J'apprends les maths CE2

Livre du maitre

Sous la direction de
RÉMI BRISSIAUD
Maitre de conférences de psychologie expérimentale

ANDRÉ OUZOULIAS
Professeur agrégé

FRANÇOIS LELIÈVRE
Professeur des écoles

PIERRE CLERC
Instituteur

RETZ
www.editions-retz.com
9 bis, rue Abel Hovelacque
75013 Paris

Sommaire

ISBN : 978-2-7256-3479-1

Direction éditoriale : Céline Lorcher
Correction : Gérard Tassi
Maquette : Anne-Danielle Naname
Mise en page : STDI
Illustrations : Guillaume Trannoy
Photos : Shutterstock

N° de projet : 10219633
Dépôt légal : juin 2016
Achevé d'imprimer en France en juin 2016
sur les presses de l'imprimerie Jouve, 53100 Mayenne.

MIXTE
Papier issu de sources responsables
FSC® C022030

Présentation

Depuis l'édition précédente de *J'apprends les maths CE2*, de nouveaux programmes pour la rentrée 2016 ont été publiés et une Conférence de consensus, qui s'est tenue en 2015, a émis des recommandations concernant les apprentissages numériques à l'école élémentaire. Les choix didactiques de la collection, et notamment ceux de *J'apprends les maths CE2*, s'en sont trouvés confortés. C'est pourquoi les trois chapitres de cette présentation sont restés inchangés. On y trouve en effet l'explication des évolutions récentes*. Examinons les principaux choix didactiques nouvellement apparus dans le programme :

- Dans le programme 2016, il est recommandé au CE2 de n'étudier les nombres que jusqu'à 10 000. La justification avancée est la suivante : « l'absence de mot spécifique pour désigner le groupement suivant correspondant à 10 000 (explique) ce palier ». La précédente édition de *J'apprends les maths CE2* avait anticipé cette recommandation en n'abordant les nombres au-delà de 10 000 que dans la dernière leçon. Il a suffi d'enlever cette séquence pour que l'ouvrage soit conforme au programme. (Voir, dans le chapitre 1, la section : « Comprendre l'écriture des nombres ».)
- La Conférence de consensus a souligné que « le calcul mental et le calcul en ligne doivent être privilégiés par rapport au calcul posé » et qu'ils « devraient être travaillés avant le calcul posé ». Or, dès sa 1re édition, *J'apprends les maths CE2* a fait de l'accès au calcul mental et au calcul écrit en ligne des objectifs prioritaires. C'est ainsi que dans *J'apprends les maths CE2*, au sein de chaque période, l'apprentissage des stratégies de calcul mental et de calcul en ligne pour une opération donnée est privilégié avant d'aborder, dans la période suivante en général, la technique écrite de cette opération (voir le chapitre 1 de la présentation).
- Dans le nouveau programme, il est spécifié qu'en fin de cycle, les élèves doivent savoir « obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne par un nombre à 1 chiffre et par des nombres comme 10, 25, 50, 100 ». Ce dernier objectif est justifié du fait que des divisions telles que 132 : 10 ? sont très simples et qu'elles aident les élèves à

* On en trouve une explication plus théorique dans trois textes :

Brissiaud, R. (2002). Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques, *in* J. Bideaud & H. Lehalle (Eds), *Traité des sciences cognitives – Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291, Paris, Hermes.

Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic Word Problem Solving : a Situation Strategy First Framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-107.

Brissiaud, R. (à paraitre). Situations, interprétation, stratégies et conceptualisation : le cas des opérations arithmétiques. *Numéro spécial du Bulletin de Psychologie* en hommage à Jean-François Richard.

comprendre l'écriture décimale des nombres. Or *J'apprends les maths CE2* est la seule collection à avoir, dès sa 1re édition, traité l'ensemble de ces divisions dès le CE2. (Voir le chapitre 2 de la présentation.)

- La Conférence de consensus a également rappelé que les enfants, s'ils n'allaient pas à l'école, apprendraient quand même à résoudre de nombreux problèmes. Ils le feraient à l'aide de leurs connaissances quotidiennes de la signification des verbes *ajouter*, *retirer*, *partager*, de leur connaissance de la signification du mot *fois*, de l'expression *de plus*, etc. En revanche, en l'absence de scolarisation, ils échoueraient massivement aux problèmes qui nécessitent l'usage de propriétés dites conceptuelles (on qualifie ainsi, par exemple, la propriété de la division qui autorise à reformuler cette opération sous la forme : « *a* partagé en *b* » ou encore « en *a* combien de fois *b* ? » Or, cette édition de *J'apprends les maths CE2*, comme la précédente, consolide les connaissances quotidiennes des élèves (la réussite des plus fragiles en dépend) et elle fait de la rencontre avec les propriétés conceptuelles de la soustraction, de la multiplication et de la division un évènement dans leur vie d'écolier. C'est l'un des moyens les plus surs pour que les élèves comprennent ces opérations arithmétiques. (Voir dans le chapitre 1 la section « Les 2 faces de la compréhension des opérations arithmétiques.)

Quatre nouveautés sont introduites dans cette édition :

1°) La place plus importante qui est accordée aux opérations « à trous », ce qui favorise le lien entre l'addition et la soustraction et entre la multiplication et la division.

2°) L'utilisation de la droite numérique pour enseigner le calcul mental « en avançant » et « en reculant » d'une soustraction, alors qu'au CE1 les élèves utilisaient une file de boites de Picbille.

3°) Un usage des « unités de numération » : centaines (c), dizaines (d) et unités (u), dans des exercices du type « 23 d + 13 u = ? », afin de consolider la compréhension de l'écriture décimale des nombres.

4°) On insiste plus sur le fait que le dm est une centaine de mm et le cm une dizaine de mm pour mieux faire le lien entre la mesure et la numération décimale.

Par ailleurs, parmi toutes les techniques existantes de la soustraction en colonnes, nous avons choisi, au CE2, d'enseigner celle où l'on gère la retenue en ajoutant 10 (ou 100) aux deux termes. C'est celle que les élèves devront utiliser pour faire des divisions par des nombres à 2 chiffres sans trop de surchages graphiques, et il est temps, au CE2, de l'adopter.

Rémi Brissiaud

Chapitre 1

Progresser en arithmétique élémentaire : le calcul mental pour résoudre des problèmes, comprendre et mémoriser

Les 3 sortes de connaissances en arithmétique élémentaire, le rôle central du calcul mental

Être compétent en arithmétique élémentaire, c'est savoir mobiliser ses connaissances arithmétiques pour résoudre des problèmes arithmétiques variés. La question se pose évidemment de préciser la nature de ces connaissances. Or, il est classique de distinguer :
1°) La connaissance de relations numériques (on parle aussi de « savoir que… ») : savoir que « neuf plus quatre égale treize » ; savoir que « quatre fois huit, trente-deux », par exemple.
2°) La connaissance de procédures (on parle aussi de savoir-faire) telles que : savoir compter, savoir mettre en œuvre des stratégies de calcul mental, savoir poser et exécuter les opérations arithmétiques…

Les chercheurs et pédagogues anglophones distinguent une troisième sorte de connaissances, qu'il ne faut pas mettre sur le même plan que les autres parce que c'est en créant des liens entre diverses relations numériques et diverses procédures qu'on y accède : elles sont qualifiées de « conceptuelles ».

Voici un exemple de définition de ces connaissances[1] :
« *conceptual knowledge is defined as implicit or explicit understanding of the principles governing a domain.* »

Ainsi, le mot « conceptuel » renvoie-t-il à l'idée de « compréhension » (*understanding*). L'un des principaux objectifs de ce chapitre sera évidemment d'essayer de préciser ce que sont ces « connaissances conceptuelles » ou encore d'essayer de préciser ce que signifie comprendre une opération comme la multiplication, la soustraction ou la division euclidienne, ou encore ce que signifie comprendre un nombre tel que 236, par exemple.

C'est à cette distinction de trois sortes de connaissances (procédures, relations numériques et connaissances conceptuelles) que se réfèrent, par exemple, les chercheurs d'une commission du département de l'Éducation des USA[2] qui étaient récemment chargés de rédiger une synthèse des connaissances disponibles concernant les apprentissages arithmétiques à l'école. Ils insistent sur le fait que :

Comprendre les opérations arithmétiques, disposer de procédures de calcul automatisées et avoir bien mémorisé les principales relations numériques sont les trois ingrédients qui, ensemble, participent à la formation de la compétence en résolution de problèmes[3].

Mais a-t-on vraiment progressé lorsqu'on a défini ainsi la compétence à résoudre des problèmes d'arithmétique élémentaire ? En effet, tout le monde sera vraisemblablement d'accord avec le fait que celle-ci résulte à la fois de l'appropriation de procédures, de la mémorisation de relations numériques et de la compréhension ; en revanche, la façon dont on conçoit l'articulation entre ces différents facteurs est plus problématique. Or, c'est évidemment la question cruciale.

Penser l'articulation entre ces différentes connaissances

On remarquera que les chercheurs américains, lorsqu'ils énumèrent les diverses connaissances qui fondent la compétence en résolution de problèmes arithmétiques, commencent par « *conceptual understanding of operations* ». En fait, *la compréhension est incontournable* ou, du moins, une dose importante de compréhension est incontournable. Sans compréhension des opérations, en effet, l'apprentissage des procédures ne peut se baser que sur des règles (« il faut d'abord faire ça ; puis continuer ainsi… »). Et cela ne concerne pas seulement l'apprentissage des procédures : l'absence de compréhension de l'écriture des nombres conduit, elle aussi, à une pléthore de règles (« Pour savoir quel est le *chiffre* des dizaines, il faut… ; pour savoir quel est le *nombre* de dizaines, il faut… »). Cette sorte d'apprentissage échoue presque systématiquement parce que, lorsqu'ils sont confrontés à de trop nombreuses règles qu'ils ne comprennent pas, les élèves les plus fragiles oublient ces règles ou bien ils en mélangent les conditions d'application et leur comportement est de moins en moins approprié, jusqu'à apparaitre absurde. C'est pourquoi nous commencerons par aborder le thème de la compréhension, d'abord des opérations arithmétiques, ensuite de l'écriture des nombres.

L'idée-force qui sera défendue dans ce chapitre est que les compétences en calcul mental sont celles qui révèlent et favorisent le mieux la compréhension. Et ceci est vrai, qu'il s'agisse de la compréhension des opérations ou de celle des nombres. De plus, de bonnes compétences en calcul mental favorisent la mémorisation des relations numériques élémentaires. D'où le titre de ce chapitre : le calcul mental, parce qu'il aide à comprendre et à mémoriser, est le facteur essentiel du progrès en arithmétique élémentaire.

Cela est attesté par de nombreuses recherches. L'une d'elles a récemment été menée par des sociologues de l'éducation[4]. Entre 1989 et 2008, les écoliers français passaient des évaluations nationales au début du CE2 et de la 6e. Ces chercheurs ont comparé les performances des mêmes élèves à ces deux niveaux de la scolarité. Ils ont notamment étudié s'il est possible d'isoler certaines compétences particulières qui, lorsqu'elles apparaissent en CE2, permettent de pronostiquer un niveau général élevé en mathématiques en 6e. Les résultats sont clairs : les compétences qui permettent le meilleur pronostic relèvent du calcul mental.

1. Rittle-Johnson, B., & Siegler, R.S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. *In* C. Donlan (ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75–110). Hove, UK: Psychology Press.
2. National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success : The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*, U.S. Department of Education : Washington, DC.
3. « Conceptual understanding of mathematical operations, fluent execution of procedures, and fast access to number combinations together support effective and efficient problem solving. »
4. Suchaut, B. (2007). *Apprentissages des élèves à l'école élémentaire : les compétences essentielles à la réussite scolaire* (collab. S. Morlaix). Note de l'IRÉDU, 07/1.

Ainsi, avoir de bonnes compétences en calcul mental constitue-t-il une sorte de passeport pour une scolarité réussie en mathématiques. Reste à comprendre pourquoi il en est ainsi. Ce sera l'objet de ce chapitre. En effet, il est important pour un enseignant de comprendre pourquoi l'apprentissage du calcul mental est si bénéfique : cela permet de profiter au mieux de l'effet de levier vers la réussite que crée cet apprentissage.

Enfin, une dernière idée expliquant le mode d'exposition adopté ici est que tout enseignement s'effectue sous le contrôle de ses *conditions d'évaluation*. Enseigner, évaluer est évidemment un couple incontournable, et ceci quels que soient les choix pédagogiques des enseignants : si un pédagogue veut mettre l'accent sur la compréhension, par exemple, il doit être capable de répondre à la question des critères qui assurent que tel ou tel enfant comprend effectivement. Ainsi, dans ce chapitre, nous serons constamment confrontés à des questions telles que : « *Comment évaluer qu'un enfant comprend telle ou telle opération ?* » ; « *Comment évaluer qu'un enfant comprend l'écriture des nombres à 3 chiffres ?* », etc.

Les 2 faces de la compréhension des opérations arithmétiques

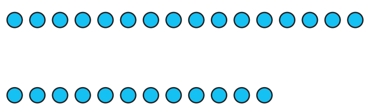
On commencera dans cette section par rappeler la définition classique de la compréhension des opérations et la façon classique dont on évalue cette compréhension (le paradigme « problèmes avec des petits nombres *vs* problèmes avec des grands nombres ») avant de présenter une autre définition, liée à un autre paradigme dans lequel la compréhension des situations et des opérations est évaluée à partir d'une tâche de calcul mental. Nous verrons enfin que ces deux cadres théoriques n'offrent pas les mêmes perspectives pédagogiques.

Comprendre une opération (1) : en maitriser les différents sens ou usages

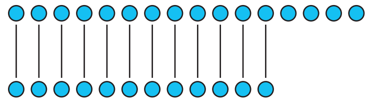
Qu'est-ce que comprendre une opération arithmétique ?

Comprendre une opération comme la soustraction, par exemple, c'est avoir acquis « le sens », ou plutôt « les sens », de cette opération. Illustrons cette pluralité des sens d'une même opération en prenant pour exemple la soustraction. On sait que la différence entre 2 grandeurs (entre 2 collections, entre 2 longueurs, entre 2 aires, etc.) peut se définir comme « ce qui dépasse lorsqu'on met en correspondance ce qui est pareil dans les 2 grandeurs ».

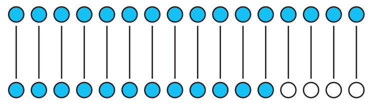
Deux collections, deux nombres…



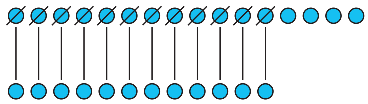
… et leur différence :



Mais la différence, c'est aussi ce qu'il faut ajouter au petit nombre pour obtenir le grand :



C'est aussi ce qui reste quand on retire le petit nombre au grand :



Grâce à cette mise en correspondance, on comprend que « ce qui est différent » est à la fois ce qu'il faut ajouter à la petite grandeur pour obtenir la grande et ce qui reste lorsqu'on retire la petite grandeur à la grande. Comprendre cela, que ce soit explicitement ou de manière intuitive, conduit à l'idée que la soustraction permet à la fois de :
- comparer deux grandeurs (lorsqu'on cherche ce qui est différent),
- déterminer le complément qu'il faut ajouter à la petite grandeur pour obtenir la grande,
- déterminer ce qui reste lorsqu'on retire la petite grandeur à la grande.

On a là les trois principaux « sens » de la soustraction arithmétique, ou encore les trois principaux usages.

De même, la division *a* : *b* ? permet de résoudre deux sortes de problèmes qui apparaissent *a priori* très différents :
- des problèmes dits de partition où l'on cherche la valeur d'une part lors d'un partage équitable ou, plus généralement, la « valeur à l'unité » : *4 objets identiques valent 248 €. Quel est le prix d'un objet ?*, par exemple. Ce dernier problème se reformule de manière encore plus générale sous la forme : 248 est égal à 4 fois combien ? La division-partition de *a* par *b* est ainsi celle où l'on cherche : « *a* est égal à *b* fois combien ? » ;
- des problèmes dits de quotition où l'on cherche « En *a* combien de fois *b* ? » : *Si l'on veut faire un 10 000 m autour d'une piste de 368 m, combien de tours faut-il faire ?*, par exemple.

La partition et la quotition sont donc les deux principaux sens de la division arithmétique.

Qu'en est-il des propriétés conceptuelles de l'addition et de la multiplication ? La principale de ces propriétés, commune à ces deux opérations, est la commutativité : « $a + b = b + a$ » et « $a \times b = b \times a$ ». Avoir acquis la commutativité de l'addition conduit, par exemple, à savoir que 10 ans après l'an 2000, ou 2000 ans après l'an 10, sont deux façons différentes de désigner la même année. Pour calculer 10 + 2000, on peut effectuer un autre ajout que celui qui correspond au déroulement temporel de l'« histoire » ou un autre ajout que celui correspondant à une lecture de gauche à droite de cette addition. De même, avoir acquis la commutativité de la multiplication conduit à comprendre que le nombre 2 répété 28 fois (2 + 2 + 2…) conduit au même résultat que 28 répété 2 fois : 28 + 28 (on peut donc effectuer une autre répétition que celle dont on parle dans un énoncé de problème). Ainsi, dans le cas de l'addition et de la multiplication, la pluralité des sens de ces opérations renvoie pour l'essentiel à *la pluralité des sens de leur utilisation* : on peut calculer dans un sens ou dans l'autre.

En résumé, la compréhension des opérations arithmétiques renvoie à l'utilisation de ce qu'on pourrait appeler leur « aspect couteau suisse » : une seule opération (la soustraction, par exemple) a des usages très différents (la comparaison, la recherche d'un complément et celle d'un reste). D'une manière générale, en psychologie, conceptualiser, c'est réduire la diversité du monde qui nous entoure, c'est percevoir ce qui est pareil au-delà des différences.

Les situations de recherche de la valeur d'un complément et de recherche du résultat d'un retrait, par exemple, sont « pareilles » au sens où elles peuvent être traitées par la soustraction. Et pourtant, elles apparaissent bien différentes puisque les premières parlent d'un ajout et les secondes d'un retrait. L'élève qui a compris la soustraction a réduit la diversité des situations qu'il est susceptible de rencontrer.

Les principaux sens des 4 opérations

L'addition

Ses 2 sens de calcul ($a + b = b + a$)

La soustraction

La comparaison
La recherche d'un complément
La recherche d'un reste

La multiplication

Ses 2 sens de calcul ($a \times b = b \times a$)

La division $a : b$?

La partition (a *est égal à* b *fois combien ?*)
La quotition (*En* a *combien de fois* b *?*)

Remarquons que l'un des principaux reproches que l'on pouvait faire aux programmes de 2002 (ceux qui précédaient les programmes de 2008) et aux textes pédagogiques qui les accompagnaient est de ne pas suffisamment souligner cette propriété des opérations arithmétiques. À l'époque, l'ensemble constitué des programmes des cycles 2 et 3 et de leurs documents d'application formait un document de 108 pages. Or, nulle part il n'était dit que la propriété essentielle de la division est d'être un traitement commun aux problèmes de quotition et de partition. Nulle part il n'était dit, en s'exprimant de façon moins générale, que la division par *n* est un traitement commun aux problèmes de groupement par *n* et de partage en *n* parts égales[5].

Les conceptions naïves des opérations

Quand quelqu'un sait résoudre les trois principaux types de problèmes qui donnent sens à la soustraction, on peut dire de cette personne qu'elle dispose d'une première compréhension de cette opération. Des chercheurs comme Gérard Vergnaud ont insisté sur le fait que certains problèmes de soustraction, plutôt ésotériques, restent mal résolus en dernière année de collège. Il s'agissait de montrer qu'une compréhension approfondie des opérations arithmétiques est un processus de longue haleine. Cependant, ce sont évidemment les débuts de la conceptualisation de ces opérations qui intéressent prioritairement les professeurs des écoles. Or, lorsqu'une personne sait utiliser la soustraction pour déterminer à la fois un reste, un complément et pour procéder à une comparaison, cela atteste du fait que, pour elle, l'usage de la soustraction ne se réduit plus à la seule recherche d'un reste. Il faut insister sur le fait que cela ne va pas de soi ; ainsi, considérons le problème de recherche d'un complément suivant :
« *Léo a 17 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ?* »

Aux USA[6], à l'âge du CM2, il y a encore 20 % d'échec à ce type de problème du fait que les enfants calculent 17 + 41. Comme l'énoncé parle d'une quantité d'argent qui croît, ces élèves pensent qu'il faut utiliser une addition !

En effet, derrière la notion de « connaissance conceptuelle d'une opération », il y a l'idée fondamentale que, pour chacune des opérations arithmétiques, l'un des sens est plus saillant que les autres et qu'il risque d'empêcher l'accès aux autres sens : de nombreux élèves pensent longtemps que la soustraction ne s'utilise que dans un contexte de retrait. *Or, il n'y a pas de début de compréhension d'une opération sans accès à au moins un autre sens que celui qui est saillant.* Ainsi, l'addition arithmétique n'est pas un simple ajout, la soustraction arithmétique n'est pas un simple retrait, la multiplication arithmétique n'est pas une simple répétition d'un ajout à l'identique (on parle souvent d'*addition réitérée*) et la division n'est pas un simple partage. L'élève qui penserait cela pour l'une ou l'autre de ces opérations disposerait seulement de ce que certains chercheurs appellent une « *conception naïve* » de cette opération, conception qu'il convient tout aussi bien de qualifier de « stéréotypée » parce que le mot « naïf », en l'occurrence, renvoie à l'idée d'une élaboration insuffisante.

C'est évidemment dans le fonctionnement quotidien des mots « additionner », « soustraire », « multiplier » et « diviser » que les conceptions naïves trouvent leur origine[7]. Si, face à une assiette de gâteaux, vous demandez à quelqu'un de diviser le tas de gâteaux par 4, la personne

5. Brissiaud R. (2006). Calcul et résolution de problèmes : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu. Texte mis en ligne sur *Le Café pédagogique* : http://www.cafepedagogique.org/dossiers/contribs/brissiaud2.php

6. Riley M. & Greeno J. (1988). Developmental Analysis of Understanding Langage About Quantities and of Solving Problems, *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.

7. Rémi-Giraud, S. (2008). Mots courants et connaissances scientifiques. *In* J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (Eds) : *Les Connaissances naïves*, 154-195. Paris : Armand Colin.

fera systématiquement 4 parts égales ; jamais elle ne se mettra à grouper les gâteaux par 4. Et pourtant, la division par 4 permet tout autant de savoir combien de groupes de 4 gâteaux il est possible de former (quotition) que de les partager en 4 parts égales (partition). L'école a évidemment pour responsabilité de mettre l'accent sur les sens des opérations qui ne sont pas portés par le langage quotidien : sur les sens « complément » et « comparaison » de la soustraction, sur le sens « quotition » de la division et sur la commutativité de l'addition et de la multiplication.

C'est d'ailleurs là un autre reproche qu'on pouvait faire aux programmes de 2002 et aux textes pédagogiques qui les accompagnaient : ils n'étaient pas suffisamment attentifs à la responsabilité d'éviter que les élèves s'enferment dans une conception naïve des opérations arithmétiques[8]. En prolongeant la métaphore du couteau, favoriser la compréhension des opérations arithmétiques, c'est éviter que les élèves les considèrent comme des couteaux à une lame plutôt que comme des couteaux suisses.

