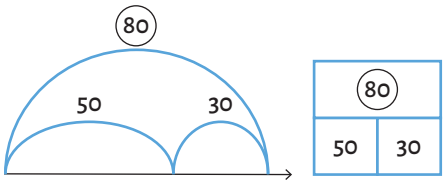
• Montrer la grande case de la Boite à nombres.

J'ai tracé un cercle dans cette grande case. C'est la case du ***tout***.
Ce « tout » est composé de deux parties : la partie des perles qu'on a au début, c'est-à-dire 50 perles et la partie des perles que l'on a ajoutées, c'est-à-dire 30 perles.
À votre avis, que reste-t-il à faire pour compléter ces schémas ?

Le mot « tout » est ici utilisé pour la première fois. Il est important que les élèves l'emploient systématiquement dans le cas des énoncés du champ additif (addition ou soustraction).

• Les élèves répondent :

Il faut effectuer le calcul du tout : 50 + 30.

• Inscrire 80 dans les deux cercles.

• Désigner le premier schéma et expliquer qu'il sera appelé « Schéma-ligne ».