La façon classique d'évaluer la compréhension des opérations

Il est important de souligner que pour être crédité d'une connaissance conceptuelle de la multiplication, par exemple, il n'est pas nécessaire qu'un élève connaisse le mot « commutativité », ni qu'il sache définir cette propriété : l'essentiel est qu'il l'utilise de façon ordinaire lors des résolutions de problème. Rappelons la définition qui a été avancée des connaissances conceptuelles : « *conceptual knowledge is defined as implicit or explicit understanding of the principles governing a domain* ». Il n'est donc pas obligatoire que l'élève sache verbaliser cette sorte de connaissance pour la lui attribuer ; lorsque ce n'est pas le cas, on dit de cette connaissance conceptuelle qu'elle est implicite.

Ainsi, utiliser la soustraction pour résoudre aussi bien des problèmes de comparaison, de détermination d'un reste ou d'un complément, utiliser la division pour résoudre aussi bien des problèmes de quotition que de partition, c'est-à-dire, plus généralement, faire usage de l'aspect « couteau suisse » des opérations arithmétiques, tous ces comportements révèlent l'usage de connaissances conceptuelles.

Classiquement, c'est ainsi qu'on évalue la compréhension des opérations chez les élèves : on leur propose des problèmes variés, en étant particulièrement attentif à proposer d'autres types de problèmes que ceux qui correspondent aux sens typiques des opérations. En effet, si l'on veut diagnostiquer les élèves qui n'ont qu'une conception stéréotypée des opérations, il est nécessaire de proposer des problèmes qui mettent en échec leur résolution à partir d'une telle conception.

8. Brissiaud R. (2006). *Ibid.*

Distinguer la compréhension des situations et celle des opérations : le paradigme « petits nombres *vs* grands nombres »

Pourquoi il faut distinguer la compréhension de la situation de celle de l'opération

Mais tous les élèves échouent-ils dans la résolution de tel ou tel problème parce qu'ils n'ont pas compris l'opération ? On entend souvent les professeurs des écoles dire de tel ou tel élève qu'il échoue en résolution de problèmes parce qu'il n'en comprend pas les énoncés ou encore parce qu'il ne cherche pas à les comprendre. Ce comportement est en effet fréquent : de nombreux élèves dysfonctionnent gravement parce qu'ils fondent leur choix d'une opération sur des indices superficiels (l'opération qui vient d'être étudiée en classe, par exemple), sans chercher à comprendre la situation décrite dans l'énoncé.

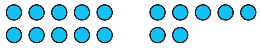
Soyons plus précis en considérant à nouveau le problème de recherche d'un complément :
« *Léo a 17 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ?* »

Lorsqu'un élève calcule de manière erronée 17 + 41, il est possible qu'il ait effectivement lu l'énoncé et compris la situation au sens où il a construit une représentation mentale de celle-ci sous la forme d'une quantité initiale connue, d'un accroissement inconnu et d'une quantité finale connue. Dans ce cas, l'échec provient d'une mauvaise compréhension de la soustraction (et de l'addition !). Mais il se peut aussi que l'élève n'ait lu que très superficiellement l'énoncé et qu'il ait choisi l'addition parce que c'est l'opération… qu'il sait le mieux calculer en colonnes ! Dans ce cas, l'échec provient avant tout d'une mauvaise compréhension de la situation.

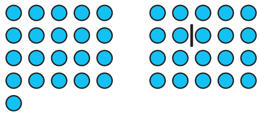
Une façon d'essayer de surmonter cette difficulté consiste à évaluer séparément la compréhension de la situation et celle de l'opération en proposant deux versions de ce problème : l'une avec des très petits nombres (5 euros au départ et 7 après l'ajout, par exemple) et l'autre avec de grands nombres (17 et 41, par exemple). C'est ce qu'on appellera le paradigme « petits nombres *vs* grands nombres ».

L'enfant qui donne la bonne réponse au problème avec des petits nombres prouve en effet qu'il a compris la situation. En revanche, cette réponse s'obtient facilement soit par comptage mental, soit en évoquant la relation numérique : « 5 + 2 = 7 ». Répondre n'exige pas de penser à la soustraction. Or, nous avons vu que c'est le fait de *penser à un retrait dans une situation de recherche d'un complément* qui est caractéristique de la compréhension de l'opération. D'où l'intérêt de proposer à la fois le problème avec des petits et des grands nombres : c'est seulement lorsque l'enfant utilise la soustraction pour résoudre le problème avec des grands nombres qu'on juge positivement sa compréhension de l'opération.

Une autre façon d'apprécier la compréhension de la situation consiste à utiliser les nombres 17 et 41, mais en invitant les élèves à faire un schéma analogique avec des collections organisées. L'élève a alors la possibilité de représenter les 17 euros par des points, par exemple de la façon suivante :



Il peut alors ajouter d'autres points jusqu'à en avoir 41, mais il doit être attentif à séparer d'abord les 17 premiers points afin que ceux qu'il ajoute apparaissent en tant que tels :



En effet, une erreur fréquente consiste à répondre par le nombre total de points, 41, du fait que l'enfant n'a pas anticipé la nécessité de séparer le complément.

Là encore, lorsqu'un élève résout le problème à l'aide du schéma ci-dessus, on est sûr qu'il a compris la situation ; en revanche, on voit que l'usage d'un tel schéma analogique permet d'accéder à la solution numérique sans penser à l'opération arithmétique : l'élève simule l'ajout dont parle l'énoncé et, à aucun moment, il n'a besoin de penser à la soustraction 41 – 17 ; à aucun moment il n'est nécessaire d'avoir à l'esprit un quelconque retrait pour accéder à la solution numérique.

Cela ne signifie pas que cette pratique pédagogique est sans intérêt : l'usage de problèmes avec des petits nombres comme l'usage de schémas analogiques avec de plus grands nombres constituent d'excellentes pratiques pédagogiques lorsqu'on souhaite mettre l'accent sur la compréhension… des situations. *J'apprends les maths CE2* en fait grand usage dans ce que nous avons appelé les *Problèmes pour apprendre à chercher* (ils sont présentés plus loin dans ce *Livre du maitre*). En revanche, cet usage de problèmes avec des petits nombres comme l'usage de schémas analogiques ne permettent pas d'apprécier si les élèves maitrisent les propriétés conceptuelles des opérations. C'est pourquoi les pédagogues ne peuvent pas s'en contenter.

Les insuffisances de la comparaison « petits nombres *vs* grands nombres »

C'est principalement concernant l'évaluation de la compréhension des opérations que ces insuffisances apparaissent. Lorsqu'un pédagogue utilise cette méthodologie, il est en effet conduit à proposer des problèmes variés avec de grands nombres, en interdisant l'usage de schémas analogiques. Il propose, par exemple, un problème de recherche d'un complément avec de grands nombres afin d'avoir une réponse à la question : l'enfant va-t-il poser une soustraction pour résoudre un problème dont l'énoncé parle d'un ajout ? En cas de réponse positive, même si l'élève fait une erreur de calcul, l'enseignant pourra considérer que l'élève a compris le sens « complément » de la soustraction.

La limitation majeure d'une telle méthode est son manque de sensibilité : en effet, nous allons montrer qu'avec cette méthodologie, des enfants apparaissent comme n'ayant pas compris une opération alors qu'ils l'ont comprise ou, du moins, alors qu'ils sont sur le point de la comprendre.
À cet effet, considérons cette version du problème de la tirelire, qu'on ne pense pas à utiliser dans le cadre de la comparaison « petits nombres *vs* grands nombres » parce qu'elle apparait mixte : le nombre final d'euros est un grand nombre, mais le nombre initial, lui, est un très petit nombre : « *Léo a 3 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ?* »

Ce problème a été proposé à des élèves de début de CE2 dans des conditions où ils ne peuvent pas faire un schéma (ils devaient donner la réponse en moins d'une minute). Il conduit à 51 % de réussite lorsqu'on demande seulement aux élèves de donner la solution numérique, sans écrire une égalité qui explique comment ils l'ont trouvée[9].

Mais lorsqu'on demande aux élèves ayant trouvé la bonne solution numérique d'écrire l'égalité qui leur a permis de trouver ce nombre, 20 % d'entre eux ne savent pas le faire. Parmi ces élèves qui trouvent la bonne solution numérique, mais échouent à produire une égalité correcte, certains commencent par écrire la bonne soustraction : « 61 – 3 = 58 », mais ils la barrent ou l'effacent ensuite : ils ne comprennent pas comment une soustraction aurait pu les conduire à une réponse correcte alors que la somme d'argent augmente dans la tirelire. Ces élèves ont fait une soustraction mentale, mais, l'ayant écrite, elle leur apparait en contradiction avec le fait que l'énoncé dise qu'on ajoute des euros dans la tirelire ; ils préfèrent barrer la soustraction. Ces élèves commencent par faire un usage implicite de la soustraction et on peut donc les créditer d'un début de compréhension de la soustraction, même si, finalement, ils n'assument pas explicitement l'usage de cette opération.

Jean Piaget, le grand psychologue genevois, a écrit un beau livre dont le titre est : *Réussir et comprendre*[10]. Il y a en effet des réussites qui précèdent et annoncent la compréhension. Celle qui vient d'être analysée est de celles-là : être capable de donner la solution numérique à la suite d'un calcul mental, même si l'on est incapable d'expliciter ensuite comment elle a été obtenue, est l'amorce de la compréhension.

Le phénomène précédent, celui d'enfants qui, par leur comportement, manifestent qu'ils ont commencé à conceptualiser la soustraction, ne peut pas apparaitre lorsque les données du problème sont deux grands nombres : 17 et 41, par exemple. En effet, avec ces nombres, la solution numérique ne s'obtient pas facilement par un calcul mental et les élèves ont besoin de poser explicitement une opération pour obtenir la solution numérique : cet usage de deux grands

9. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First Framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-107.
10. Piaget, J. (1974). *Réussir et comprendre*. Paris : PUF.

nombres interdit une utilisation implicite de la soustraction, il oblige à ce qu'elle soit explicite.

La situation semble sans issue : soit on évalue avec des petits nombres ou en préconisant l'usage des schémas et, dans ce cas, on évalue la compréhension des situations, mais pas celle des opérations arithmétiques, soit on utilise des grands nombres, en interdisant l'usage de schémas, et la compréhension des opérations arithmétiques est alors évaluée de manière très grossière : seuls les élèves ayant très bien compris les opérations ont une évaluation positive. En fait, l'exemple du problème de la tirelire montre qu'en utilisant une tâche de calcul mental, il est possible de surmonter cette difficulté.

Utiliser une tâche de calcul mental pour évaluer la compréhension des situations et des opérations : un premier exemple

En effet, tout un ensemble de recherches ont permis depuis près de 20 ans de sortir de ce dilemme, et *J'apprends les maths* a constitué une sorte de « laboratoire pratique » pour ces recherches. Elles ont conduit à *une analyse plus fine de la compétence à résoudre des problèmes arithmétiques.* Elles ont notamment permis de sortir de l'idée préconçue selon laquelle la taille des nombres serait systématiquement source d'une plus grande difficulté. Ainsi, considérons cette autre version du problème de la tirelire où les données numériques sont deux grands nombres, mais qui sont très proches l'un de l'autre :

« *Léo a 38 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ?* »

Ce problème a, lui aussi, été proposé aux mêmes élèves de début de CE2[11] dans des conditions où ils ne pouvaient pas faire un schéma. Le taux de réussite est de 64 % alors qu'il n'était que de 51 % avec les nombres 3 et 41. C'est donc le problème avec les plus grands nombres (38 et 41) qui est le mieux réussi ! L'analyse des stratégies utilisées par les élèves pour chacun des deux problèmes (celui avec 38 et 41 et celui avec 3 et 41) permet de comprendre ce phénomène.

• Avec les nombres 38 et 41, il suffit pour accéder à la solution de simuler mentalement l'ajout décrit dans l'énoncé. Soit les élèves procèdent par essais-erreurs en calculant des additions : « *38 + 2 = 40, c'est pas assez ; 38 + 3 = 41, la solution est 3* » ; soit ils simulent l'ajout par un comptage où ils lèvent un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire la somme présente dans la tirelire au départ : 38, 39 (1 euro ajouté), 40 (2 euros ajoutés), 41 (3 euros ajoutés). Il n'est nul besoin de penser à la soustraction pour résoudre un tel problème.

Nous dirons de ce problème qu'il est un **Si-problème** de recherche d'un complément, où le préfixe « Si » renvoie à « situation » ou à « simulation ». En effet, avec ces valeurs numériques, la simulation de la situation décrite dans l'énoncé conduit facilement à la solution numérique.

11. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). *Ibid.*

• Considérons à nouveau le même problème avec les nombres 3 et 41 :

« *Léo a 3 euros dans sa tirelire ; il ajoute d'autres euros et maintenant il a 41 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il ajouté d'euros ?* »

Même avec ces nombres, il est fréquent d'observer des élèves qui utilisent la stratégie de comptage au-dessus du premier nombre, 3. Ils lèvent là encore un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire la somme présente dans la tirelire au départ : 3, 4 (1 euro ajouté), 5 (2 euros ajoutés), 6 (3 euros ajoutés), 7 (4 euros ajoutés)..., mais ils s'arrêtent évidemment bien avant de trouver la solution parce qu'ils ne savent plus combien ils ont levé de doigts (il faudrait continuer jusqu'à avoir levé 41 doigts !). Ce type de comportement est une preuve du fait que pour comprendre un énoncé, il faut dans tous les cas simuler mentalement la situation qui y est décrite (on en a bien d'autres preuves). Mais, avec ces valeurs numériques, la simulation de la situation décrite dans l'énoncé ne suffit pas pour accéder à la solution numérique (ce n'est pas un Si-problème). En fait, la quasi-totalité des élèves qui trouvent la solution et qui savent expliquer comment ils l'ont trouvée disent avoir fait une soustraction. Ces élèves utilisent une soustraction pour résoudre un problème de recherche d'un complément, ils utilisent donc des connaissances conceptuelles concernant cette opération.

Nous dirons de ce problème qu'il est un **CC-problème** de recherche d'un complément, où « CC » renvoie à « Connaissances Conceptuelles »[12], parce qu'avec ces valeurs numériques, si la simulation de la situation décrite dans l'énoncé ne conduit pas à la solution numérique, l'usage de connaissances conceptuelles conduit à une soustraction simple : 41 – 3.

Il vaut la peine d'insister sur le fait que l'énoncé du CC-problème précédent décrit la même situation que celui du Si-problème, qu'il utilise les mêmes mots et, surtout, que l'une des données numériques y est plus petite que dans le Si-problème (3 au lieu de 38). Pourtant, ce CC-problème est plus difficile que le Si-problème parce qu'il nécessite des connaissances conceptuelles de l'opération (51% de réussite contre 64%). En fait, lorsqu'on s'intéresse aux données numériques d'un énoncé de problème, l'important

12. Dans des écrits antérieurs, dont les précédentes versions de ce *Livre du maitre*, d'autres façons de qualifier ces 2 types de problèmes ont été utilisées. Ainsi, dans de nombreux articles, ces problèmes ont été distingués en parlant de concordance *vs* discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique (les cas de concordance correspondent aux Si-problèmes, ceux de discordance aux CC-problèmes). Dans d'autres articles ou chapitres de livres, ils sont distingués en parlant de Q-problèmes parce qu'ils peuvent être résolus à l'aide de concepts Quotidiens et de E-problèmes qui, eux, ne peuvent être résolus qu'à l'aide de concepts appris à l'école. Chacune de ces façons de qualifier ces deux types de problèmes est intéressante : quand une notion est riche, on hésite sur les qualités qu'il convient de mettre en avant. Les dénominations retenues ici présentent l'avantage de permettre une liaison facile avec l'analyse de la compétence arithmétique en 3 sortes de connaissances : celles qui sont spécifiquement relatives aux relations numériques et aux procédures, et des connaissances plus complexes à analyser : les connaissances conceptuelles. En effet, ce dont les pédagogues manquent vraisemblablement le plus est un cadre théorique unifié, et ce texte est une tentative pour en fournir un.

est moins la taille de ces nombres que *la façon dont cette taille interagit avec le processus de compréhension de l'énoncé*.

En examinant d'autres exemples, nous allons voir qu'il vaut mieux baser l'évaluation des compétences d'un élève et l'élaboration de progressions pédagogiques sur *la comparaison des réussites aux Si-problèmes et aux CC-problèmes* plutôt que sur une comparaison des réussites aux mêmes problèmes avec des petits nombres et des grands nombres, comme le faisait la pédagogie traditionnelle. En effet, comme dans l'exemple précédent, les CC-problèmes permettent d'apprécier les connaissances conceptuelles indépendamment de la connaissance des techniques en colonnes et, donc, de manière plus précoce et plus fine que lorsqu'on emploie des grands nombres.

Évaluer la compréhension dans une tâche de calcul mental : Si-problèmes *vs* CC-problèmes

Les résultats de la recherche que nous allons présenter maintenant n'ont pas été obtenus avec des écoliers, mais avec des enfants non scolarisés qui vivent de petits commerces dans les rues de Récife, au Brésil. Dans ces conditions, les différences de performances à un Si-problème et à un CC-problème sont spectaculaires, ce qui favorise une bonne compréhension du phénomène[13].

Le calcul mental pour évaluer la compréhension des situations et des opérations : un 2e exemple, concernant l'addition réitérée

Considérons les 2 problèmes suivants :
Si : « *Quel est le prix total de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?* »
CC : « *Quel est le prix total de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?* »

Le Si-problème est résolu correctement par 75 % d'une population d'« enfants de la rue » d'environ 10 ans, qui n'ont aucune connaissance de la multiplication puisqu'ils n'ont jamais été scolarisés.
Le CC-problème, lui, est résolu correctement par… 0 % de la même population d'« enfants de la rue » !

Ces résultats s'expliquent ainsi. Pour résoudre le premier problème, les enfants imaginent la situation décrite dans l'énoncé : ils imaginent les 3 objets avec leurs étiquettes « 50 cruzeiros » et ils simulent l'achat de ces objets en comptant de 50 en 50. Ils disent : 50 (1 objet acheté), 100 (2 objets achetés), 150 (3 objets achetés). Il s'agit là d'une procédure élémentaire accessible à des enfants n'ayant pas été scolarisés, mais qui ont eu la nécessité de manier de l'argent pour leur commerce. Il leur suffit donc de comprendre la situation décrite dans l'énoncé pour réussir ce problème : il s'agit bien de ce que nous avons appelé un Si-problème (où Si renvoie à « situation » ou à « simulation »).

Soyons encore plus précis : comme il n'est nullement nécessaire d'avoir étudié la multiplication pour accéder à la solution de ce problème (75 % de réussite chez des enfants qui n'en ont jamais entendu parler !), il vaut mieux dire qu'il s'agit d'un **Si-problème d'addition réitérée** plutôt que de dire qu'il s'agit d'un Si-problème de multiplication. En fait, il s'agit d'un « pseudo-problème de multiplication » ou bien d'un « semi-problème de multiplication », dans la mesure où ce problème emprunte à la multiplication la principale des situations qui donnent sens à cette opération, mais ne nécessite pas l'usage de la propriété conceptuelle qui est caractéristique de cette opération : la commutativité.

Analysons maintenant les résultats au 2nd problème :
« *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?* »

Nous avons dit qu'il est résolu par 0 % de la même population d'« enfants de la rue ». Cela s'explique du fait que la stratégie de simulation, basée sur la situation, échoue. Lorsque les enfants imaginent la situation, c'est-à-dire les 50 objets avec leurs étiquettes « 3 cruzeiros », et lorsqu'ils simulent l'achat de ces objets en comptant de 3 en 3 : 3 (1 objet acheté), 6 (2 objets achetés), 9 (3 objets achetés), 12 (4 objets achetés)…, il se révèle fastidieux, sinon impossible, de mener à son terme cet ajout de 50 fois 3. Dans le cas de ce problème, il ne suffit plus d'en comprendre l'énoncé (ce n'est pas un Si-problème), il faut de plus utiliser une propriété conceptuelle de la multiplication : l'énoncé parle de 50 fois 3, mais on n'accède à la solution numérique qu'en calculant 3 fois 50. Nous dirons qu'il s'agit d'un **CC-problème d'addition réitérée** (où CC signifie « Connaissances Conceptuelles »). Comme il est absolument nécessaire d'avoir étudié la multiplication pour résoudre un tel problème, on peut en dire qu'il s'agit d'un « authentique problème de multiplication ». Ce problème ne se contente pas d'emprunter à la multiplication la principale des situations qui donnent sens à cette opération, il nécessite de plus l'usage de la commutativité.

On remarquera que les deux sortes de problèmes apparaissent aussi faciles les uns que les autres à n'importe quelle personne scolarisée : pour résoudre le CC-problème, elle utilise ses connaissances conceptuelles en remplaçant, sans même s'en rendre compte, le calcul de 50 fois 3 par celui de 3 fois 50.

Si-problèmes et CC-problèmes conduisent à des différences de performances spectaculaires lorsqu'on les propose à des enfants qui ne sont pas scolarisés. Chez les enfants scolarisés, les résultats sont moins spectaculaires, mais la différence de performances reste forte et elle va dans le même sens, même après l'enseignement de la multiplication[14].

Ainsi, lorsqu'on propose les Si- et CC-problèmes précédents à des élèves de début de CE1 et de début de CE2, le Si-problème est bien mieux réussi que le CC-problème (0.47 contre 0.17 en début de CE1 et 0.78 contre 0.53 en début de CE2). Et l'étude des stratégies utilisées par les élèves le confirme : les Si-problèmes sont résolus par une stratégie basée sur la situation alors que les CC-problèmes nécessitent l'usage de la multiplication.

13. Schliemann, A.D., Araujo, C., Cassundé, M.A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

14. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). *Ibid.*

L'explication de cette différence entre les performances aux versions Si et CC est simple. En effet, les élèves scolarisés peuvent se répartir en 3 catégories :

– *Ceux qui échouent au Si-problème et au CC-problème.* Le fait qu'ils échouent au Si-problème prouve que ces élèves ne comprennent pas la situation ; leur échec au CC-problème est lui-même une conséquence de cette incompréhension : on ne peut pas résoudre un problème quand on ne comprend pas la situation décrite dans son énoncé !

– *Ceux qui réussissent au Si-problème, mais pas au CC-problème.* Le fait qu'ils réussissent au Si-problème prouve qu'ils comprennent la situation ; concernant le CC-problème, deux faits doivent être pris en compte : ces élèves échouent au CC-problème bien qu'ils comprennent la situation décrite dans l'énoncé (c'est la même que pour le Si-problème !) et bien qu'ils maitrisent une procédure permettant d'accéder à la solution numérique (c'est la même que pour le Si-problème, le comptage de 50 en 50). Cela prouve qu'ils n'ont pas encore compris la commutativité de la multiplication.

– *Ceux qui réussissent au Si-problème et au CC-problème* : ceux-là comprennent à la fois la situation et l'opération.

La répartition des élèves entre les 3 groupes évolue de la manière suivante. Avant l'apprentissage de la multiplication à l'école (début de CE1), l'échec au CC-problème est presque total et les enfants se répartissent dans les deux premiers groupes (comme les enfants sont plus jeunes, il y a plus d'échecs aux Si-problèmes). Après l'apprentissage de la multiplication à l'école, ce n'est évidemment pas du jour au lendemain qu'on observe une réussite totale au CC-problème : il ne suffit pas d'enseigner la multiplication pour que tous les enfants la comprennent et c'est progressivement que les élèves des deux premiers groupes sont de moins en moins nombreux, alors que ceux du troisième groupe le sont de plus en plus.

Le calcul mental pour évaluer la compréhension des situations et des opérations : un 3e exemple concernant la recherche du résultat d'un retrait

Pour montrer que la possibilité de construire des Si- et des CC-problèmes concerne chacune des situations correspondant aux principaux sens des opérations, intéressons-nous maintenant à un autre sens de la soustraction, son sens typique : la recherche du résultat d'un retrait. Considérons les 2 versions suivantes d'un même problème :

Si : « *Il y a 32 personnes dans un autobus. À un arrêt, 3 personnes descendent. Combien reste-t-il de personnes dans l'autobus ?* »

CC : « *Il y a 32 personnes dans un autobus. À un arrêt, 29 personnes descendent. Combien reste-t-il de personnes dans l'autobus ?* »

Lorsque ces problèmes sont proposés à des élèves de fin de CE1, le score est de 0,78 au Si-problème contre 0,38 au CC-problème[15], et l'étude des stratégies de résolution montre que :

– *pour résoudre le Si-problème de recherche du résultat d'un retrait*, les élèves qui comptent le font à rebours (ils comptent *en reculant sur la suite des nombres*) : ils baissent un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire le nombre de passagers présents au départ : 32, 31 (1 passager retiré), 30 (2 passagers retirés), 29 (3 passagers retirés). Il s'agit bien d'une stratégie de simulation de la situation décrite dans l'énoncé ;

– *pour résoudre le CC-problème de recherche du résultat d'un retrait*, les élèves qui comptent à rebours échouent. Ceux qui réussissent adoptent *un comptage en avançant sur la suite des nombres* : ils lèvent un nouveau doigt à chaque fois qu'ils disent un nouveau nombre, en commençant par dire le nombre de passagers qui sont descendus : 29, 30 (1 unité ajoutée), 31 (2 unités ajoutées), 32 (3 unités ajoutées). Ainsi, ces élèves résolvent ce problème comme s'il s'agissait d'un problème de recherche d'un complément : celui où l'on cherche combien de passagers sont montés lorsqu'il y en avait 29 avant l'arrêt et 32 après. Or, le fait qu'on puisse calculer le résultat d'un retrait par recherche d'un complément est l'une des principales propriétés conceptuelles de la soustraction. Ce problème est donc bien un CC-problème. On remarquera d'ailleurs que cela n'a rien d'évident d'expliciter les entités physiques correspondant aux différentes unités ajoutées.

Il vaut la peine de souligner que lorsqu'un élève compte à rebours pour trouver le résultat d'un Si-problème de recherche du résultat d'un retrait, il n'utilise pas réellement la soustraction en tant qu'opération arithmétique. Et cela même si, quand on lui demande d'écrire une égalité, il écrit 32 – 3 = 29. En effet, on ne peut pas considérer cet usage du signe « – » comme un authentique usage de la soustraction : dans un tel contexte, l'élève se contente d'apparier le symbole « – » de cette opération avec la situation typique qui lui donne du sens, celle où l'on cherche le résultat d'un retrait ; à aucun moment il n'utilise une propriété conceptuelle de cette opération. Dans ce cas, le symbole « – » est une simple abréviation sténographique du verbe « retirer ».

Ceci est très général : lorsqu'un problème arithmétique relève de la signification typique d'une opération (recherche du résultat d'un retrait pour la soustraction, partage équitable pour la division), la réussite à un Si-problème n'assure pas de l'usage d'une propriété conceptuelle de l'opération, c'est-à-dire d'un authentique début de compréhension de cette opération, même dans les cas où l'enfant utilise les signes opératoires. Ce sont des cas où l'usage du signe opératoire crée une illusion.

Comment, de façon générale, créer des Si-problèmes et des CC-problèmes

Ainsi, pour chacune des situations dont nous avons dit qu'elles définissent les différents sens des opérations arithmétiques, il est possible de construire deux sortes de problèmes dont les énoncés sont rédigés avec les mêmes mots, en variant la taille des nombres de sorte que :

15. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). *Ibid.*

– Les **Si-problèmes** sont réussis *dès que l'élève comprend la situation* décrite dans l'énoncé. Dans ces problèmes, les valeurs numériques et l'ordre dans lequel elles sont utilisées sont choisis pour que l'accès à *la solution ne nécessite que des procédures ou des relations numériques élémentaires.* Dès que l'enfant comprend la situation, il peut résoudre le problème à partir d'un calcul mental simple. Il est fondamental, en effet, que l'enfant puisse accéder mentalement à la solution numérique sans *aucune connaissance conceptuelle* concernant les opérations.

– Les **CC-problèmes** sont rédigés avec les mêmes mots et leur solution numérique s'obtient, elle aussi, mentalement : les procédures ou les relations numériques nécessaires à leur résolution doivent être tout aussi élémentaires que celles permettant de résoudre les Si-problèmes. En revanche, la résolution des CC-problèmes, contrairement à celle des Si-problèmes, *exige des connaissances conceptuelles* concernant les opérations.

Concernant l'addition et la soustraction, pour obtenir un Si-problème ou un CC-problème, on est conduit à choisir un couple de nombres tantôt composé d'un grand nombre et d'un très petit nombre (32 et 3 ou 41 et 3 ou 53 et 4…), tantôt de deux grands nombres qui ont la caractéristique d'être très proches l'un de l'autre (32 et 29 ou 41 et 38 ou 53 et 49…). Comme on n'est pas dans le cadre du paradigme « petits nombres *vs* grands nombres », on ne choisit jamais deux très petits nombres, ni deux grands nombres quelconques, c'est-à-dire dont l'écart n'est pas très petit.

Concernant la multiplication et la division, on utilise là encore la dissymétrie entre la taille des nombres pour créer des Si- et des CC-problèmes : 4 fois 100 est plus facile à calculer en se laissant porter par la sémantique du mot « fois » (100 + 100 + 100 + 100) que 100 fois 4 (4 + 4 + 4 + …). Dans le cas de ces problèmes, il est cependant nécessaire que les multiples de l'un des deux nombres soient faciles à calculer mentalement : 4 fois 187 et 187 fois 4 sont en effet tous les deux difficiles à calculer mentalement. Ce nombre aux multiples simples peut être 10, 50, 100…, mais il peut également être 15 ou 25, nombres dont les premiers multiples sont au programme du cycle 3.

En fait, pour un enseignant souhaitant créer des Si- et des CC-problèmes, le mieux est de se rapporter aux différents exemples donnés ici :

- Un exemple de problèmes de chaque sorte a été donné pour la multiplication, beaucoup d'autres seront donnés dans la suite de ce chapitre. Concernant l'addition, il suffit de s'intéresser à un très petit ajout (29 + 3, par exemple) et, suivant que cet ajout correspond ou non à l'ordre temporel de l'énoncé, on est face à un Si- ou à un CC-problème.

- Concernant la soustraction, des exemples ont été donnés pour la recherche du résultat d'un retrait et la recherche d'un complément. Concernant le dernier des principaux sens de cette opération, la comparaison, une petite différence est plus facile à trouver qu'une très grande différence.

- Concernant la division, des exemples de Si- et de CC-problèmes de quotition et de partition seront donnés dans le prochain chapitre.

Comprendre une opération (2) : en maitriser les différentes stratégies de calcul mental

Au début de ce chapitre, nous avons rencontré une première face de la conceptualisation des opérations. Comprendre une opération, avons-nous dit, c'est en maitriser les différents usages, c'est-à-dire Reconnaitre les principales situations qui lui donnent du sens. C'est savoir que face à *des situations différentes* (celles de recherche du résultat d'un retrait et de recherche d'un complément, par exemple) on peut utiliser *la même opération* (la soustraction, par exemple).

C'est une deuxième face de la conceptualisation des opérations arithmétiques que le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes révèle : face à *la même situation* (la recherche du résultat d'un retrait, par exemple), on peut tantôt utiliser une stratégie où l'on simule ce retrait (cas d'un Si-problème : *Il y a 32 personnes dans un autobus. à un arrêt, 3 personnes descendent…*), tantôt utiliser une stratégie de recherche de la valeur d'un complément (cas d'un CC-problème : *Il y a 32 personnes dans un autobus. à un arrêt, 29 personnes descendent…*). Face à *la même situation*, donc, on peut utiliser *des stratégies différentes.*

La première face de la conceptualisation est sa face catégorisante, celle qui réduit la diversité de l'ensemble des problèmes arithmétiques qu'une personne est susceptible de rencontrer. Cette diversité se trouve réduite par la création de la catégorie des problèmes d'addition, celle des problèmes de soustraction, de multiplication, de division. La seconde face est la face stratégique de la conceptualisation : c'est celle qui permet, lorsqu'on est confronté à une situation donnée, d'adapter son comportement aux particularités des données numériques.

Le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes et le calcul mental des opérations

Pour qualifier des tâches telles que celles où l'on demande aux élèves de compléter 3 x 50 = ? ou 32 – 4 = ?, par exemple, les Anglo-Saxons continuent de parler de « problèmes » : nous dirons que ce sont des problèmes dont l'énoncé se présente d'emblée sous forme symbolique. Montrons que la seconde face de la compréhension des opérations arithmétique est celle qui rend compte des compétences en calcul mental lorsque les problèmes sont présentés d'emblée sous forme symbolique et non sous forme d'énoncés verbaux comme cela a été fait jusqu'ici.

Ainsi, concernant la soustraction, il suffit d'interroger un adulte cultivé pour s'apercevoir qu'il n'utilise pas la même stratégie de calcul mental pour déterminer 102 – 6 et 102 – 94. Pour calculer 102 – 6, la plupart des adultes rapportent qu'ils procèdent par retraits successifs, c'est-à-dire en reculant sur leur file numérique mentale ; ils font : (102 – 2) – 4 = 96.

En revanche, pour calculer 102 – 94, ils rapportent qu'ils calculent par compléments successifs, c'est-à-dire en avançant sur leur file numérique mentale : à partir de 94, il faut 6 pour aller à 100 ; et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout.

Le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes permet de comprendre un tel phénomène : face à des écritures telles que 102 – 6 ou 102 – 94, le signe « – » est interprété dans sa signification typique, c'est-à-dire comme renvoyant au calcul du résultat d'un retrait. Or, nous avons vu que ce type de problème, avec les nombres 102 et 6, est un Si-problème : sa solution s'obtient facilement en simulant le retrait, alors qu'avec les nombres 102 et 94, il s'agit d'un CC-problème : sa solution s'obtient facilement en calculant un complément.

Des recherches[16], où l'on mesure le temps nécessaire pour donner la réponse plutôt que la performance en termes de réussites / échecs, ont même montré que l'analyse précédente vaut pour les calculs respectifs de 12 – 3 (Si-problème) et de 12 – 9 (CC-problème) : les adultes obtiennent le résultat de 12 – 3 en calculant un retrait et celui de 12 – 9 en calculant un complément. Ainsi, même pour les soustractions élémentaires, celles qui conduisent à un résultat inférieur à 10, savoir calculer mentalement une telle soustraction, c'est adopter la stratégie qui conduit à un calcul économique lorsqu'on décrit le comportement à l'aide du paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes.

Ainsi, le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes permet de comprendre que la compétence à résoudre des problèmes arithmétiques et la compétence en calcul mental constituent les 2 faces d'une même entité : *la conceptualisation des opérations arithmétiques*. On comprend mieux que de bonnes performances en calcul mental s'accompagnent de bonnes performances en résolution de problèmes. Précisons mieux encore certaines médiations possibles, susceptibles d'être exploitées par les pédagogues, afin de renforcer le rôle positif du calcul mental sur la résolution de problèmes arithmétiques.

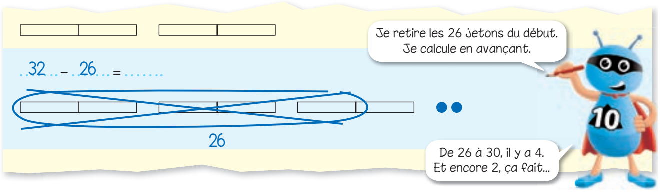
Les problèmes dont l'énoncé se présente d'emblée sous une forme symbolique et qui peuvent s'interpréter comme des Si- ou des CC-problèmes

Lorsque l'énoncé d'un problème est de cette forme (3 x 50 = ? ou 32 – 28 = ?), c'est-à-dire sans unités et avec des signes arithmétiques plutôt qu'avec des mots, la situation n'est pas exactement la même que face à un énoncé verbal. Il est intéressant de réfléchir à ces différences. Or, la principale différence est *la liberté d'interprétation qu'offre l'écriture symbolique*.

Dans une multiplication, par exemple, on peut décider que c'est tel nombre et non tel autre qui exprime le « nombre de fois » (on qualifie souvent ce nombre de « multiplicateur », l'autre étant le « multiplicande »). Ainsi, on peut décider que dans 13 x 2, le multiplicateur est le nombre « 2 », ce qui conduit à calculer 13 + 13 et non 2 + 2 + 2 + … En revanche, dans 3 x 100, on peut décider que le multiplicateur est le nombre « 3 », ce qui conduit à calculer 100 + 100 + 100 et non 3 + 3 + 3 + … On remarquera que dans le cas de 13 x 2, le calcul économique est celui où l'on décide que le multiplicateur est à droite alors que dans 3 x 100, c'est celui où l'on décide qu'il est à gauche. L'exercice de cette liberté correspond à l'usage de la commutativité. Dans le cas de la multiplication, les élèves s'en emparent si facilement qu'assez rapidement ils utilisent cette même propriété dans le cadre de la résolution de problèmes verbaux : la commutativité de la multiplication n'est pas la propriété conceptuelle qui pose le plus de difficultés aux élèves. C'est là un premier exemple du fait que le calcul mental d'une opération à partir d'écritures symboliques favorise l'appropriation d'une propriété conceptuelle de cette opération et, donc, la résolution de problèmes.

Donnons un second exemple, concernant la soustraction et une propriété conceptuelle dont l'acquisition résiste beaucoup plus. Pour enseigner le calcul d'une soustraction comme 101 – 98 = ? (CC-problème dont l'énoncé se présente d'emblée sous forme symbolique), on peut demander aux élèves d'imaginer des objets numérotés jusqu'à 101 (les cases d'une file numérique, par exemple) et leur faire découvrir combien il est économique de décider que les 98 numéros qui sont retirés sont… les premiers numéros de la suite des nombres. En effet, si l'on retire les numéros 1, 2, 3… jusqu'à 98, il reste les numéros 99, 100 et 101, c'est-à-dire 3 numéros en tout ; d'où le résultat de la soustraction. On remarquera que le résultat de cette soustraction est alors calculé en avançant sur la suite des nombres, c'est-à-dire… par complément. Cette stratégie est évidemment bien préférable à celle où l'on retire les 98 derniers numéros (les numéros 101, 100, 99, 98, 97…) qui, elle, correspond à un comptage à rebours et qui ne conduit pas facilement au résultat !

Dans *J'apprends les maths*, c'est seulement au niveau du CE2 que cette stratégie est enseignée en s'appuyant sur une file numérique : l'un des principaux choix pédagogiques de cette collection est en effet de toujours recommander aux élèves l'usage d'autres stratégies que celle où l'on compte 1 à 1, parce que les élèves les plus fragiles s'enferment dans ces stratégies de comptage 1 à 1. Au CE1, elle est enseignée en s'appuyant sur une « file de boites de 10 jetons ». S'il s'agit de calculer 32 – 26, par exemple (CC-problème), les 26 premiers jetons sont barrés à travers les boites.



Cela incite à utiliser une stratégie où l'on s'appuie sur la dizaine supérieure : « 26 pour aller à 30, il faut 4 et encore les 2 jetons que l'on voit : le résultat est 6. »

16. Torbeyns, J., Desmedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 79–91.

En enseignant le calcul mental d'une soustraction par une stratégie de complément, on enseigne une propriété conceptuelle de cette opération et, évidemment, on favorise le progrès dans la résolution des problèmes de soustraction : l'élève qui a appris à calculer une soustraction par complément sera moins surpris qu'on puisse résoudre un problème de recherche d'un complément en posant une soustraction. De bonnes compétences en calcul mental ne font pas que révéler de bonnes compétences en résolution de problèmes, elles les *favorisent*.

Le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes et l'élaboration de progressions pédagogiques

Pour toutes les situations qui fondent les différents sens des opérations, nous avons vu que le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problèmes permet de répartir les élèves en 3 groupes :

- Ceux qui échouent à la fois au Si-problème et au CC-problème : ceux-là ne comprennent pas la situation.
- Ceux qui réussissent au Si-problème et échouent au CC-problème : ceux-là comprennent la situation, mais pas l'opération.
- Ceux qui réussissent à la fois au Si-problème et au CC-problème : ceux-là comprennent à la fois la situation et l'opération.

Avant tout enseignement d'une opération, les élèves se répartissent pour l'essentiel dans les 2 premiers groupes : il y a ceux qui comprennent les situations et ceux qui ne les comprennent pas. Très peu d'enfants réussissent les CC-problèmes et, donc, appartiennent au 3e groupe. Le fait qu'un enfant soit dans le 1er ou le 2e groupe dépend évidemment de son expérience de vie (A-t-il déjà rencontré ce type de situation ?), mais aussi de ses compétences langagières (Connait-il les mots utilisés pour décrire une telle situation ?).

L'objectif initial de toute pédagogie des opérations arithmétiques devrait évidemment être que tous les élèves comprennent les différentes situations qui donnent sens aux opérations arithmétiques. Comment peut-on espérer enseigner à des enfants les propriétés conceptuelles des opérations alors qu'ils ne comprennent même pas les situations qu'il faut nécessairement utiliser pour enseigner ces propriétés conceptuelles[17] ?

Un 1er moment : utiliser des Si-problèmes pour faire comprendre les situations

Il nous faut commencer par préciser ce que signifie « comprendre une situation ». En effet, il est plus difficile de comprendre une situation lorsqu'elle est décrite verbalement que lorsqu'on la vit. D'où l'intérêt des situations « vécues ». Cependant, le plus souvent, ces situations ne conservent un intérêt pédagogique que lorsque l'enseignant les présente sous la forme de *situations d'anticipation du résultat d'une action*. Considérons, par exemple, cette situation : *8 jetons sont dans une boite opaque. On y met 4 nouveaux jetons. Combien y a-t-il de jetons en tout dans la boite ?* Il faut anticiper le résultat du dénombrement de la collection. La même situation, si les jetons étaient visibles, conduirait les élèves à les compter, perdant de ce fait tout intérêt. Les utilisateurs de *J'apprends les maths* retrouvent là une constante de la collection : créer des situations d'anticipation, en utilisant le masquage notamment.

Il est cependant important de souligner qu'à terme, les élèves doivent comprendre les situations à partir de leur seule description verbale et que les énoncés de problèmes verbaux sont donc incontournables : si l'on devait, à chaque fois que l'on évoque une situation en classe, recréer les conditions matérielles de cette situation plutôt que de la décrire verbalement, tout manquerait : le matériel nécessaire, la place dans la classe, mais, surtout, le temps nécessaire. C'est la magie du verbe que de permettre une sorte de présence à ce qui ne peut pas être effectivement présent.

Revenons à la question qui nous préoccupe ici : comment faire comprendre aux élèves les situations qui fondent le sens des opérations arithmétiques, que ces situations soient décrites verbalement ou présentées sous la forme d'une situation d'anticipation ? Le meilleur moyen d'atteindre cet objectif est d'apprendre aux élèves à résoudre les Si-problèmes correspondants. En effet, comme l'accès à leur solution numérique peut se faire mentalement (il nécessite des connaissances arithmétiques élémentaires du point de vue des procédures et des relations numériques), l'attention des élèves, face à ces Si-problèmes, peut se porter quasi exclusivement sur la compréhension de la situation.

Concernant la multiplication, par exemple, les élèves apprennent dans la séquence 14 à résoudre des Si-problèmes aussi variés que :

Combien y a-t-il de mouchoirs en tout dans 3 paquets de 15 mouchoirs ?

Combien y a-t-il d'élèves en tout dans 4 classes de 25 élèves ?

Quel est le prix total de 8 objets à 10 € l'un ?

Quelle est la longueur totale de 3 segments de 50 mm mis bout à bout ?

Il s'agit, dans tous les cas, de Si-problèmes d'addition réitérée. Au passage, on remarquera que cela permet aux élèves de développer leur connaissance de relations numériques dont on peut considérer qu'elles doivent être connues en fin d'année (elles sont d'ailleurs au programme !), à savoir la connaissance des premiers multiples de 15, 25 et 50, et que cela renforce la connaissance de la numération décimale en faisant mobiliser les multiples de 10.

Une question se pose cependant : les élèves ont déjà étudié la multiplication au CE1 où ils ont déjà été confrontés à des Si-problèmes et des CC-problèmes. Ils ont même été confrontés à des problèmes dont la solution ne s'obtient pas

17. C'est là un autre des principaux reproches que l'on peut faire à la pédagogie dite traditionnelle, celle qui était pratiquée avant 1970, lorsque les 4 opérations étaient au programme du CP : on voulait enseigner très précocement les opérations, sans s'être assuré que les enfants comprennent les situations qui donnent sens à ces opérations.

par un calcul mental (la technique de la multiplication par un nombre à 1 chiffre est au programme du CE1). Faut-il, dès lors, commencer à nouveau l'année de CE2 en proposant la résolution de Si-problèmes ? S'il s'agit d'un premier moment au CE1, ce n'est plus vraiment le cas au CE2.

Nous pensons qu'il faut quand même répondre affirmativement à cette question. Rappelons qu'à l'entrée au CE2, le score de réussite aux Si-problèmes d'addition réitérée est de 0,78. Tous les élèves sont loin de rentrer au CE2 en ayant compris la situation qui fonde le sens de la multiplication. En choisissant de mettre l'accent sur la résolution de Si-problèmes en début d'année de CE2, comme cela est fait dans *J'apprends les maths*, l'enseignant offre la possibilité aux élèves qui ne comprennent pas encore les situations de ce type de progresser, et il crée de meilleures conditions pour qu'ils comprennent la multiplication. Lorsque l'école offre une plage de temps réduite pour acquérir telle ou telle connaissance, seuls les élèves qui apprennent vite s'en sortent bien.

Remarquons cependant qu'une précaution importante est prise : en utilisant les multiples de 15, 25 et 50 pour créer ces Si-problèmes, on évite dans *J'apprends les maths* de proposer les mêmes activités qu'au CE1 (ces multiples n'y sont pas travaillés), ce qui assure l'intérêt de tous les élèves, y compris de ceux qui ont déjà tout compris au CE1 quand les multiples utilisés pour créer des Si-problèmes étaient plutôt ceux de 5 et de 10.

Un 2e moment : utiliser des CC-problèmes pour faire comprendre les opérations

Faire comprendre les opérations, c'est enseigner leurs propriétés conceptuelles. Là encore, le meilleur moyen d'atteindre cet objectif est d'apprendre aux élèves à résoudre les CC-problèmes correspondants. En effet, comme l'accès à leur solution numérique peut se faire mentalement (la résolution nécessite des connaissances arithmétiques élémentaires du point de vue des procédures et des relations numériques), l'attention de l'élève peut se porter quasi exclusivement sur la compréhension de l'opération.

Concernant la multiplication, par exemple, les élèves apprennent à partir de la séquence 27 à résoudre des CC-problèmes tels que ceux-ci :

Combien y a-t-il de mouchoirs en tout dans 15 paquets de 3 mouchoirs ?

Combien d'élèves en tout dans 25 équipes de 3 élèves ?

Quel est le prix total de 10 objets à 8 € l'un ?

Quelle est la longueur totale de 50 segments de 3 mm mis bout à bout ?

On remarquera comment ces CC-problèmes d'addition réitérée sont construits à partir des Si-problèmes utilisés précédemment : on s'est contenté d'intervertir l'ordre des nombres. Une question se pose, cependant : avant tout enseignement de la multiplication, ce type de problèmes conduit à un taux d'échec important ; comment fait-on pour que ce ne soit plus le cas ? Il faut créer des situations permettant aux élèves de se convaincre que le calcul de *a* fois *b* conduit au même nombre que celui de *b* fois *a*. La pédagogie dispose de moyens classiques à cet effet, dont le principal, en l'occurrence, est la disposition des éléments à dénombrer en *a* lignes et *b* colonnes. En effet, selon que les éléments sont dénombrés ligne par ligne ou colonne par colonne, on a déterminé *a* fois *b* ou *b* fois *a* ; ces deux façons de faire conduisent au nombre total. Mais, là encore, le paradigme Si- *vs* CC- problèmes permet une amélioration sensible des pratiques pédagogiques existantes. Il suffit que l'un des nombres soit très petit et que l'autre ait des multiples simples à calculer pour que la situation pédagogique se trouve transformée.

Ainsi, considérons ce CC-problème (il s'agit de calculer 50 fois 3), dont l'énoncé s'accompagne d'un schéma réaliste (extrait de la séquence 63 du CE1) :

Pour aller de France en Grande-Bretagne, on peut traverser la Manche en montant sa voiture sur un bateau qu'on appelle un *ferry-boat*.

Ci-dessous, des voitures attendent sur le quai avant d'entrer dans le *ferry-boat*...

... les voitures vont monter sur le bateau 3 par 3.
Il y a 50 rangées de 3 voitures qui attendent sur le quai.
Combien y a-t-il de voitures sur le quai ?

Des voitures vont monter 3 par 3 sur un bateau.
50 rangées de 3 voitures attendent sur le quai pour monter sur le bateau.
Combien y a-t-il de voitures sur le quai ?

Le calcul de 3 + 3 + ... ne menant pas à la solution numérique, les élèves sont invités à imaginer comment l'image se prolongerait vers la droite. Ce qui permet d'expliciter l'organisation en lignes et colonnes. Ils peuvent ainsi accéder à un autre mode d'énumération des unités : dans l'image prolongée, il y a 50 voitures en haut, 50 au milieu et 50 en bas, 150 voitures en tout.

Qu'apporte l'usage de ce CC-problème par rapport aux situations plus classiques utilisant une organisation en lignes et colonnes ? La possibilité, dès que l'on a pensé à l'autre mode d'énumération de l'ensemble des voitures, d'accéder à la solution numérique *à l'aide d'un calcul mental*. L'accès à la solution se traduit ainsi par une sorte de phénomène d'« illumination » ; les psychologues parlent d'ailleurs d'« insight problème » ou encore de « ha-ha problème ». Face à un tel problème, peu d'élèves en trouvent la solution, mais beaucoup d'élèves, dès que la solution est collectivement explicitée, s'interrogent sur le mode « Comment se fait-il que je n'y ai pas pensé ? ». Et c'est ce qui compte après tout : il est fondamental que quand la solution d'un problème surgit au sein de la classe, elle soit comprise par un maximum d'élèves.

Bref, avant tout enseignement des opérations arithmétiques, les CC-problèmes sont massivement échoués parce que leur résolution nécessite l'usage de propriétés conceptuelles caractéristiques des opérations arithmétiques. Mais il existe des façons d'énoncer certains de ces problèmes qui les transforment en « insight problème » : le pédagogue s'est arrangé pour qu'en changeant de point de vue sur la situation décrite dans l'énoncé, une sorte d'illumination conduise à la solution.

D'un point de vue pédagogique, il est intéressant de choisir ce genre de moment pour, au CE1, introduire le signe opératoire « x » en classe, ou pour revoir ce signe au CE2. En effet, ce signe apparait alors de manière très explicite comme le symbole de la commutativité de la multiplication. L'enseignant peut théâtraliser cette propriété en disant, par exemple : « *Les hommes, pour ne pas oublier que le calcul de 3 fois 50, par exemple, conduit au même nombre que celui de 50 fois 3, ont inventé une opération arithmétique, la multiplication, et un signe, le signe "x". On peut écrire 3 x 50 = 150 ou 50 x 3 = 150.* »

Dans le prochain chapitre nous verrons qu'il existe de même un « insight problème » de partition dont la résolution permet un enseignement très explicite en classe de la principale propriété conceptuelle de la division : on peut remplacer une stratégie de partition (*a* est égal à *b* fois combien ?) par une stratégie de quotition (en *a*, combien de fois *b* ?).

Un 3e moment : apprendre les techniques opératoires pour résoudre les problèmes avec des nombres quelconques

Enfin, dans un dernier moment, après que les élèves aient résolu mentalement des Si-problèmes (pour s'assurer de leur compréhension des situations), puis des CC-problèmes (pour s'assurer de leur compréhension de l'opération), il convient de leur enseigner les techniques opératoires afin qu'ils puissent résoudre les problèmes qui ne peuvent pas être résolus mentalement.

En effet, il est raisonnable de n'enseigner une technique opératoire que lorsque la quasi-totalité des élèves comprennent les situations dans lesquelles ils seront conduits à l'utiliser ; il est de même raisonnable d'éviter le plus possible que l'enseignement des techniques opératoires soit seulement celui de la mise en œuvre de règles dont les élèves ne maitrisent pas les raisons et, pour que ce ne soit pas le cas, il est raisonnable que le plus grand nombre possible d'élèves maitrisent les propriétés conceptuelles qui justifient ces règles.

Calcul mental et opérations posées : l'organisation en 5 périodes de *J'apprends les maths CE2*

Ainsi, dans *J'apprends les maths CE2*, l'apprentissage du calcul mental précède-t-il systématiquement celui de l'opération posée. L'organisation retenue est exposée à la page 5 du fichier et à la page 49 de ce *Livre du maitre* à l'aide d'un tableau synoptique : pour chaque opération (addition, soustraction, multiplication par un nombre à 1 chiffre, division et enfin multiplication par un nombre à 2 chiffres), le calcul mental précède le calcul en colonnes.

Comprendre l'écriture des nombres

Après la compréhension des opérations arithmétiques, intéressons-nous à la compréhension de l'écriture des nombres. Comme dans le cas de la compréhension des opérations arithmétiques, nous allons commencer par définir ce que signifie « comprendre l'écriture de 358 », par exemple.

Qu'est-ce que comprendre l'écriture d'un nombre à plusieurs chiffres ?

Qu'est que comprendre l'écriture d'un nombre comme 358 ? La réponse qui vient immédiatement à l'esprit est la suivante : c'est savoir que le chiffre « 3 » désigne des centaines, le chiffre « 5 » des dizaines et le chiffre « 8 » des unités. Cependant, lorsqu'un enseignant entraine ses élèves à répondre aux questions portant sur ce que désignent les différents chiffres (« Quel est le chiffre des dizaines ? », par exemple), certains enfants fournissent les réponses attendues sans réellement comprendre les écritures correspondantes. En fait, à force d'entrainement, même les élèves les plus faibles arrivent à répondre correctement à ce type de questions. Mais ils le font seulement pendant les périodes où ces questions sont d'actualité dans la classe, et, dès que ce n'est plus le cas… ils oublient quelles sont les « bonnes réponses ». Par ailleurs, ces « bonnes réponses » restent purement verbales au sens où elles ne sont reliées à aucun savoir-faire (on parle souvent de « verbalisme[18] »). C'est pourquoi il vaut mieux définir la compréhension de l'écriture des nombres à partir de savoir-faire plutôt que de réponses verbales. Avançons une première définition de la compréhension de l'écriture d'un nombre à plusieurs chiffres.

Comprendre l'écriture 358, c'est savoir qu'il existe plusieurs façons de construire une collection ayant 358 objets :

- Il est évidemment possible de compter les objets 1 à 1 jusqu'à entendre le mot « trois cent cinquante-huit », mais ce sera long !
- En fait, il vaut mieux commencer par grouper les objets par 100 (10 groupes de 10), puis « compter des cents » plutôt que de « compter des uns » : « 1 cent, 2 cents, 3 cents ». Et lorsqu'il ne reste plus assez d'objets pour compter des cents, plutôt que de se remettre à « compter des uns », mieux vaut continuer en « comptant des dix » : « … 3 cents et 1 dix (trois cent dix), 3 cents et 2 dix (trois cent vingt), 3 cents et 3 dix (trois cent trente)… ». Enfin, lorsqu'il reste moins de dix objets, cette procédure s'achève en « comptant des uns » :

18. Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Actes du Congrès scientifique international de Toulouse : Comprendre.* Numéro spécial de *Rééducation orthophonique*, 223, 225-238.

« trois cent cinquante et un, trois cent cinquante-deux… trois cent cinquante-huit ».

Comprendre l'écriture de ce nombre, c'est donc s'être forgé la conviction que la procédure consistant à compter 1 à 1 trois cent cinquante-huit objets et celle consistant à compter d'abord 3 cents, puis 5 dix et enfin 8 uns conduisent à des collections qui ont la même taille, et qu'on peut donc à loisir remplacer une façon de faire par l'autre. Remarquons que cette définition de la compréhension de l'écriture des nombres est proche de celle que nous avons avancée p. 13 concernant la compréhension des opérations : dans un cas comme dans l'autre, comprendre c'est s'être forgé la conviction que des procédures différentes conduisent au même résultat : pour calculer une soustraction, par exemple, on peut chercher le résultat d'un retrait ou la valeur d'un complément. En fait, depuis les travaux de Piaget, on peut considérer que la conceptualisation arithmétique se fonde toujours dans ce type de propriétés des actions, qu'il s'agisse de comprendre des opérations, des nombres ou, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, des relations numériques comme « 8 plus 4 est égal à 12 ».

Une connaissance fondamentale : savoir que 35 dizaines, c'est 350 et que 358, c'est 35 dizaines et 8

En fait, la première définition que nous avons avancée de la compréhension des nombres à 3 chiffres est très insuffisante : lorsque des nombres sont supérieurs à 100, il est important de savoir que l'écriture d'un nombre renseigne sur la façon dont on peut le former en utilisant seulement le groupement par 10. Ainsi, il ne suffit pas de concevoir 100 comme 1 centaine, il faut aussi le concevoir comme 10 dizaines. Et, à la suite, il faut concevoir 110 comme 11 dizaines, 120 comme 12 dizaines, 130 comme 13 dizaines… 190 comme 19 dizaines, 200 comme 20 dizaines, 210 comme 21 dizaines… 350 comme 35 dizaines, etc.

Ainsi, l'écriture des nombres à 3 chiffres reflète-t-elle le fait que 3 stratégies d'énumération des unités conduisent au même résultat. Nous avons vu les deux premières : construire une collection de 358 en comptant 1 à 1 et compter 3 cents, 5 dix et 8 « uns ».

En isolant le dernier chiffre (8) de 358 et en s'intéressant à ceux qui précèdent (35), on se rappelle que cette écriture reflète aussi une troisième stratégie possible : on peut aussi compter 35 groupes de dix et 8 « uns ».

$$\underbrace{3\ 5}_{\text{groupes de 10}}\ 8$$

Or, la lecture typique de l'écriture « trois cent cinquante-huit » masque cette dernière possibilité. En effet, l'oral établit une correspondance terme à terme entre chaque chiffre et des informations concernant respectivement les centaines (trois cents), les dizaines (cinquante) et les unités (huit). On est fortement conduit à penser que, dans l'écriture 358, seul le chiffre 5 est porteur d'information concernant les dizaines. Ce qu'on entend en oralisant 358, « trois cent cinquante-huit », fait ainsi obstacle à l'interprétation du chiffre « 3 » comme « trente dizaines » et du nombre « 35 » comme désignant des dizaines.

Mais est-ce utile de s'intéresser à cette façon de former des collections ? Oui, car la compréhension de nombreuses règles de calcul en dépend.

Comprendre les retenues, la multiplication et la division mentales par 10, la division posée…

Imaginons le calcul de la multiplication 171 x 5 posée en colonnes. Au rang des dizaines, on est conduit à calculer 5 fois 7 dizaines, c'est-à-dire 35 dizaines. Comprendre la retenue (« *Je pose 5 dizaines et je retiens 3 centaines* »), c'est savoir que 35 dizaines, c'est 350. Il en va de même de la retenue d'une addition : si l'addition des chiffres dans la colonne des dizaines conduit à 14 dizaines, par exemple, comprendre la retenue (« *Je pose 4 dizaines et je retiens 1 centaine* »), c'est savoir que 14 dizaines, c'est 140. De même, quelle que soit la technique opératoire d'une soustraction que l'on choisit, il serait facile de montrer que cette même propriété y est sollicitée.

La multiplication par 10 la sollicite tout autant : calculer 42 x 10, par exemple, c'est chercher le nombre total correspondant à 42 dizaines : celui qui sait que 42 dizaines c'est 420 accède directement au résultat.

Il en est de même de la division par 10. La recherche du quotient et du reste de la division de 639 par 10, par exemple, se fait par quotition : on cherche « *En 639, combien de fois 10 ?* » ; ce qui revient à chercher combien il y a de dizaines dans 639 : la réponse est 63 (c'est le quotient) et il reste 9.

Et lorsqu'il s'agit de calculer une division comme 358 divisé par 6 en la posant avec la « potence », le calcul commence en cherchant à partager les 3 centaines en 6 parts égales. Comme ce n'est pas possible, on partage… les 35 dizaines en 6 parts égales. Encore faut-il savoir que 358, c'est 35 dizaines et encore 8 !

Bref, cette connaissance permet de comprendre un grand nombre de règles de calcul. Lorsque cette connaissance fait défaut, ces règles sont apprises isolément, sans lien les unes avec les autres, ce qui conduit certains élèves à être submergés par un tel nombre de règles à mémoriser. L'absence de compréhension de l'écriture des nombres est très certainement une des principales causes de l'échec en mathématiques.

Un matériel de numération qui favorise l'appropriation de cette propriété : l'intérêt du masquage

En fait, le matériel de numération utilisé dans *J'apprends les maths* est particulièrement bien adapté à cet enseignement ; en amenant les élèves à ranger 10 groupes de 10 jetons dans une valise dont ils « ferment le couvercle », on leur permet d'adopter un double point de vue sur le groupe de 100 jetons : c'est 1 centaine, mais les élèves peuvent aussitôt se rappeler l'action qui les a conduits à former cette centaine, à savoir la réunion de 10 groupes de 10 jetons. Ils voient 1 valise, mais peuvent aisément se représenter les 10 boites de 10 jetons qu'elle contient.

Considérons une collection de 126 jetons organisés avec le matériel :

Le masquage empêche de voir l'ensemble des groupes de 10, mais il aide à le concevoir : il y a les 10 groupes de 10 « qu'on ne voit plus », mais qui sont là, derrière le couvercle de la valise, et les 2 groupes de 10 qu'on voit encore (le même raisonnement pourrait être tenu concernant la « caisse de mille ») ; ce faisant, la compréhension du fait que 126, par exemple, contient 12 groupes de 10 et encore 6 unités s'en trouve facilitée.

Une écriture chiffrée aide à concilier ces deux points de vue : dans « 137 », par exemple, sans négliger qu'il y a 1 groupe de 100 noté par « 1 », il suffit de s'intéresser aux deux premiers chiffres pour se rappeler que 137 contient 13 groupes de 10.

$$\underbrace{1\ 3}_{\text{groupes de 10}}\ 7$$

Il est cependant fondamental que les élèves soient capables de contrôler l'usage d'une telle règle en se référant au matériel structuré : dans 137, il y a 13 groupes de 10 parce qu'il y a 10 groupes de 10 qui sont cachés dans la valise et 3 groupes de 10 qu'on voit encore. L'enseignant devra régulièrement s'assurer que les élèves sont capables d'interpréter la règle portant sur les écritures chiffrées en se référant au matériel. C'est la garantie d'une authentique compréhension.

Une activité, de ce point de vue, est particulièrement importante. Les élèves sont confrontés à une configuration de valises et boites comme celle-ci :

On leur demande combien il y a d'unités en tout (la réponse 260 est facilement accessible) et combien il y a de groupes de 10 en tout. Mais comme certains enfants apprennent à répondre en utilisant une règle qu'ils ne comprennent pas, il est très important, dès que l'on a le moindre doute sur la « bonne réponse » (26) qu'a fournie tel ou tel élève, de ne pas s'en contenter et de s'assurer qu'il comprend les raisons d'une telle réponse en le questionnant : « *Mais je ne vois pas les 26 groupes de 10, je n'en vois que 6 !* » L'élève doit être capable d'expliciter l'emboitement des groupes de 10 dans le groupe de 100. Cette contre-suggestion (l'enseignant feint de ne pas comprendre qu'il y a 26 groupes de 10 en tout) est le meilleur moyen de s'assurer que c'est le cas.

Mettre d'emblée l'accent sur cette propriété : l'importance des « premières rencontres »

Dans *J'apprends les maths CE2*, lors de la première dictée de nombres à 3 chiffres, l'enseignant dit : « *Écrivez en chiffres le nombre que je vous dicte : 14 dizaines et 3 unités.* » Les élèves écrivent « 143 » (ils ont appris à le faire lors de la leçon !) et l'enseignant poursuit : « *Comment se dit habituellement ce nombre ?* »

De même, lors de la première dictée de nombres à 4 chiffres, l'enseignant dit : « *Écrivez en chiffres le nombre que je vous dicte : 27 centaines et 51 unités.* » Les élèves écrivent « 2 751 » (ils ont appris à le faire lors de la leçon !) et l'enseignant poursuit : « *Comment se dit habituellement ce nombre ?* »

Cela se justifie aisément : la première rencontre des élèves avec un nouveau concept arithmétique (au CE2, la première rencontre avec les nombres à 4 chiffres, par exemple), ou la première fois qu'ils étudient à nouveau un contenu de connaissance récent dans la mesure où il n'a été abordé que l'année précédente (la première fois qu'ils revoient les nombres à 3 chiffres en début de CE2, par exemple), sont des moments importants. Ces jours-là, les élèves sont en général particulièrement attentifs. C'est pour eux une sorte d'évènement (Ça y est, on étudie les nombres à 4 chiffres !). Cet évènement, en tant que tel, favorise la mémorisation et l'apprentissage. C'est pourquoi nous avons choisi, lors de cette première rencontre, de mettre l'accent sur les significations les moins typiques, celles qui ne sont pas véhiculées par le langage quotidien : « deux cent soixante, c'est 26 groupes de 10 » et « quatre mille deux cents, c'est 42 groupes de 100 ».

Mémoriser les résultats d'opérations élémentaires

Parmi toutes les relations numériques qu'il est nécessaire qu'un élève mémorise, les résultats d'opérations élémentaires (6 + 9 = ? ; 13 – 6 = ? ; 4 x 8 = ? ; 27 : 3 = ?) figurent évidemment en bonne place.

Cela peut surprendre, mais l'accès à la connaissance d'une relation numérique telle que « cinq plus sept, égale douze » est un processus psychologique extrêmement difficile à étudier. Il suffit d'avoir vu des enfants de maternelle qui savent précocement réciter que « un et un, deux ; deux et deux, quatre ; quatre et quatre, huit » alors qu'ils ne savent pas ce que signifient les mots « quatre » et « huit », pour prendre conscience qu'un apprentissage purement « par cœur » est susceptible de conduire à un comportement qui donne seulement l'illusion d'une telle connaissance. La seule association verbale des mots ne conduit pas à une authentique connaissance des relations numériques.

Mémorisation, appropriation de procédures et… compréhension

En fait, pour qu'on puisse parler d'une authentique connaissance numérique, il faut que l'enfant soit capable d'interpréter en termes d'actions ce qu'il énonce verbalement : concernant « quatre plus quatre égale huit », par exemple, cela signifie que si je réunis une collection de 4 objets à une autre ayant elle aussi 4 objets, et si je dénombre le tout, je trouve le même résultat que si j'avais dénombré d'emblée une collection de 8 objets. Réunir, dénombrer, c'est mettre en œuvre des savoir-faire… En mathématiques, la connaissance verbale des relations numériques garde donc partie liée avec des procédures.

Avançons une définition des relations numériques : elles sont l'expression verbale et condensée du fait que des procédures différentes conduisent au même résultat. « 4 fois 8, 32 », par exemple, signifie que si je réunis 4 collections de 8 unités et si je dénombre le tout ainsi formé, j'obtiens le même résultat que si je forme différemment une collection de 32 unités (en comptant 1 à 1, par exemple). Ainsi, la connaissance de relations numériques renvoie au fait qu'il existe une pluralité de stratégies pour résoudre telle ou telle tâche numérique.

Précédemment dans ce chapitre, nous avons vu que la compréhension des opérations arithmétiques renvoie au fait qu'un enfant dispose d'une pluralité de stratégies, que la compréhension de l'écriture d'un nombre renvoie elle aussi à la possibilité d'une pluralité de stratégies de construction d'une collection ayant ce nombre d'éléments. Concernant les relations numériques, leur compréhension renvoie également au fait que des stratégies différentes conduisent au même résultat. Le fait de disposer de plusieurs stratégies, c'est-à-dire le fait d'être dans un rapport stratégique aux tâches apparait ainsi comme une caractéristique très générale de la compréhension.

Mémorisation et compréhension ayant ainsi partie liée, il n'est guère étonnant qu'une des principales caractéristiques des élèves en difficulté grave et durable dans leurs apprentissages numériques soit… qu'ils ne mémorisent pas les relations numériques les plus élémentaires, à savoir les résultats des additions dont chacun des termes est inférieur à dix[19]. Toutes les études sur la difficulté en arithmétique élémentaire montrent en effet que les élèves en difficulté grave et durable dans leurs apprentissages numériques sont des enfants qui ne disposent que d'une procédure pour trouver le résultat d'additions élémentaires : le comptage 1 à 1. On peut considérer que, chez ces élèves, l'absence de mémorisation est en grande partie le résultat d'une absence de compréhension.

Un tel phénomène concerne évidemment les enseignants de CE2 : parmi les élèves qu'ils reçoivent dans cette classe, certains sont des enfants « compteurs invétérés » et l'une de leurs priorités doit évidemment être de permettre à ces élèves d'accéder à d'autres stratégies. Or, les recherches dans le domaine tendraient à prouver que cela s'effectue différemment dans le cas de l'addition / soustraction et dans celui de la multiplication.

19. Geary, D.C. (2005). Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. *In* M.-P. Noël (Ed) : *La Dyscalculie*. Marseille : Solal.
INSERM (2007) *Dyslexie, Dysorthographie, Dyscalculie – Bilan des données scientifiques*. Paris : Les éditions Inserm.

Plus d'association verbale pour la multiplication que pour l'addition et la soustraction

Lorsqu'on interroge un adulte cultivé à brûle-pourpoint : « *quatre fois huit ?* », la réponse, « 32 », fuse ; lorsque la question posée est « *onze moins trois ?* », la réponse est rapide, mais elle l'est moins. On a l'impression qu'il y a plus d'association verbale dans le cas de la multiplication que dans celui de la soustraction. Et lorsque la question posée est « *huit plus quatre ?* », on a, là encore, l'impression que la réponse ne s'impose pas d'emblée comme le fait « 32 » après l'interrogation « *quatre fois huit ?* ».

Ce n'est pas qu'une impression : les psychologues, en se basant sur divers moyens d'investigation expérimentaux tels que la mesure des temps de réponses, ont montré que les résultats élémentaires d'additions et de soustractions, d'une part, et de multiplications, d'autre part, semblent stockés différemment en mémoire. Ils parlent de *connaissances procédurales automatisées* dans le cas de l'addition et de la soustraction, de *connaissances déclaratives* dans celui de la multiplication[20].

Dire que les résultats d'additions et de soustractions élémentaires sont des connaissances procédurales automatisées signifie qu'ils sont reconstruits à chaque fois. Mais ils le sont de manière si fulgurante et cela est si peu couteux en ressources cognitives que nous n'avons même pas conscience de cette reconstruction.

Un phénomène d'automatisation familier est celui de la conduite automobile. Souvent, un conducteur débutant ne supporte aucune distraction, il ne supporte même pas qu'on lui parle quand il est au volant ; en revanche, cette activité de parole devient facile et ordinaire lorsque la conduite est plus automatisée. Ce qu'on appelle le processus d'automatisation d'une procédure renvoie donc à l'idée suivante : avec l'exercice, son exécution nécessite de moins en moins de ressources cognitives, laissant ainsi la possibilité de faire autre chose en même temps.

Avec l'exercice, donc, le calcul des additions et des soustractions élémentaires s'automatise, du moins lorsqu'il s'agit réellement d'un calcul, c'est-à-dire lorsque l'élève n'est pas obligé de retrouver le résultat en comptant 1 à 1. En effet, toutes les procédures ne s'automatisent pas au point de permettre un accès rapide au résultat.

20. Fischer, J.P. (1992). *Apprentissages numériques : la distinction procédural/déclaratif.* Nancy : Presses universitaires.
Fanget M., Thevenot C., Castel C., Fayol M. (2011). Retrieval from memory or procedural strategies for addition problems : The use of the operand-recognition paradigm in 10-year-old children. *Swiss Journal of Psychology*, Vol 70(1), 35-39.

La clé de la mémorisation des résultats d'additions élémentaires : l'usage de stratégies d'appui sur 10

Un appui exclusif sur le comptage n'aide pas, voire empêche la mémorisation des résultats d'additions.

Un grand nombre d'élèves entrent au CE2 sans avoir mémorisé les résultats des additions et des soustractions élémentaires. Confrontés au calcul de « neuf + sept », par exemple, ils comptent au-dessus de neuf. Ils disent : neuf, dix (1 doigt est levé), onze (2), douze (3), treize (4), quatorze (5), quinze (6), seize (7). Or, pour mémoriser le résultat de cette addition, il faut relier directement « neuf plus sept » et « seize » ; l'élève qui compte 1 à 1 au-dessus de neuf prononce 7 mots-nombres différents (de neuf à quinze) entre l'énoncé du calcul « neuf plus sept » et son résultat « seize ». Cela a pour conséquence que l'énoncé du problème a disparu de ce qu'on appelle sa « mémoire de travail » quand le résultat y figure enfin : tous les mots prononcés entre « neuf plus sept » et « seize » sont autant de parasites verbaux à la mémorisation.

En fait, même lorsque le résultat d'un calcul est mémorisé sous la forme d'une procédure automatisée, on peut considérer qu'un minimum d'association verbale est nécessaire entre l'énoncé du calcul et son résultat. Le comptage 1 à 1 ne l'autorise pas. Par conséquent, il ne conduit pas à la mémorisation. Une preuve de ce phénomène est évidemment le cas des élèves en difficulté grave et durable dans leurs apprentissages numériques : des stagiaires à l'IUFM ont observé que 3 élèves sur 4 environ n'ont pas mémorisé les résultats d'additions élémentaires en sixième de SEGPA. Ces élèves ont reconstruit des centaines, voire des milliers de fois les résultats des additions élémentaires, mais ils l'ont fait par comptage 1 à 1, ils ne les ont pas mémorisés.

Une première condition de la mémorisation : inclure des relations numériques connues dans une procédure de comptage

Si les résultats d'additions et de soustractions élémentaires se mémorisent en automatisant des procédures et si celles-ci ne sont pas des procédures de comptage 1 à 1, une question se pose : de quelles procédures s'agit-il ?

Il s'agit de procédures où l'on s'appuie sur 10 pour trouver le résultat, telle la stratégie que l'on appelle un « passage de la dizaine » : 9 + 7 = 9 + 1 + 6 ou 7 + 4 = 7 + 3 + 1.

Cette stratégie permet une association beaucoup plus directe entre l'énoncé du calcul et son résultat. Lorsqu'un enfant dit : « neuf plus sept égale… neuf plus un… dix et encore six, seize », il prononce beaucoup moins de ces mots-nombres dont nous avons dit qu'ils sont des parasites verbaux : ceux qui se situent entre les données du calcul et son résultat.

Une preuve du fait que l'automatisation de cette procédure conduit, elle, à la mémorisation des résultats d'additions élémentaires réside dans la précocité de cette mémorisation chez des élèves qui en font un usage massif, parce que leur langue favorise son emploi et parce qu'elle leur est systématiquement enseignée : les élèves asiatiques.

Une deuxième condition de la mémorisation : utiliser la commutativité de l'addition

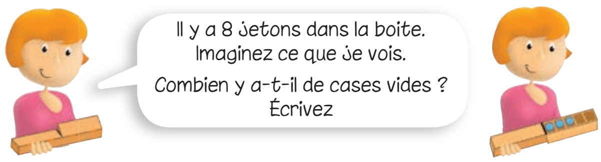
Une autre condition de la mémorisation consiste évidemment à ne pas calculer 4 + 9, mais 9 + 4 parce que le résultat est le même (propriété qu'on appelle la « commutativité » de l'addition) et parce que 9 + 4 conduit à un calcul beaucoup plus rapide, favorisant mieux l'association verbale. Il est évidemment possible d'obtenir le résultat en cherchant le complément de 4 à la dizaine supérieure (4 + 9 = 4 + 6 + 3), mais cela nécessite l'accès à deux décompositions qui ne sont pas immédiatement disponibles : 4 + ? = 10 et 9 = 6 + ?. Les décompositions utilisées après l'emploi de la commutativité (9 + ? = 10 et 4 = ? + 3) sont beaucoup plus disponibles chez un élève parce qu'elles reflètent une propriété fondamentale de la suite numérique : le nombre suivant un nombre donné exprime le résultat de l'ajout d'une unité.

Le choix de *J'apprends les maths* : enseigner et automatiser la stratégie de passage du 10

Remarquons que ce choix pédagogique, favoriser l'emploi de stratégies de passage par la dizaine, plutôt que celui de stratégies de comptage 1 à 1, fut longtemps celui de l'école française avant que, vers 1990, de nombreux pédagogues ne préfèrent, au contraire, centrer leur enseignement sur l'apprentissage du comptage 1 à 1. Dès 1990, une spécificité de *J'apprends les maths* fut de perpétuer cet aspect de la culture pédagogique française : ne jamais favoriser le comptage 1 à 1 chez les élèves en leur proposant systématiquement des stratégies alternatives. Rappelons certaines caractéristiques essentielles de la progression permettant aux élèves de s'approprier la stratégie de passage de la dizaine en commençant par l'apprentissage d'un prérequis à la mise en œuvre de cette stratégie : celui des compléments à 10.

Apprendre les compléments à 10 dans des situations d'anticipation du résultat d'une action

Donnons d'abord un exemple d'une telle situation d'anticipation :



Phase d'anticipation.

Phase de validation : l'enseignant bascule la boite.

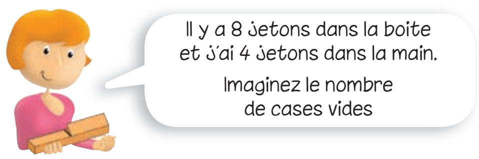
Dans ce cas, il s'agit d'anticiper le nombre de cases vides d'un cadre matériel de 10 cases (avec deux compartiments de 5) lorsque 8 d'entre elles sont remplies. Ou encore : il s'agit d'anticiper le nombre de jetons qu'il faudrait ajouter pour qu'il y en ait 10. Il s'agit donc d'anticiper le résultat d'une action.

Il est important d'analyser ce type de situations parce que, comme cela a déjà été signalé, on demande fréquemment aux élèves qui utilisent *J'apprends les maths* d'anticiper le résultat d'une action (voir, par exemple, la situation d'introduction de la division euclidienne dans le chapitre 2 de cette présentation). Les élèves y prennent conscience de la différence entre l'activité mathématique et la devinette : contrairement à la devinette, l'élève qui raisonne correctement réussit systématiquement. Par ailleurs, la situation est auto-corrective : comme l'enjeu du raisonnement arithmétique est d'anticiper le résultat d'actions avant qu'elles ne soient effectivement réalisées, il suffit de procéder à ces actions (ici, ajouter 3 jetons et observer que la boite est pleine) pour valider ou non l'anticipation.

Dans ce type de situation pédagogique, les enfants prennent ainsi conscience que l'enjeu des tâches arithmétiques se situe dans les transactions avec le monde des objets. Il ne s'agit pas seulement, comme le pensent tant d'enfants en difficulté, de deviner la réponse verbale qui ferait plaisir à l'enseignant.

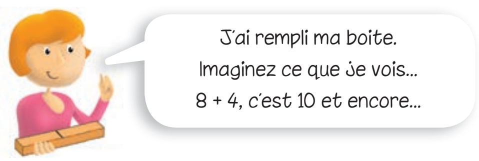
La simulation mentale d'un passage de la dizaine que le maitre réalise de façon masquée

Mais les situations d'anticipation utilisant la boite de Picbille favorisent l'apprentissage du calcul mental pour une autre raison, plus fondamentale encore. Considérons, par exemple, la situation utilisée pour enseigner le « passage de la dizaine » : 8 + 4 = (8 + 2) + 2. L'enseignant commence par mettre 8 jetons dans la boite sans que les élèves en voient l'intérieur. Puis il annonce :



L'enseignant réalise alors l'ajout, mais toujours de façon à ce que les élèves ne puissent voir l'intérieur de la boite ni le contenu de sa main gauche :

Il interroge alors les élèves sur le résultat de son action :



Les élèves sont ainsi conduits à simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de façon masquée. Or, les recherches en neuropsychologie[21] montrent que l'apprentissage repose grandement sur ce type de processus mentaux. Au-delà des travaux scientifiques, on en comprend bien les raisons en considérant la phase de validation :

Phase de validation : l'enseignant reconstitue la situation initiale tout en basculant la boite et en ouvrant la main. Il peut ensuite réaliser l'action de manière visible.

21. Voir, par exemple, Rizzolatti, G. & Sinigaglia, C. (2008), *Les Neurones miroirs*, Paris, Odile Jacob.

Lorsque les élèves sont seulement confrontés à une situation comme celle qui est utilisée ici pour la validation, c'est-à-dire une situation où le complément à 8 est d'emblée visible, où la collection ajoutée est elle aussi visible et donc facilement décomposable, la plupart d'entre eux se trouvent en grande difficulté dès que le matériel n'est plus présent.

Simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de manière masquée oblige à reconstituer mentalement les données correspondant aux différentes étapes de la procédure :

– Que faut-il ajouter pour remplir la boite de 10 ?

– Combien restera-t-il dans la main ?

De plus, cela oblige à gérer mentalement l'enchainement de ces étapes. Devenir capable de le faire rend autonome dans la mise en œuvre de cette procédure.

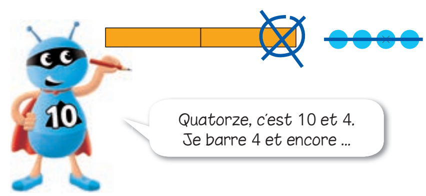
La mémorisation des additions et des soustractions : des processus proches

Comme nous l'avons déjà vu, un adulte n'utilise pas la même stratégie de calcul mental pour déterminer 102 – 6 et 102 – 94. Pour calculer 102 – 6, les adultes procèdent généralement par retraits successifs, c'est-à-dire en reculant sur leur file numérique mentale ; ils font : (102 – 2) – 4 = 96. En revanche, pour calculer 102 – 94, ils calculent par compléments successifs, c'est-à-dire en avançant sur leur file numérique mentale : à partir de 94, il faut 6 pour aller à 100 ; et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout.

Cela reste vrai concernant les soustractions élémentaires ; l'adulte qui a automatisé les calculs correspondants ne s'en rend plus compte, mais, à son insu, son activité mentale est différente. De même que la mémorisation des résultats d'additions élémentaires résulte à la fois de l'usage de la commutativité et de l'automatisation de la stratégie d'appui sur 10, la mémorisation des résultats de soustraction résulte à la fois de l'appropriation des deux grandes stratégies de calcul possibles (retraits successifs et compléments successifs) et de l'automatisation de ces stratégies lorsqu'elles sont mises en œuvre en s'appuyant sur 10. Le mode de représentation des nombres comme Picbille est particulièrement bien adapté pour cet enseignement.

Le calcul de 14 – 6, par exemple, est enseigné de la manière suivante (*cf.* séquence 3) :

Picbille calcule 14 – 6



Vérifie et complète. 14 – 6 = ...

Et celui de 13 – 9 ainsi (*cf.* séquence 8) :

Picbille calcule 13 – 9

Vérifie et complète. 13 – 9 = ...

Comme dans le cas de l'addition, une activité de simulation mentale d'un retrait que l'enseignant réalise de manière masquée favorise le progrès.

Rappelons que dans *J'apprends les maths* ces deux types de stratégies sont enseignées dès le CP. En revanche, dans de nombreuses méthodes, on retarde cet enseignement pour privilégier la stratégie où le résultat est obtenu en reculant 1 à 1 par comptage à rebours ; les élèves les plus fragiles s'enferment dans cette stratégie et il conviendra donc, au CE2, de consacrer une partie du temps d'aide individualisée à leur appropriation.

La clé de la mémorisation des résultats de multiplications : un apprentissage moderne des tables traditionnelles

À la base de tout choix pédagogique concernant la mémorisation des résultats des multiplications élémentaires, il y a la prise en compte du fait que celle-ci mobilise grandement l'association verbale.

C'est ce qui a conduit certains psychologues à penser qu'un apprentissage basé sur la seule association entre les différents calculs et leurs résultats pourrait constituer la meilleure méthode d'apprentissage. Ils appellent une telle méthode un apprentissage par « drill ». Dans ce cas, l'enseignant écrit un calcul quelconque au tableau (4 x 8, par exemple), et les élèves doivent écrire le résultat sur leur ardoise. L'enseignant attend quelques secondes et écrit lui-même la réponse au tableau. à aucun moment il ne favorise la reconstruction d'un résultat qui ne serait pas encore connu. Les psychologues qui défendent une telle approche préconisent souvent de commencer la mémorisation par les faits les plus difficiles (ceux qui concernent les grands nombres, notamment) pour que leur mémorisation s'effectue sur une plus longue durée.

Les méthodes s'opposant à celle-ci sont celles où l'enseignant favorise l'emploi d'une stratégie de reconstruction d'un résultat lorsque celui-ci n'est pas encore connu par cœur. C'est ce qui a été préconisé pour l'addition avec l'emploi d'une stratégie comme le « passage de la dizaine ». On parle souvent dans ce cas d'apprentissage « conceptuel » : l'élève, en effet, est conduit à choisir une stratégie parmi celles qui sont possibles et, donc, l'apprentissage est bien « conceptuel » au sens où nous avons défini ce mot.

Pour un pédagogue, il peut paraitre surprenant que des psychologues défendent l'idée de la supériorité d'un apprentissage par « drill » sur un apprentissage conceptuel. Cependant, l'usage de stratégies de reconstruction n'a pas que des avantages : les élèves sont susceptibles de se tromper dans la mise en œuvre de ces stratégies, et s'ils se trompent plusieurs fois de la même manière concernant un résultat, le risque est grand qu'ils mémorisent l'erreur correspondante. Les recherches ont montré qu'avec la multiplication, c'est effectivement ce qu'on observe : les erreurs consistent très souvent à proposer le résultat d'une multiplication proche[22]. Ce phénomène est très pénalisant parce que cette sorte d'erreur, lorsqu'elle est installée, interfère avec la réponse correcte : l'enfant hésite entre les deux réponses. De plus, un enfant qui subit de telles « interférences » risque de les subir toute sa vie durant. Jamais il ne sera sûr de lui dans la connaissance du répertoire multiplicatif, ce qui le handicapera grandement dans l'exécution d'un grand nombre de calculs mentaux.

Pour autant, aucun résultat expérimental n'a, à ce jour, prouvé une quelconque supériorité d'un apprentissage par « drill ». On comprend mal, par ailleurs, la façon dont un enseignant pourrait s'y prendre pour que les enfants apprennent seulement par « drill » : est-il réellement possible d'empêcher un élève de chercher à reconstruire un résultat lorsqu'il ne le Connait pas encore par cœur ?

C'est pourquoi, plutôt que d'abandonner l'idée d'un apprentissage où l'on abandonne toute idée de reconstruction d'un résultat, il convient de s'interroger sur la possibilité d'un apprentissage qui risquerait moins de conduire au phénomène d'interférences parce que la reconstruction, quand elle est nécessaire, se fait d'une seule façon, toujours la même. Or, un tel apprentissage existe : il repose sur un enseignement « moderne » des tables de multiplication traditionnelles. Montrons-le en comparant les deux principaux scénarios didactiques utilisés aujourd'hui dans le système scolaire français pour favoriser la mémorisation du répertoire multiplicatif :

– un premier scénario, vraisemblablement le plus fréquent, repose sur l'usage d'une table de Pythagore (damier de 10 cases sur 10 cases avec les résultats à l'intérieur : 24, par exemple, se trouve à l'intersection de la 4^{e} ligne et de la 6^{e} colonne ainsi qu'à l'inter-section de la 6^{e} ligne et de la 4^{e} colonne – ces deux cases sont symétriques par rapport à la diagonale des carrés) ; nous allons montrer que ce scénario ne favorise guère la mémorisation ;

– un second, celui que *J'apprends les maths* a introduit vers 1990, et qui consiste en un usage pédagogique repensé des tables de multiplication traditionnelles.

Un 1er scénario : l'usage d'une table de Pythagore

Dans ce scénario, tous les résultats sont travaillés d'emblée en utilisant une table de Pythagore (damier de 10 cases sur 10). Le pédagogue n'organise donc pas l'apprentissage en deux phases dans lesquelles l'enfant apprend d'abord les faits numériques comportant un petit nombre

22. Campbell, J. (1994) Architectures for numerical cognition, *Cognition*, vol 53, 1-44.

(tables de 3, 4 ou 5), puis ceux qui comportent un grand nombre (tables de 6, 7, 8 ou 9). En revanche, il s'agit d'un apprentissage conceptuel ; il s'agit même d'une forme « extrême » d'apprentissage conceptuel au sens où toutes les stratégies permettant de retrouver un résultat sont elles aussi enseignées d'emblée. Pour retrouver 4 x 6, par exemple, on enseigne à l'élève qu'il peut le retrouver de deux façons différentes en mettant en relation le résultat cherché avec celui qui correspond à « une fois de moins » :

Première stratégie : 3 x 7, c'est 3 fois 7. C'est donc 2 fois 7 et encore 1 fois 7 : 14 et 7, 21.

Deuxième stratégie : 3 x 7, c'est 7 fois 3. C'est 6 fois 3, 18 et encore 1 fois 3, 21.

A priori, on est conduit à penser qu'il est nécessairement bénéfique de mettre à la disposition des élèves plusieurs moyens de reconstruire un même résultat, comme cela se fait dans ce scénario. Considérons cependant les erreurs de raisonnement du type : 3 x 7 = 3 x 6 + 6. L'élève qui commet cette erreur amorce son raisonnement en utilisant la première stratégie et l'achève en utilisant l'autre. Comme le nombre qu'il obtient (24) fait partie des résultats possibles (il correspond à 3 fois 8), l'élève ne dispose d'aucun signal d'alerte concernant son erreur et il risque de la mémoriser. Ainsi, ces erreurs fréquentes et très pénalisantes que sont les « interférences » trouvent-elles souvent leur origine dans un dysfonctionnement du scénario didactique consistant à enseigner une pluralité de stratégies de reconstruction d'un résultat qui n'est pas encore connu par cœur.

Face à une multiplication telle que 4 x 6, par exemple, le choix de la stratégie la plus simple est encore plus complexe parce qu'aux deux stratégies précédentes (*Vais-je me ramener au calcul de 3 fois 6 et encore une fois 6 ou à celui de 5 fois 4 et encore une fois 4 ?*) s'en ajoute une troisième : l'élève peut également calculer 4 x 6 en cherchant le double de 2 x 6. Le choix de la stratégie la plus économique ne va pas de soi. En effet, c'est seulement après s'être engagé dans le raisonnement qu'on est susceptible de savoir si une procédure est plus économique qu'une autre. L'élève qui, face à 4 x 6, commence par s'interroger (*Vaut-il mieux m'appuyer sur 3 fois 6, sur 5 fois 4 ou doubler le résultat de 2 fois 6 ?*) a « trop raisonné » entre le moment où il lit les données et celui où il accède au résultat pour qu'il se produise de l'association verbale entre les deux. Une autre façon de le dire est la suivante : dans le cadre d'un tel scénario didactique, l'élève doit être trop attentif à la signification de chacun des termes du calcul qu'il effectue pour que cela permette un accès futur au résultat indépendamment d'une nouvelle réflexion. Ce scénario pédagogique ne favorise pas l'association verbale dont on sait qu'elle est à la base d'une bonne mémorisation.

Un 2nd scénario : un enseignement « moderne » des tables traditionnelles

Dans ce scénario, les résultats sont appris progressivement, par table (table de 5, puis de 3 et 4 ; puis, bien plus tard dans l'année, tables de 6, 7, 8 et 9). Les tables enseignées sont les tables de multiplication « traditionnelles » (ce choix est justifié plus loin) :

Table de 5 : « 5 fois 1, 5 », « 5 fois 2, 10 », « 5 fois 3, 15 », « 5 fois 4, 20 »…

Table de 3 : « 3 fois 1, 3 », « 3 fois 2, 6 », « 3 fois 3, 9 », « 3 fois 4, 12 »…

Table de 4 : « 4 fois 1, 4 », « 4 fois 2, 8 », « 4 fois 3, 12 », « 4 fois 4, 16 »…

Rappelons en effet que les tables traditionnelles, celles que l'on trouve fréquemment au dos des cahiers de brouillon, sont telles que, dans la table de *n*, toutes les lignes commencent par *n* fois… On remarquera d'ailleurs que, pour différencier les deux sortes de tables possibles, il vaut mieux qualifier différemment celles qui correspondent à l'autre possibilité : 1 fois 5, 2 fois 5, 3 fois 5…, par exemple, pour la table de 5. Il vaut mieux dire de cette table qu'elle est une table des *multiples de* 5 plutôt qu'une table de multiplication par 5.

Dans le 2nd scénario, les élèves apprennent d'abord à réciter la table de multiplication par 5 dans l'ordre, en utilisant le fait que dans cette table les résultats vont de 5 en 5 : « 5 fois 1, 5 », « 5 fois 2, 10 », « 5 fois 3, 15 », « 5 fois 4, 20 »…

Il est essentiel de remarquer que pour déterminer « 5 fois 3 », par exemple, l'élève ne calcule pas 3 + 3 + 3 + 3 + 3 parce qu'il est bien plus facile d'ajouter 5 au résultat de « 5 fois 2 » (dans la table de 5, les résultats vont de 5 en 5). L'élève ne s'appuie donc pas sur la signification du mot « fois », il s'appuie sur une règle d'organisation des résultats à l'intérieur de la table. Il est important de souligner ce fonctionnement « asémantique » du mot « fois » dans le processus de mémorisation des tables traditionnelles parce que lorsque la restitution d'une expression se fait sans être obligé d'en interpréter les termes, cela favorise l'association à un niveau phonologique plutôt que sémantique ; à terme, le résultat sera donné « sans réfléchir ».

Il est judicieux de commencer par la table de 5 (avant celles de 3 et 4) parce que la suite correspondante des résultats est simple (5, 10, 15, 20, 25…), et cela permet d'autant plus facilement de s'appuyer sur cette suite plutôt que sur la signification du mot « fois », pour énoncer les résultats.

Pour apprendre à réciter les autres tables, les élèves apprennent de même que, dans la table de 3, les résultats vont de 3 en 3 et qu'ils vont de 4 en 4 dans la table de 4. Il ne s'agit pas d'un simple entrainement, dans la mesure où il est assez simple de justifier cette propriété des différentes tables en s'aidant de collections organisées en lignes et colonnes (*cf.* séquence 28).

Jusqu'ici, ce qui vient d'être décrit correspond à l'apprentissage traditionnel des tables. Cependant, on peut parler d'un enseignement moderne lorsque deux conditions supplémentaires sont remplies :

1°) Lorsqu'on s'appuie sur une technique pédagogique moderne, le « jeu du furet », pour aider les élèves à mémoriser la suite des expressions. L'enseignant interroge les élèves au hasard. Le 1er dit « 5 fois 1, 5 » ; le suivant : « 5 fois 2, 10 »... Après « 5 fois 10, 50 », on redescend : « 5 fois 9, 45 »... On remarquera que l'élève interrogé commence toujours par dire « 5 fois... », il ne se contente pas de donner le résultat de la multiplication : en obligeant ainsi les élèves à énoncer dans leur entier les différentes relations numériques, on favorise les associations verbales et, donc, la mémorisation.

2°) Lorsque l'enseignant est attentif à prévenir le principal dysfonctionnement qu'on pourrait observer avec un tel processus d'apprentissage : que certains élèves soient obligés de réciter la table depuis le début lorsqu'on les interroge sur un résultat de la « fin de table » (3 fois 6 ?, par exemple).

Là encore, une technique pédagogique « moderne » permet d'éviter cet écueil. Pour « 3 fois 6 ? », par exemple, il suffit de faire remarquer aux élèves que le résultat figure au 6e rang dans la table de 3, juste après « 3 fois 5, 15 ». Dans un premier temps, l'usage d'une table incomplète peut servir de support au raisonnement :

Table de 3
3 fois 1, 3
3 fois 2, 6
3 fois 3,..........
3 fois 4,..........
3 fois 5,..........
3 fois 6,..........
3 fois 7,..........
3 fois 8,..........
3 fois 9,..........
3 fois 10,..........

Comme, dans la table de 3, les résultats vont de 3 en 3, le résultat cherché est : 3 fois 5, 15 (5e rang) et encore 3, 18.

S'il s'agit de déterminer « 3 fois 9 ? », par exemple, le résultat figure juste avant « 3 fois 10, 30 » dans la table de 3. Comme dans cette table les résultats vont de 3 en 3, le résultat cherché est 30 moins 3, 27.

Lorsqu'on interroge les élèves par écrit (4 x 7 ? ou 7 x 4 ?, par exemple) et lorsqu'un résultat n'est pas encore connu par cœur, l'enseignant *favorise cette même procédure de reconstruction du résultat* :

1°) Il faut déterminer dans quelle table le résultat cherché se trouve : s'il s'agit de trouver le résultat de 4 x 7 ou 7 x 4, par exemple, celui-ci se trouve dans la table de 4.

2°) Pour retrouver le résultat dans cette table, on utilise là encore le fait que dans la table de 4, les résultats vont de 4 en 4. Comme le résultat de 4 x 7 ou de 7 x 4 se trouve au 7e rang dans la table de 4, il est situé deux rangs après « 4 fois 5, 20 », c'est donc 24 et encore 4 : 28.

Les 5 raisons qui conduisent à choisir les tables traditionnelles plutôt que celle de Pythagore

Résumons les points forts du second scénario (usage « moderne » des tables traditionnelles, lorsqu'on le compare au premier – usage de la table de Pythagore) :

1°) Un premier argument en faveur du second scénario réside dans le fait que les tables permettent d'organiser ce que les élèves ont à mémoriser, au sein d'une progression où ils peuvent se concentrer dans un premier temps sur les tables de 5, 2, 3 et 4, dans un deuxième temps sur le début des tables de 6, 7, 8 et 9 et, enfin, sur ces mêmes tables complètes. Les élèves n'ont pas tout à mémoriser en même temps. Or, on sait qu'un apprentissage réparti, tel que celui-ci, conduit à de meilleurs résultats qu'un apprentissage « massé ».

2°) Un autre argument en faveur de l'usage de tables renvoie aux caractéristiques du moment du rappel plutôt qu'à celles du moment de la mémorisation. En effet, lorsque les expressions à mémoriser sont organisées en tables, chacune de ces tables étant indexée par son numéro (la table de 3, par exemple), celui-ci sert d'« *indice de rappel* ». Les psychologues utilisent cette notion pour rendre compte de phénomènes tels que celui-ci : lorsqu'on sait qu'un mot qu'il convient de se rappeler appartient à telle ou telle catégorie (c'est un mot italien ou encore le mot contient telle ou telle sonorité), le rappel s'en trouve fortement facilité. Plus généralement, on appelle *indice de rappel* toute caractéristique de ce qu'il convient de se rappeler permettant, au moment du rappel, de restreindre le champ des possibles. Or, lorsqu'on sait qu'une expression multiplicative qu'il convient de se rappeler figure dans telle table, le rappel s'en trouve facilité. Le numéro des tables est un puissant indice de rappel.

3°) L'usage des tables traditionnelles conduit à apprendre les expressions à mémoriser au sein d'une même table, dans l'ordre. Or, on sait, depuis les travaux des philosophes grecs, que l'ordre est une mnémotechnique. De plus, l'usage « moderne » de ces tables, qui vient d'être décrit, permet d'éviter tout phénomène de dépendance à cette récitation dans l'ordre.

4°) Alors que dans les deux scénarios, les élèves sont conduits à raisonner pour reconstruire un résultat qu'ils n'ont pas encore mémorisé, le second scénario (tables traditionnelles), contrairement au premier, les conduit à raisonner toujours de la même manière. Le second scénario est moins susceptible de provoquer le phénomène d'interférence qui, souvent, résulte de la confusion entre diverses manières de raisonner. De plus, le côté systématique du mode de raisonnement en réduit à la fois la longueur et le temps qu'il est nécessaire d'y consacrer ; cela favorise l'association verbale entre les termes du raisonnement et le résultat.

5°) Le second scénario, contrairement au premier, conduit les élèves à accéder aux expressions à mémoriser à partir du seul *pattern* phonologique du mot « fois », sans traiter sa signification. En effet, nous avons vu que dans la table de 4, et dans une expression telle que « 4 fois 7, 28 », par exemple, les données 4 et 7 servent respectivement d'index vers la table et d'index vers une ligne de celle-ci : le nombre « 4 » permet de savoir dans quelle table on se situe, alors que le nombre « 7 » donne le rang auquel se trouve le résultat cherché. Le mot « fois », lui, ne fait que séparer et ordonner ces deux informations. L'énoncé « 4 fois 7 » n'a donc pas à être considéré comme une expression qu'il convient d'interpréter pour en déduire un traitement numérique. L'élève n'a pas besoin de réfléchir, cela favorise l'association verbale.

Une remarque s'impose : certains des arguments précédents conduisent à préférer n'importe quel scénario d'apprentissage dans lequel les expressions à mémoriser seraient organisées en tables, et ces arguments valent donc tout autant lorsque ces tables sont les tables de multiples (celles où la table de *n* se dit 1 fois *n*, 2 fois *n*, 3 fois *n*…) que lorsqu'il s'agit des tables traditionnelles (*n* fois 1, *n* fois 2, *n* fois 3…). Une question se pose donc, à laquelle nous n'avons pas encore répondu : pourquoi choisir les tables traditionnelles plutôt que les tables des multiples ?

Les 3 raisons qui conduisent à choisir les tables traditionnelles plutôt que celles des multiples

1°) Une première raison réside dans le fait qu'avec les tables traditionnelles, le numéro de la table est le premier mot de l'expression qu'il s'agit de se rappeler : si l'interrogation porte sur « 3 fois 8… », le résultat se trouve dans la table de 3, dont tous les éléments commencent par « 3 fois… ». Or, il n'y a pas meilleur indice de rappel d'une expression que les mots par lesquels elle commence. On a tous l'expérience d'un tel phénomène : lorsqu'on a oublié une expression, il suffit souvent de se rappeler que « ça commence par… » pour y accéder dans son entier.

2°) Il suffit de se réciter l'une quelconque des tables de multiples (pour 4, par exemple : « 1 fois 4, 4 », « 2 fois 4, 8 », « 3 fois 4, 12 », « 4 fois 4… ») pour prendre conscience qu'avec ces tables on est beaucoup plus tenté qu'avec les tables traditionnelles de traiter la signification du mot « fois » pour accéder au résultat suivant. Avec les tables de multiples, donc, on procède à un traitement sémantique du mot « fois », on réfléchit, ce qui ne favorise pas l'association verbale.

3°) Enfin, un dernier argument, mais qui n'est pas le moins important, est le suivant : la forme traditionnelle des tables est celle qui permet le mieux de résoudre les problèmes de partage équitable par un petit nombre (2, 3, 4 ou 5) en s'appuyant sur la connaissance des tables de multiplication. En effet, le partage de 27 objets entre 3 personnes se simule facilement en imaginant les 3 personnes et en cherchant ce que chacune doit avoir pour que le total soit 27. Cela conduit à se demander : « 3 fois combien font 27 ? » L'ordre des nombres est bien celui de la table de 3 traditionnelle : « 3 fois 9, 27 ». Comme ce scénario de partage est celui qu'il convient de mobiliser pour les divisions par un petit nombre (voir le chapitre 2), les tables traditionnelles sont celles qui permettent le mieux de s'appuyer sur la connaissance des tables de multiplication pour retrouver les résultats des premières divisions apprises.

Dans une recherche déjà ancienne, l'examen de manuels publiés entre 1850 et 1970 avait montré que, pendant plus de 100 ans, les pédagogues ont constamment préféré l'usage des tables traditionnelles à celui des tables de multiples[23].

On comprend mieux aujourd'hui ce phénomène qui, de prime abord, peut paraitre surprenant.

La mémorisation des résultats d'additions et de multiplications : une comparaison

Nous avons commencé cette section consacrée à la mémorisation de relations numériques en soulignant une différence entre la façon dont les résultats d'additions élémentaires et les résultats de multiplications élémentaires sont stockés en mémoire : les premiers le sont sous la forme de résultats de procédures automatisées et les seconds sous la forme d'associations verbales. Cependant, au terme de l'examen de ces deux processus de mémorisation et des conditions pédagogiques les favorisant, ils apparaissent avoir plus de points communs que cela semblait le cas de prime abord.
En effet, dans les deux cas, l'automatisation de procédures est nécessaire : celle du passage de la dizaine pour l'addition, celle permettant de retrouver les résultats de la deuxième partie des tables (4 fois 6, c'est 4 fois 5, 20 et encore 4, 24, par exemple) pour la multiplication. De même, dans les deux cas, un minimum d'association verbale est nécessaire entre l'énoncé du calcul et son résultat : c'est évident concernant la multiplication, cela reste le cas concernant l'addition et c'est même ce qui explique qu'une procédure telle que le comptage 1 à 1 ne conduise pas, par automatisation, à la mémorisation.
Finalement, une différence reste : il n'existe pas, pour l'addition, de contexte de récitation des tables comme il en existe pour la multiplication. En effet, réciter une table d'addition de 3, par exemple, conduit à dire : « trois plus un, quatre ; trois plus deux, cinq ; trois plus trois, six ; trois plus quatre… ». Or, le résultat resté en suspens, « sept », s'obtient comme le suivant de « six ». Il suffit donc de savoir dire le suivant d'un nombre pour savoir réciter une table d'addition. C'est trop facile ! Cela est d'emblée trop automatique pour permettre l'association verbale nécessaire. C'est, vraisemblablement, la raison pour laquelle l'école française n'a jamais accordé aux tables d'additions l'importance qu'elle accorde aux tables de multiplications. Il est très probable que la différence observée par les psychologues dans la façon dont les additions et les multiplications élémentaires sont mémorisées ne soit, finalement, qu'une conséquence de ces contextes différents dans les conditions d'apprentissage.

23. Brissiaud, R. (1994). Penser l'usage du mot « fois » et l'interaction oral/écrit lors de l'apprentissage initial de la multiplication. *In* M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 195-202). Grenoble : La pensée sauvage.

Conclusion : le calcul mental, moteur du progrès

Évaluer à partir du calcul mental, fonder le progrès sur lui : les apports du paradigme Si- *vs* CC-problèmes

Ces apports se situent dans un domaine qui inclut la résolution des problèmes arithmétiques, la compréhension des opérations arithmétiques et le calcul mental. Faisons-en un récapitulatif. Ils sont, pour l'essentiel, au nombre de cinq :

- Le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problème permet d'évaluer le progrès des élèves dans la résolution des principaux problèmes arithmétiques en leur proposant *des tâches de calcul mental*. Plus précisément, lorsqu'on propose, pour chacun des principaux sens d'une opération, un Si-problème et un CC-problème correspondants, on a la possibilité d'évaluer à la fois la compréhension de la situation correspondante et celle de l'opération. On a de plus la possibilité de distinguer les élèves qui échouent parce qu'ils n'ont pas encore compris la situation de ceux qui l'ont comprise, mais n'ont pas encore compris l'opération. Enfin, l'évaluation de la compréhension de l'opération s'effectue de manière fine au sens où la tâche proposée permet de repérer un début de conceptualisation.
- Le paradigme Si-problèmes *vs* CC-problème permet de construire des progressions pédagogiques dans lesquelles l'enseignement respecte un ordre qui semble incontournable : on ne peut guère enseigner à des élèves une opération arithmétique lorsqu'ils ne comprennent pas les situations qui lui donnent sens. Dans les progressions correspondantes, l'enseignant utilise d'abord des Si-problèmes pour favoriser la compréhension des situations (1er moment), puis des CC-problèmes pour favoriser la compréhension des opérations (2e moment). Dans chacun de ces deux moments, la solution des problèmes peut être obtenue à l'aide de calculs simples, pouvant être conduits mentalement. Les élèves apprennent ensuite les techniques opératoires qui permettent de généraliser l'usage des opérations aux situations décrites avec de grands nombres quelconques (3e moment).
- Certains CC-problèmes, que nous avons appelés des « insight CC-problèmes », ont des caractéristiques qui conduisent à en privilégier l'usage au tout début du 2e moment, celui où l'enseignant souhaite définir explicitement l'opération arithmétique en explicitant aux élèves ses propriétés conceptuelles (*a* fois *b* et *b* fois *a* conduisent au même nombre, par exemple). Un « insight CC-problèmes » est un CC-problème et, donc, sa solution peut s'obtenir à l'aide d'un calcul simple. Cependant, en ce début de 2e moment, un obstacle important s'oppose à la réussite : l'absence de connaissance conceptuelle (les élèves ne savent pas encore que *a* fois *b* et *b* fois *a* conduisent au même nombre, par exemple). Mais les « insight CC-problèmes » ont la particularité qu'en changeant de point de vue sur la situation, la solution surgit (*cf.* le problème du ferry-boat). Ce changement de point de vue peut être considéré comme un précurseur de la connaissance conceptuelle et l'enseignant peut l'utiliser pour enseigner cette dernière. Un exemple en a été donné concernant la multiplication, un autre en sera donné dans le prochain chapitre concernant la division.
- Considérons ces problèmes qui se présentent d'emblée sous forme symbolique : 3 x 50 = ? ; 50 x 3 = ? ; 32 – 29 = ? ; 32 – 4 = ? et, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, 150 : 3 ? ; 150 : 50 ? Ces problèmes offrent la liberté d'interpréter comme on le veut chacun des termes du calcul : on peut choisir lequel des 2 nombres est le multiplicateur, par exemple. Cela a pour conséquence que leur résolution est une activité favorisant l'apprentissage du calcul mental d'une opération, donc sa conceptualisation et, finalement, la résolution des problèmes correspondants.
- Parce que leur énoncé se construit en employant deux grands nombres proches ou un grand nombre et un très petit nombre (cas de l'addition et de la soustraction), ou bien un grand nombre qui est un multiple simple d'un petit nombre (cas de la multiplication et de la division), les Si- et CC-problèmes conduisent à s'approprier des relations numériques qui vont au-delà des relations numériques élémentaires habituellement travaillées en classe : les élèves, par exemple, s'approprient les multiples de 10, 15, 25, 50, 250… Il n'y a pas de recherches scientifiques sur le sujet, mais quiconque a exercé le métier de professeur des écoles a l'impression que l'échec en mathématiques s'accompagne d'une profonde méconnaissance de ces relations numériques. Les travailler en classe ne peut être que bénéfique.

Calcul mental, compréhension et mémorisation

Trois thèmes ont été successivement abordés dans ce 1er chapitre : la compréhension des opérations, celle de l'écriture des nombres et la mémorisation des relations numériques élémentaires.

Concernant la compréhension des opérations, nous venons de récapituler toutes les raisons qui expliquent que le calcul mental favorise cette compréhension et de rappeler des aménagements pédagogiques susceptibles d'accentuer encore ce rôle bénéfique.

Concernant la compréhension de l'écriture des nombres, nous avons vu qu'elle se fonde non seulement sur la compréhension de la décomposition canonique liée à ces écritures (432 = 4 x 100 + 3 x 10 + 2), mais aussi sur la compréhension des relations du type 432 = 43 x 10 + 2. Et nous avons vu que cette compréhension est liée à des compétences en calcul mental : le calcul mental d'une multiplication ou d'une division par 10 notamment.

Concernant la mémorisation des relations numériques élémentaires, nous avons souligné le rôle des stratégies de calcul mental d'appui sur 10 pour mémoriser celles d'addition et de soustraction. Et nous avons finalement montré que la mémorisation des résultats de multiplication, même si elle s'appuie sur la récitation de tables, nécessite l'usage de stratégies de calcul où l'on s'appuie sur les repères 5 et 10 pour retrouver les résultats de la fin des tables.

Ainsi, qu'il s'agisse de la compréhension des opérations, de celle des écritures ou de la mémorisation des relations numériques élémentaires, nous avons explicité de nombreuses raisons qui expliquent que le calcul mental joue un rôle moteur dans le progrès. Comme ces trois domaines couvrent ensemble l'essentiel des connaissances à acquérir en arithmétique élémentaire, on s'explique mieux un phénomène bien établi par diverses recherches récentes : de bonnes compétences en calcul mental constituent une sorte de passeport vers la réussite en mathématiques.

Par conséquent, il convient évidemment d'accorder beaucoup d'importance au calcul mental à l'école élémentaire. Mais la portée des analyses proposées ici va bien au-delà d'un tel conseil qui est devenu banal aujourd'hui. C'est en effet le conseil que donnent de nombreux inspecteurs, tout en sollicitant les professeurs des écoles de leur circonscription afin qu'ils construisent des « progressions en calcul mental ».

Avouons-le : nous serions bien en peine de répondre à une telle demande. En effet, telle que cette demande est exprimée, une progression en calcul mental semble conçue comme venant se juxtaposer aux progressions concernant les opérations, la résolution de problèmes… alors que nous avons essayé de montrer que le progrès en calcul mental et le progrès dans les autres domaines ne sont le plus souvent que les deux faces d'une même réalité : la compréhension ou encore la conceptualisation arithmétique. C'est constamment que l'on doit viser le progrès en calcul mental, et pas seulement dans une progression d'activités qui viennent se juxtaposer aux autres. C'est le cas lorsqu'on adopte, comme nous l'avons recommandé, une progression en trois temps, successivement centrés sur l'apprentissage de la résolution des Si-problèmes, celui des CC-problèmes et enfin la résolution des problèmes avec des nombres quelconques, à l'aide des techniques opératoires.

Signalons à ce propos que ce n'est pas parce que nous recommandons d'enseigner les techniques opératoires dans un 3e moment seulement que nous considérons cet enseignement comme peu important. Pour se convaincre du contraire, il suffit de remarquer qu'entre 1996 et 2008, *J'apprends les maths* était la seule méthode à enseigner la division posée dès le CE2. Utiliser une technique opératoire impose de se remémorer les relations numériques élémentaires (les résultats de divisions par 2, 3, … 9, par exemple) et cela consolide la connaissance de ces relations numériques. Il ne faut pas différer cet enseignement au-delà de ce qui est raisonnable.

Une comparaison avec d'autres choix pédagogiques

Un autre moyen de montrer que toute pédagogie qui inclut des activités de calcul mental ne correspond pas à ce qui est recommandé ici consiste à comparer nos propositions pédagogiques aux deux autres propositions qui, aujourd'hui, ont une certaine influence : celle qui correspond à ce qu'on peut appeler la « pédagogie traditionnelle » et celle correspondant à la pédagogie qui était préconisée dans les programmes officiels de 2002 et dans leurs documents d'accompagnement. Cette comparaison a déjà été esquissée au cours de ce chapitre. Rappelons-en les principaux points déjà abordés, sachant que d'autres développements ne sont guère possibles dans le cadre de ce *Livre du maitre*.

Lorsqu'on souhaite analyser l'évolution des pratiques pédagogiques concernant les apprentissages numériques à l'école, 3 grandes périodes peuvent être distinguées :

- La période 1880 - 1970 (date de la réforme dite des « mathématiques modernes »), période pendant laquelle les maitres enseignaient d'emblée les 4 opérations avec de petits nombres, puis les techniques opératoires afin d'étendre aux grands nombres ce qui avait été appris avec les petits.

Une des caractéristiques de cette pédagogie était d'introduire très tôt les signes arithmétiques dans les situations typiques (soustraire = retirer, diviser = partager), au risque d'enfermer les élèves dans ces significations. Une autre caractéristique était d'enseigner très tôt les techniques posées, sans s'être auparavant assuré que les enfants comprennent les situations et se sont approprié les propriétés conceptuelles des opérations.

Signalons quand même que cette pédagogie ne manquait pas de points forts, notamment concernant la mémorisation des relations numériques.

- La période 1970 - 1990, celle qui a suivi la réforme des mathématiques modernes de 1970. L'influence de cette réforme est, en effet, restée assez forte pendant une vingtaine d'années. Elle a été très critiquée, et, pourtant, des recherches récentes[24] montrent qu'en 1987, soit plus de 15 ans après la réforme des mathématiques modernes, les écoliers français calculaient encore bien, bien mieux qu'aujourd'hui en tout cas. Une analyse circonstanciée des points forts et faibles de cette réforme reste à faire, mais il semble bien que le tournant majeur expliquant la baisse des performances en calcul se soit produit en 1990 (et non en 1970). C'est l'époque en effet où l'on a assisté à une réhabilitation d'une forme de comptage qui a des effets délétères sur les élèves les plus fragiles : le comptage où l'on insiste sur la correspondance 1 à 1 entre les nombres et les objets comptés[25].

24. DEPP (2009). *Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle* 1987-2007. Note d'information 08.38.
25. Brissiaud, R. (2011). *L'évaluation, le comptage mécanique et la dégradation des performances en calcul*. Entretien mis en ligne sur le site du SNUipp : www.snuipp.fr/IMG/pdf/EvaluationComptageDegradation.pdf

• La période 1990 - 2008, qui se caractérise par l'influence de deux grands courants d'idées. Le premier, largement diffusé par les ouvrages de la collection ERMEL[26], a trouvé son manifeste dans les programmes officiels de 2002 et leurs documents d'application. Au-delà de la réhabilitation d'une forme de comptage honnie depuis près de 50 ans, ce courant d'idées se caractérisait par une attention extrême à ce que les programmes appelaient les « procédures personnelles » des élèves et par un manque d'attention manifeste à la conceptualisation des opérations arithmétiques.

Rappelons que nulle part dans les programmes de 2002 il n'était dit que la propriété essentielle de la division est d'être un traitement commun aux problèmes de quotition et de partition. Dans ces programmes toujours, il était explicitement recommandé, au CP et au CE1, d'enseigner le calcul d'une soustraction par la seule stratégie où l'on recule sur la suite des nombres, alors qu'enseigner à la fois le calcul en avançant et en reculant est un des meilleurs moyens pédagogiques de favoriser la conceptualisation de cette opération. Bien d'autres exemples pourraient être avancés de ce manque d'attention à la conceptualisation des opérations.

Mais pendant la même période, de nombreux enseignants ont choisi d'utiliser *J'apprends les maths*, c'est-à-dire de se référer à un cadre théorique sensiblement différent : celui qui est exposé ici dans sa version la plus récente. Ce cadre théorique, articulé autour de la problématique de la conceptualisation, est évidemment très différent de celui qu'on trouvait dans les ouvrages de l'équipe ERMEL. Il l'est tout autant du cadre théorique traditionnel qui s'articulait autour du paradigme « problèmes avec de petits nombres *vs* problèmes avec de grands nombres ». Concernant la compréhension des opérations arithmétiques, on ne peut guère douter du fait que l'approche présentée ici est préférable à celle de la pédagogie traditionnelle.

Et concernant la mémorisation des relations numériques élémentaires ? Nous avons dit que c'était un des points forts de la pédagogie traditionnelle. C'est d'ailleurs ce qui explique que de nombreuses personnes, dont certaines sont à l'origine des programmes de 2008, prônent un retour à ce cadre théorique. Cependant, même dans le domaine de la mémorisation des relations numériques, nous avons essayé de montrer ici qu'avec les connaissances scientifiques disponibles, on peut aujourd'hui faire mieux que la pédagogie traditionnelle. Surtout lorsqu'on n'hésite pas à utiliser certains de ses outils, les tables de multiplication, par exemple.

26. ERMEL signifie : Équipe de Recherche en Mathématiques Élémentaires. Les ouvrages évoqués ici ont été publiés à partir de 1990 aux éditions Hatier.

Chapitre 2

De l'étude scientifique du progrès à l'élaboration d'une progression : l'exemple de la division

PLAN DU CHAPITRE

- Les résultats expérimentaux concernant la quotition et la partition sans reste
- Le début de la progression : faire comprendre la quotition et la partition avant d'introduire les mots *division*, *quotient*…
  – En début d'année, résoudre des Si-problèmes de quotition et de partition sans reste
  – Le choix de ne pas enseigner les écritures du type « 27 : 3 = 9 »
- Les résultats expérimentaux concernant la quotition et la partition avec reste
- La suite de la progression : introduire les mots *division*, *quotient*, *reste* et leur notation
  – Les premières divisions avec reste : des Si-problèmes de quotition par 10, 15, 25, 50…
  – Un « insight CC-problème » qui permet de faire le lien avec la partition
  – Apprendre la division avec reste dans le cas des divisions élémentaires : « 13 : 2 ? », « 26 : 3 ? », « 21 : 4 ? », etc.
  – Apprendre la division avec reste d'un grand nombre par 2, 3, 4, 5…
- Conclusion : une progression qui favorise la compréhension et le calcul de la division

Dans le premier chapitre, nous avons analysé la façon dont les enfants progressent dans leur compréhension des opérations arithmétiques en nous appuyant principalement sur des exemples de problèmes de soustraction et de multiplication.

Nous avons montré que pour chacun des principaux sens de ces opérations, on peut définir deux sortes de problèmes dont les énoncés sont rédigés avec les mêmes mots et qui ont en commun de pouvoir être résolus mentalement par un adulte cultivé. Ce sont :

- des Si-problèmes dont les données numériques sont choisies afin qu'il suffise de Simuler mentalement la Situation pour accéder à la solution numérique ;
- des CC-problèmes dont les données numériques sont choisies de sorte que la solution numérique puisse toujours s'obtenir à l'aide d'un calcul mental, mais qui diffèrent des problèmes précédents parce qu'on n'accède à ce calcul mental de la solution qu'en utilisant des connaissances conceptuelles : la commutativité dans le cas de la multiplication, le fait que la recherche d'un complément et celle du résultat d'un retrait soient substituables dans le cas de la soustraction.

Nous avons montré l'intérêt d'une progression où l'enseignant distingue 3 temps :

– Un 1er temps basé sur la résolution de Si-problèmes qui vise à ce que les élèves comprennent les situations correspondant aux principaux sens des opérations.

– Un 2e temps basé sur la résolution de CC-problèmes qui vise à ce que les élèves s'approprient les propriétés conceptuelles des opérations.

– Un 3e temps où l'on apprend une technique opératoire et qui permet d'étendre les compétences acquises précédemment aux problèmes avec des nombres quelconques.

Nous avons enfin donné des exemples de situations-problèmes que nous avons appelées « insight CC-problèmes », qui visent à ce que le plus grand nombre possible d'élèves découvrent les propriétés conceptuelles des opérations. Leur usage pédagogique se situe en début de 2e temps.

Concernant la soustraction, pour calculer 32 – 29, par exemple, on crée une situation où, face à 32 jetons, il faut en retirer 29. Mais les 32 jetons sont organisés linéairement en 10 + 10 + 10 + 2 (dans une « file de boites de Picbille », par exemple). Cela « oriente » la représentation des jetons ; ils sont comme numérotés. Il suffit alors d'imaginer que les 29 jetons que l'on retire sont les 29 premiers (10 + 10 + 9) pour que cela conduise à calculer le résultat par une procédure de complément : 29, pour aller à 30, il faut 1 ; et encore 2, le résultat est 3.

Concernant la multiplication, si, dans un problème, les objets sont décrits comme organisés en 50 colonnes de 3 objets, il suffit de favoriser un changement de point de vue sur cette situation pour s'apercevoir qu'on peut également considérer qu'il y a 3 lignes de 50 objets.

Ces problèmes sont appelés des « insight problèmes » parce que, bien que leur résolution ne puisse pas être considérée comme simple, lorsqu'on accède à cette solution ou lorsqu'on nous l'explique, elle acquiert d'emblée un statut d'évidence (on parle aussi de ah-ah problèmes).

Les questions posées dans ce chapitre sont donc les suivantes :

1°) Dispose-t-on pour la division de résultats expérimentaux prouvant qu'on peut définir des Si-problèmes et des CC-problèmes pour chacun des 2 principaux sens de cette opération : la quotition (en *a* combien de fois *b* ?) et la partition (*a* est égal à *b* fois combien ?).

2°) Et si on dispose de tels résultats, que deviennent les 3 temps pédagogiques distingués avec les autres opérations, sachant que la situation est plus complexe dans le cas de la division : lorsque *a* est un multiple de *b*, la plupart des pédagogues considèrent que les problèmes à résoudre sont plus faciles que lorsque ce n'est pas le cas. Lorsque *a* est un multiple de *b*, on parle souvent de « division sans reste », mais on pourrait tout aussi bien parler de « division avec un reste nul ». L'une des deux façons de présenter ces situations aux élèves est-elle préférable ?

3°) Au cas où le cadre théorique présenté dans le chapitre 1 resterait valable pour la division, en l'adaptant au besoin, existe-t-il un insight CC-problème dont la résolution permettrait d'enseigner la principale propriété conceptuelle de la division, à savoir que les procédures de quotition et de partition sont substituables ?

Les résultats expérimentaux concernant la quotition et la partition sans reste

Rappelons que lorsque la simulation de la situation décrite dans un énoncé de problème conduit à calculer 3 fois 50, il s'agit d'un Si-problème d'addition réitérée. On peut donc faire l'hypothèse que les problèmes de quotition et de partition construits à partir de la relation numérique 3 fois 50, 150, sont également des Si-problèmes. Pour la quotition, il s'agit des problèmes qui se reformulent sous la forme : « En 150, combien de fois 50 ? », et pour la partition, ceux qui se reformulent sous la forme : « 150, c'est 3 fois combien ? ».

De même, lorsque la simulation de la situation décrite dans un énoncé de problème conduit à calculer 50 fois 3, il s'agit d'un CC-problème d'addition réitérée. On peut donc faire l'hypothèse que les problèmes de quotition et de partition construits à partir de la relation numérique 50 fois 3, 150, sont également des CC-problèmes. Pour la quotition, il s'agit des problèmes qui se reformulent sous la forme : « en 150, combien de fois 3 ? », et pour la partition, ceux qui se reformulent sous la forme : « 150, c'est 50 fois combien ? ».

Des problèmes correspondant à ces différents cas ont été proposés en début de CE2, avant tout enseignement de la division[1]. La question posée est évidemment la suivante : les taux de réussite observés confirment-ils qu'on a affaire à des Si-problèmes dans un cas et à des CC-problèmes dans l'autre ?

Si-problème de quotition
On a 150 objets et on fait des paquets de 50 objets. Combien de paquets peut-on faire ? R = 64%

CC-problème de quotition :
On a 150 objets et on fait des paquets de 3 objets. Combien de paquets peut-on faire ? R = 11%

Si-problème de partition :
On partage 150 objets en faisant 3 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ? R = 58%

CC-problème de partition :
On partage 150 objets en faisant 50 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ? R = 17%

Pour les problèmes de quotition et de partition sans reste, c'est-à-dire les problèmes relevant des 2 principaux sens de la division sans reste, il semble donc possible de construire des Si-problèmes et des CC-problèmes en utilisant les mêmes triplets de nombres que pour la multiplication, à savoir : (3, 50, 150) ; (8, 10, 80) ; (4, 25, 100) ; etc.

Analysons ces résultats en remarquant tout d'abord qu'ils montrent que certains problèmes dits de division sont très bien réussis avant tout enseignement de cette opération et que cela ne dépend pas de la grandeur des nombres. On observe en effet que c'est un problème avec 150 et 50 qui est le mieux réussi (Si-problème de quotition). Une fois de plus, ces résultats prouvent que la taille des nombres, en elle-même, ne crée pas nécessairement plus de difficulté. C'est la façon dont le processus de compréhension de l'énoncé et le processus d'obtention de la solution numérique interagissent qui importe.

Conformément à la théorie utilisée ici (le paradigme Si- *vs* CC-problèmes), les problèmes faciles sont ceux pour lesquels une simulation mentale de la situation décrite dans l'énoncé conduit assez directement au résultat. Concernant le Si-problème de partition, par exemple, l'élève imagine 3 personnes et cherche ce qu'il faut mettre devant elles pour faire 150 en tout : 3 fois… égale 150. La solution, 50, est mentalement activée.

De même, l'échec aux CC-problèmes s'explique du fait qu'en début de CE2 les élèves ne connaissent pas encore la propriété conceptuelle fondamentale de la division : les stratégies de quotition et de partition sont substituables parce qu'elles conduisent au même résultat. C'est cette propriété qui autorise à reformuler la division sous la forme : « a *partagé en* b *ou encore : en* a *combien de fois* b ? »). En effet, un adulte qui résout le CC-problème de quotition, par exemple, ne se contente pas de chercher « En 150, combien de fois 3 ? » (ce que l'énoncé conduit à faire), il trouve le résultat en *partageant* 150 en 3 parts égales. Il sait en effet qu'il peut remplacer la quotition par la partition.

Mais ces résultats montrent aussi que plus d'un tiers des élèves échouent les Si-problèmes de quotition

1. Brissiaud, R. (2002). Le phénomène de concordance/discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique : le cas de la division euclidienne. Texte présenté au *Colloque cognitique : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements*. 17-18 juin. Paris.

et de partition (une autre expérience montre qu'on obtient le même résultat lorsqu'on remplace 150, 50 et 3 par 30, 10 et 3 !). Les élèves qui les réussissent sont de toute évidence mieux préparés pour apprendre la division : comment pourrait-on enseigner à des élèves que les procédures de quotition et de partition sont substituables alors qu'ils ne comprennent pas les situations de quotition et de partition ?

Le début de la progression : faire comprendre la quotition et la partition avant d'introduire les mots *division*, *quotient*…

En début d'année : résoudre des Si-problèmes de quotition et de partition sans reste

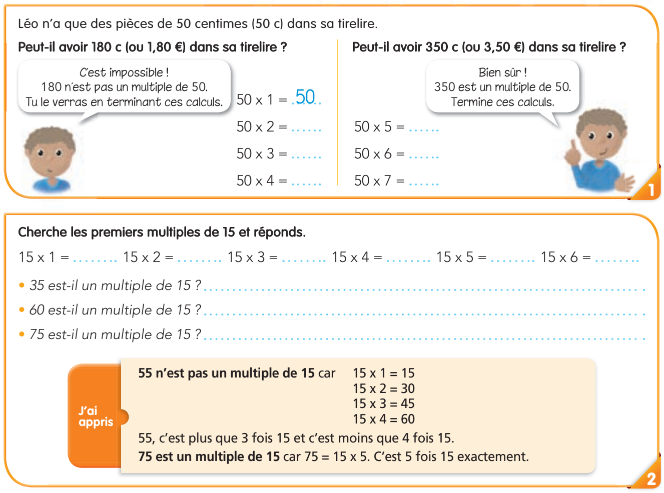
Deux tiers des élèves qui réussissent les Si-problèmes de quotition et de partition, en début de CE2, ce n'est pas suffisant. C'est pourquoi, en début d'année, les élèves sont systématiquement confrontés à ces types de problèmes. Conformément aux résultats expérimentaux précédents, les Si-problèmes de quotition apparaissent dans le cadre d'activités où l'on se demande combien de fois des « grands nombres » (10, 15, 25, 50 et 100) sont contenus dans le nombre de départ et les Si-problèmes de partition apparaissent sous la forme de problèmes de partage en un « petit nombre » de parts égales (2, 3, 4 ou 5 parts égales). Dans les deux cas, il n'y a pas de reste.

Les multiples de 10, 15, 25… pour résoudre des Si-problèmes de quotition

Le point de départ de l'activité (*cf.* le fac-similé dans la colonne de droite) consiste à se demander s'il est possible de former la somme de 180 centimes avec des pièces de 50 centimes seulement. Cela permet d'introduire la notion de multiple d'un nombre : 180 n'est pas un multiple de 50 parce que ce n'est pas un nombre exact de fois 50. En effet, quand on calcule successivement 50 x 1, 50 x 2, 50 x 3, 50 x 4, on « saute » le nombre 180.

Dans les séquences qui suivent, les élèves vont régulièrement être confrontés à la tâche où il s'agit de dire si 60, 80, 90, 95, par exemple, sont des multiples de 15, puis de répondre en entourant et en complétant, si besoin est, cette ligne réponse :

Multiples de 15 ou non ?	60	oui, 60 = 15 x … non.
	80	oui, 80 = 15 x … non.


Léo n'a que des pièces de 50 centimes (50 c) dans sa tirelire.

Peut-il avoir 180 c (ou 1,80 €) dans sa tirelire ?

C'est impossible !
180 n'est pas un multiple de 50.
Tu le verras en terminant ces calculs.

50 x 1 = 50
50 x 2 = ……
50 x 3 = ……
50 x 4 = ……

Peut-il avoir 350 c (ou 3,50 €) dans sa tirelire ?

Bien sûr !
350 est un multiple de 50.
Termine ces calculs.

50 x 5 = ……
50 x 6 = ……
50 x 7 = ……

1

Cherche les premiers multiples de 15 et réponds.

15 x 1 = …….. 15 x 2 = …….. 15 x 3 = …….. 15 x 4 = …….. 15 x 5 = …….. 15 x 6 = ……..

- *35 est-il un multiple de 15 ?* ……………
- *60 est-il un multiple de 15 ?* ……………
- *75 est-il un multiple de 15 ?* ……………

J'ai appris

55 n'est pas un multiple de 15 car 15 x 1 = 15
15 x 2 = 30
15 x 3 = 45
15 x 4 = 60
55, c'est plus que 3 fois 15 et c'est moins que 4 fois 15.
75 est un multiple de 15 car 75 = 15 x 5. C'est 5 fois 15 exactement.

2

Fac-similé de la séquence 43, p. 63 du fichier.

Montrons que cette tâche conduit bien à résoudre des problèmes de quotition. Elle conduit à calculer la suite des multiples de 15 et à s'arrêter, soit quand on a atteint ce nombre (réponse « oui »), soit quand on l'a dépassé sans l'atteindre (réponse « non »). De plus, quand *a* est un multiple de *b*, il faut exprimer le « nombre de fois ». On a donc bien cherché : « en *a*, combien de fois *b* ? ».

On remarquera que, dans le cadre de cette tâche, lorsque *a* n'est pas un multiple de *b*, les élèves ne sont pas conduits à s'intéresser à la valeur numérique de ce qui constituera le reste de la division de *a* par *b*. La tâche est donc plus simple que lorsqu'il faut calculer ce reste. Mais on voit bien qu'en interrogeant ainsi les élèves sur l'existence d'un éventuel reste, on prépare le futur calcul de ce reste.

À partir de cette séquence, les élèves sont régulièrement conduits à résoudre des problèmes tels que :

Il y a 100 enfants et on veut former des équipes de 25 enfants…

On a un ruban de 75 cm et on veut découper des morceaux de 15 cm…

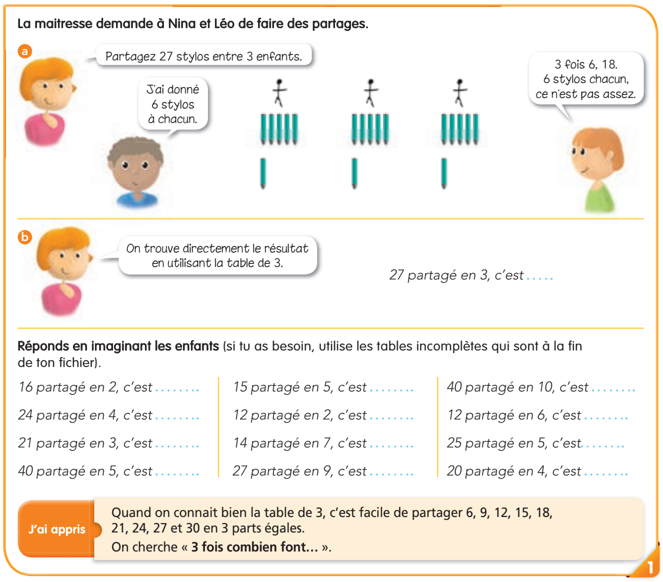
On a 80 fraises et on veut remplir des paniers de 10 fraises…

Ils répondent au premier de ces Si-problèmes en écrivant que 100 = 4 x 25 ou 100 = 25 x 4 et en rédigeant une « phrase-réponse » comme : « *On peut former 4 équipes de 25 enfants.* »

Les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5 pour résoudre des Si-problèmes de partition

Le point de départ de l'activité (*cf.* le fac-similé dans la page qui suit) est un problème de partage d'une collection de 27 stylos en 3 parts égales. Nous avons vu que ce type de problèmes se résout en imaginant les 3 parts et en cherchant : « 3 fois combien font 27 ? »

Dans la fiche, Léo cherche le nombre inconnu en faisant des essais. On peut essayer « 3 fois 6, 18 », par exemple, puis essayer « 3 fois 7… ». L'objectif de la séquence est de prendre conscience qu'on gagne du temps en se référant à la table de multiplication par 3. En effet, on trouve directement que « 3 fois 9, 27 » et, donc, qu'il y a 9 stylos dans une part.



La maitresse demande à Nina et Léo de faire des partages.

27 partagé en 3, c'est .....

Réponds en imaginant les enfants (si tu as besoin, utilise les tables incomplètes qui sont à la fin de ton fichier).

16 partagé en 2, c'est	15 partagé en 5, c'est	40 partagé en 10, c'est ....
24 partagé en 4, c'est	12 partagé en 2, c'est	12 partagé en 6, c'est ....
21 partagé en 3, c'est	14 partagé en 7, c'est	25 partagé en 5, c'est ....
40 partagé en 5, c'est	27 partagé en 9, c'est	20 partagé en 4, c'est ....

J'ai appris Quand on connait bien la table de 3, c'est facile de partager 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 et 30 en 3 parts égales.
On cherche « **3 fois combien font…** ».

1

Fac-similé de la séquence 47, p. 68 du fichier.

À partir de cette séquence, les élèves sont régulièrement conduits à résoudre des problèmes tels que :

On a 36 gâteaux et on les répartit dans 4 assiettes pour que chacune ait le même nombre…

On a 28 € et on les partage équitablement entre 4 personnes…

On a un ruban de 30 cm et on découpe 5 morceaux de même longueur…

Ils répondent au premier de ces Si-problèmes en écrivant une « phrase-réponse » et une égalité comme : « *Chacune des 4 assiettes aura 9 gâteaux parce que 4 x 9 = 36.* »

Développer la compréhension des situations de quotition et de partition et développer… la connaissance des relations numériques

Il est important de remarquer que l'enjeu des activités pédagogiques précédentes n'est pas seulement de développer la compréhension des situations de quotition et de partition avant d'enseigner la division en tant que telle, il est aussi de développer la connaissance de relations numériques extrêmement importantes : d'une part, la connaissance des multiples de 10, 15, 25, 50 et 100, et, d'autre part, la connaissance des tables de multiplication. En effet, utiliser les tables de multiplication pour résoudre des problèmes simples de partage est vraisemblablement l'un des meilleurs moyens de consolider leur connaissance. C'est la raison pour laquelle l'activité consistant à chercher le résultat de « 12 partagé en 2 », « 32 partagé en 4 »… est régulièrement proposée ensuite dans les calculs de haut de pages.

Avant de présenter la suite de la progression, c'est-à-dire la façon dont on introduit en classe la division avec reste, commentons certains choix pédagogiques de ce début de progression, notamment le fait que nous ayons choisi de ne pas introduire la notion de « quotient exact » et de nous abstenir d'utiliser des écritures comme :

« 75 : 25 = 3 »   ou   « 27 : 3 = 9 »

Le choix de ne pas enseigner les écritures du type « 27 : 3 = 9 »

Rappelons d'abord que dans chacune des activités précédentes, les problèmes proposés sont des Si-problèmes. Il suffit donc de simuler la situation décrite dans l'énoncé des problèmes pour accéder à leur solution numérique ; l'usage de la division n'est pas nécessaire à leur résolution. Nous avons dit dans le chapitre 1 que les Si-problèmes d'addition réitérée, par exemple, sont des « pseudo-problèmes » ou des « demi-problèmes » de multiplication ; de même, les Si-problèmes de quotition et de partition sans reste sont des pseudo- ou des demi-problèmes de division.

Mais, de plus, le pédagogue qui choisirait d'utiliser une écriture telle que « 27 : 3 = 9 » a l'obligation de penser à la façon dont cette écriture s'articulera ultérieurement avec celle qu'il utilisera pour noter une *division avec reste*. Il nous faut donc préalablement répondre à la question : quelle écriture convient-il de choisir pour désigner une division avec reste ?

Quelle écriture pour désigner une division avec reste ?

Noter par écrit une division ainsi que le résultat de cette opération présente une difficulté du fait que ce résultat n'est pas composé d'un seul, mais de deux nombres : le quotient et le reste.

Avant la réforme des « mathématiques modernes » (1970), de nombreux pédagogues adoptaient les deux points superposés (« : ») pour noter une division et ils écrivaient, sans état d'âme, que :

35 : 8 = 4 (reste 3)

Les réformateurs de 1970 ont critiqué ce choix car le signe « = » ne s'emploie que lorsqu'il y a la même quantité de part et d'autre de ce signe. Ainsi, l'égalité 35 : 8 = 4 + 3/8 est correcte, mais elle n'est pas à la portée d'élèves de CE2. En revanche, l'égalité 35 : 8 = 4 (reste 3) est tout à fait incorrecte. Son emploi habituerait les élèves à un usage non mathématique du signe « = ». Au niveau du collège, ils risqueraient d'être en difficulté dans l'apprentissage de l'algèbre, parce qu'il est très important, à ce moment de la scolarité, d'avoir une bonne compréhension du signe « = ».

Aujourd'hui, de nombreux pédagogues n'utilisent les deux points superposés (« : ») que dans le cas de la division exacte, lorsque le reste est nul. En effet, il est alors parfaitement correct d'écrire que 27 : 3 = 9.

Mais est-il raisonnable de commencer par dire aux élèves que la division se note en utilisant deux points superposés et le signe «=», de noter ainsi les divisions durant toute la période où les élèves ne sont confrontés qu'à des problèmes sans reste, pour ensuite, dès que la division a un reste, interdire aux mêmes élèves d'utiliser le signe « = » ? Encore une fois, ce sont les élèves qui font preuve de peu de « souplesse d'esprit » qui se retrouvent en très grande difficulté devant ce type d'injonctions successives apparemment contradictoires. Que faire ?

Pour noter la division avec reste il suffit de remplacer l'usage du signe « = » par celui du point d'interrogation, en questionnant les élèves sous la forme :

107 : 25 ?

Les élèves répondent en écrivant :

q = 4 et r = 7 car 107 = (25 x 4) + 7.

Pour qu'ils s'approprient ce format de réponse, les premières interrogations prennent d'ailleurs la forme suivante :

80 : 25 ?	q = …… r = ……	car 80 = (25 x ……) + ……

En toute rigueur, il faudrait préciser que le reste trouvé est inférieur à 25, mais nous verrons que la nécessité d'un reste inférieur au diviseur est intégrée à la définition de l'opération, dès son introduction.

Ne pas noter la division sans reste… quand on n'est pas obligé de le faire

Après avoir précisé ce que sera la notation d'une division avec reste, revenons à la question initiale : comment noter ce qu'on appelle les « divisions sans reste » ? Il faut être conscient que ces divisions sont en fait des divisions avec reste, mais dans le cas particulier où ce reste est nul. Ainsi, avec la notation donnée ci-dessus, il n'y a aucun problème pour écrire le résultat de la « division sans reste » 75 : 25 ?

75 : 25 ?	q = 3 r = 0	car 70 = 25 x 3

Dès que la division avec reste a été enseignée, les divisions sans reste apparaissent donc naturellement comme des cas particuliers de divisions avec restes et l'enseignant dispose d'un moyen de noter ces divisions. Mais comment faire pendant la période où la division avec reste n'a pas encore été enseignée ? En fait, durant cette période, rien ne contraint l'enseignant à utiliser une notation spécifique puisqu'il se contente de proposer des Si-problèmes à ses élèves. La solution numérique des problèmes correspondants s'obtient mentalement et l'usage de la multiplication permet de justifier le résultat trouvé.

Achevons cette partie dédiée aux différents moyens de noter une division en signalant qu'au CM1 les élèves se mettront à utiliser les deux points en conjonction avec le signe « = » pour noter une division. Mais il faut souligner que cette division sera de nature différente de celle qu'ils auront envisagée jusqu'alors : ce sera une division « où l'on partage le reste », ou encore une division « que l'on pousse après la virgule ». Ils écriront ainsi :

23 : 5 = 4 + 3/5   ou encore :   23 : 5 = 4,6

Avant de revenir à la présentation de la suite de la progression, et avant, notamment, de présenter comment la division avec reste est introduite en classe, examinons les résultats expérimentaux qui expliquent nos choix pédagogiques.

Les résultats expérimentaux concernant la quotition et la partition avec reste

En s'adressant toujours à des élèves entrant au CE2, avant tout enseignement de la division, les mêmes problèmes que ceux qui avaient été proposés avec le triplet de nombres (3, 50, 150) ont été proposés en changeant 150 par 152. Nous nous interrogions de nouveau de la façon suivante : les taux de réussite qui seront observés vont-ils montrer que, dans ces cas avec reste, on a toujours affaire à des Si-problèmes ou à des CC-problèmes[2] ? On trouve ci-dessous les taux de réussite observés ; ils montrent que deux des problèmes considérés peuvent être analysés en tant que Si- et CC-problèmes, alors que ce n'est pas le cas pour les deux autres.

On a 152 objets et on fait des paquets de 50 objets. Combien de paquets peut-on faire ? R = 53%

Nous allons voir qu'il s'agit d'un authentique Si-problème de quotition.

On a 152 objets et on fait des paquets de 3 objets. Combien de paquets peut-on faire ? R = 0%

Nous allons voir que ce problème de quotition se révèle ne pas être un CC-problème de quotition.

On partage 152 objets en faisant 3 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ? R = 13%

Nous allons voir que ce problème de partition se révèle ne pas être un Si-problème de partition.

On partage 152 objets en faisant 50 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ? R = 2%

Nous allons voir qu'il s'agit d'un authentique CC-problème de partition.

Commentons ces résultats en commençant par ceux qui s'analysent le plus facilement : les résultats au premier et au dernier problème.

Un authentique Si-problème de quotition

Lorsqu'on remplace 150 par 152, parmi les 4 problèmes proposés, il n'en reste qu'un qui est assez bien résolu avant tout apprentissage de la division :

On a 152 objets et on fait des paquets de 50 objets. Combien de paquets peut-on faire ?

Il s'agit d'un authentique Si-problème : en simulant mentalement la situation, l'enfant est conduit à compter de 50 en 50 et à dire : 50 (1 paquet formé), 100 (2 paquets formés), 150 (3 paquets formés) ; il s'arrête à cette étape parce qu'il est évident qu'en continuant ainsi, il dépasserait 152 dès la prochaine étape.

Le fait qu'il y ait 152 objets et non 150 ne crée pas beaucoup de difficulté supplémentaire (R = 53 % contre R = 64 %). Le pourcentage de 53 % de réussite est d'autant plus

2. Brissiaud (2002). *Ibid.*

remarquable qu'il a été observé chez des élèves qui n'avaient pas travaillé les multiples de 50 à l'école. Avec des élèves ayant travaillé ces multiples, la réussite aurait été plus importante et nombreux sont les élèves qui, ayant mémorisé la relation « 3 fois 50, 150 », n'auraient même pas eu besoin de compter de 50 en 50.

Nous allons voir que ce type de problème joue un rôle important dans la progression : comme c'est le seul qui est d'emblée bien résolu, il servira à donner aux élèves une première définition de cette opération (la division permet de résoudre les problèmes de quotition) ; c'est à la suite de la résolution de ce type de problème qu'on va définir aux élèves les mots « division », « quotient », « reste » ainsi que la façon dont on note par écrit cette opération et son résultat.

Un authentique CC-problème de partition

Intéressons-nous au dernier problème proposé :

On partage 152 objets en faisant 50 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ?

Nous venons de voir que de nombreux élèves savent d'emblée résoudre un problème où l'on cherche «en 152, combien de fois 50 ?». Il suffirait donc que ces enfants pensent à résoudre ainsi ce problème de partition pour qu'ils accèdent à sa solution numérique.

Ainsi, ce problème est-il un authentique CC-problème de partition, c'est-à-dire d'un problème mal résolu quand les enfants n'ont pas encore la connaissance conceptuelle nécessaire (résoudre un problème de partition comme si c'était un problème de quotition), mais qui est résolu mentalement dès qu'ils l'ont.

Nous allons voir que ce type de problème joue lui aussi un rôle important dans la progression : comme c'est le seul authentique CC-problème, c'est ce problème dont nous allons aménager les conditions de présentation afin qu'il fonctionne comme un « insight CC-problème » permettant aux élèves de comprendre pourquoi la division permet de résoudre à la fois des problèmes de quotition et des problèmes de partition.

Des problèmes qui se révèlent ne pas pouvoir être analysés en tant que Si- ou CC-problèmes

Considérons l'autre problème de partition, celui qui est bien résolu lorsqu'on utilise le nombre 150 mais s'avère mal résolu ici :

On partage 152 objets en faisant 3 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ?

Le taux de réussite, 13 %, n'autorise pas de le considérer comme un Si-problème ; il ne suffit pas de simuler mentalement la situation correspondante pour trouver la solution numérique.

On comprend pourquoi il en est ainsi. Considérons un élève qui simule mentalement la situation. Il imagine les 3 parts et s'interroge : « 3 fois combien font 152 ? ». Aucune relation numérique n'est activée dans la tête de l'enfant parce qu'à partir des nombres 3 et 152, on ne pense pas à 50.

Dans le cas de ce type de problème, il n'y a pas de Si-problème parce qu'il n'y a pas de problème facile à résoudre mentalement.

Comme le problème précédent ne peut pas être considéré comme un Si-problème, le dernier des problèmes restant à analyser (*On a 152 objets et on fait des paquets de 3 objets. Combien de paquets peut-on faire ?*) ne peut pas non plus être considéré comme un authentique CC-problème de quotition.

En effet, ce problème conduit à chercher « En 152, combien de fois 3 ? ». Imaginons qu'un enfant possède la connaissance conceptuelle lui permettant de substituer à cette recherche celle de « 152, c'est 3 fois combien ? ». Nous venons de voir que cela ne lui permettrait pas d'accéder mentalement à la solution numérique.

La conséquence est évidemment qu'aucun des deux types de problèmes précédents ne joue de rôle décisif dans la progression pédagogique que nous avons construite afin que les élèves s'approprient la propriété conceptuelle de la division.

Pour autant, ces résultats mettent en évidence un phénomène important que les pédagogues doivent impérativement prendre en compte : alors qu'il est assez facile pour un élève de calculer le résultat de 21 partagé en 3, par exemple, le résultat de 23 : 3 ? est beaucoup plus difficile. Dans le cas où le nombre qu'il faut diviser ne figure plus dans les résultats de tables, la gestion du reste crée une difficulté supplémentaire importante. C'est ce qui explique que nous consacrons toute une leçon (séquence 67) et de nombreux entrainements à ce type de divisions, qu'un enfant doit savoir calculer pour mener à bien une division posée en colonnes.

Il est temps de présenter la suite de la progression : l'introduction en classe de la division avec reste.

La suite de la progression : introduire les mots *division*, *quotient*, *reste* et leur notation

Les premières divisions avec reste : des Si-problèmes de quotition par 10, 15, 25, 50 et 100

Quand le reste est non nul, les résultats expérimentaux présentés plus haut montrent que les Si-problèmes de quotition par 10, 15, 25, 50 et 100 sont les seuls problèmes dont la solution s'obtient facilement par un calcul mental. Il n'y a donc aucun doute : le jour où le pédagogue annonce à ses élèves qu'il va leur enseigner la division et les notions de quotient et de reste qui vont avec, il a tout intérêt à définir cette opération à partir de ce type de problèmes, surtout s'il a précédemment travaillé avec eux les multiples de 10, 25, 50 et 100.

C'est ainsi que, dans *J'apprends les maths CE2*, les élèves apprennent que pour calculer la division 163 : 25 ?, par exemple, on se demande : « En 163, combien de fois 25 ? », que « le nombre de fois » s'appelle le quotient et que, le plus souvent, il existe un reste. On trouve dans la colonne de droite un fac-similé de la séquence 61 dans laquelle la division, son signe opératoire, le vocabulaire qui l'accompagne (les mots *quotient*, *reste*) sont introduits.

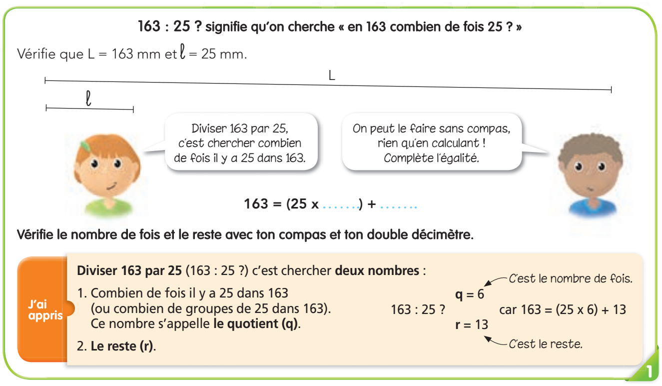
Pour comprendre le choix de ce problème (Combien de fois un petit segment de longueur l = 25 mm est-il contenu dans un grand segment de longueur L = 163 mm ?), il convient de préciser que les élèves, avant cette leçon, ont été de nombreuses fois confrontés à des problèmes semblables qu'ils résolvaient par l'action. En effet, les deux segments étaient donnés par leurs tracés, sans aucune mesure de longueur et il s'agissait de reporter avec une bande de papier ou avec le compas la petite longueur ℓ sur la grande longueur L autant de fois que possible. La réponse était donnée sous la forme d'un nombre (le « nombre de fois ») et d'un petit segment (le reste).

Cette activité géométrique préalable a une conséquence importante : dans la séquence 61, pour les élèves, il s'agit de raisonner sur des nombres pour prévoir le résultat d'un procédé géométrique qu'ils connaissent. Encore une fois, donc, les élèves sont confrontés à un problème qui se présente sous la forme d'une situation où il faut anticiper le résultat d'une action et, bien entendu, lorsque le « nombre de fois » et la mesure du reste ont été trouvés à partir d'un calcul numérique, le procédé géométrique permet un contrôle de ce calcul.

À partir de cette séquence, les élèves apprennent à calculer de la même manière les divisions du type 48 : 15 ?, 64 : 10 ?, 218 : 50 ?, 437 : 100 ?, etc. Toutes ces divisions ont en commun :
1°) que c'est la quotition (En a combien de fois b ?) qui conduit à un calcul simple ;
2°) que les multiples du diviseur sont connus par cœur ou presque ;
3°) que leur quotient est à 1 chiffre.

À partir de cette séquence, les élèves sont régulièrement conduits à résoudre des problèmes tels que :

Il y a 132 enfants dans une colonie de vacances et on veut former des équipes de 25 enfants…



Fac-similé du début de la séquence 63, p. 92 du fichier.

On a un ruban de 78 cm et on veut découper des morceaux de 15 cm…

On a 87 pêches et on veut remplir des paniers de 10 pêches…

Ils répondent désormais en écrivant une division. Concernant le premier de ces Si-problèmes, ils écrivent :

132 : 25 ? q = 5 et r = 7

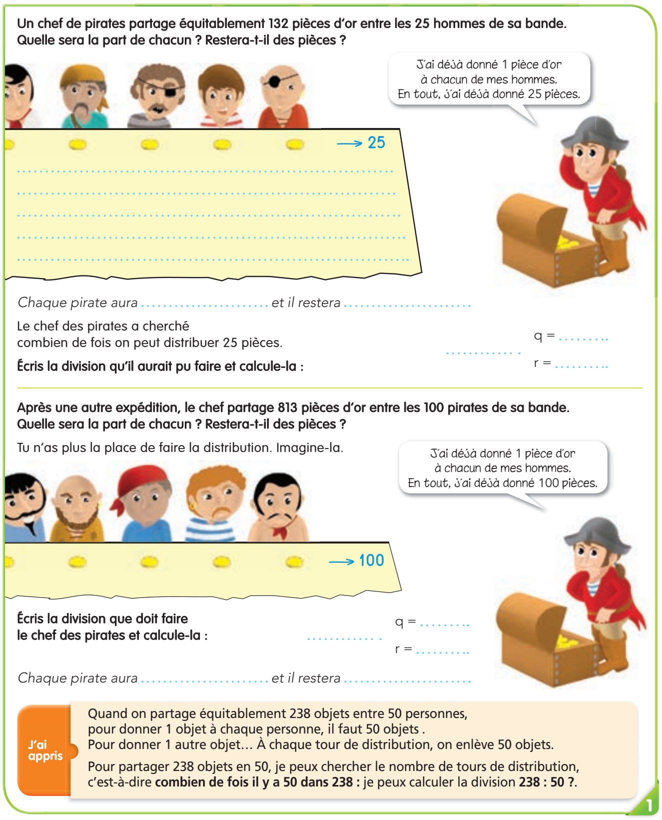
Et ils rédigent une « phrase-réponse » comme : « *On peut former 5 équipes de 25 enfants et il restera 7 enfants.* »

À ce moment de la progression, les enfants se sont donc approprié l'une des deux stratégies de calcul mental d'une division avec reste : la quotition. Explicitons ce qu'ils ne savent pas encore :
1°) ils n'ont pas encore vu en classe que la division permet également de résoudre des problèmes de partition ;
2°) ils ne savent calculer une division avec reste que lorsqu'elle est par 10, 15, 25, 50 ou 100 ; ils ne savent pas encore faire une division avec reste par 2, 3, 4…

Un « insight CC-problème » qui permet de faire le lien avec la partition

Les enfants doivent donc apprendre que le même symbolisme *a* : *b* ?, dont ils savent qu'il permet de résoudre les problèmes où l'on cherche « en *a*, combien de fois *b* ? », permet aussi de résoudre des problèmes où l'on se demande : « *a* est égal à *b* fois combien ? ».

Comme cela a été annoncé lors de l'analyse des résultats expérimentaux, on utilise à cet effet un CC-problème de partition, du type :



Fac-similé du début de la séquence 67, p. 98 du fichier.

On partage 152 objets en faisant 50 parts égales. Combien y a-t-il d'objets dans chaque part ?

ou encore :

On dispose de 132 objets et on les partage équitablement entre 25 personnes…

Ces CC-problèmes de partition conduisent à se représenter un partage, celui qui est décrit dans l'énoncé, mais c'est par la quotition, en cherchant « en 132, combien de fois 25 ? » (cas du 2e problème) qu'on obtient facilement la solution numérique. L'idée qui va guider le pédagogue est la suivante : il faut amener l'enfant à imaginer que le partage s'effectue par distribution 1 à 1 des 132 objets à chacune des 25 personnes. Lors du 1er tour de distribution, pour donner 1 objet à chaque personne, il faut 25 objets. Pour donner 1 autre objet, il faut… Ainsi, à chaque tour de distribution, on enlève 25 objets du stock initial.

Pour connaitre la valeur d'une part, il faut savoir combien on peut faire de tours de distribution : il faut donc chercher combien de fois il y a 25 dans 132, c'est-à-dire (illumination !)… faire la division de 132 par 25.

Les élèves ont ainsi la possibilité de prendre conscience qu'un problème de partition peut se résoudre en cherchant « un nombre de fois » et, donc, en faisant une division.

On trouve dans ce *Livre du maitre* (*cf.* la présentation de la séquence 65, p. 140) la description d'une activité préliminaire dans laquelle le partage s'effectue entre les élèves eux-mêmes (il s'agit donc d'une situation vécue). Dans cette activité, le partage est seulement amorcé : on fait seulement 1 tour de distribution et il s'agit d'anticiper ce que chaque enfant recevra quand on achèvera la distribution (il s'agit donc d'une situation d'anticipation du résultat d'une action). La séquence se poursuit en résolvant les problèmes du fichier dans lesquels un chef de pirates partage d'abord 132 pièces d'or entre ses 25 hommes (*cf.* le fac-similé de la colonne de gauche), puis 813 pièces d'or entre ses 100 hommes.

À partir de cette séquence, les élèves sont régulièrement conduits à résoudre des problèmes tels que :

On a 106 gâteaux et on les répartit dans 25 assiettes pour que chacune ait le même nombre…

On a 48 € et on les partage équitablement entre 15 enfants…

On a 85 fleurs et on les partage entre 10 personnes pour que chacune ait le même nombre…

Ils répondent au premier de ces CC-problèmes en écrivant la division :

106 : 25 ? q = 4 et r = 6

Ils écrivent également une « phrase-réponse » comme : « *Chacune des 25 assiettes aura 4 gâteaux et il restera 6 gâteaux* ».

Dès qu'un élève semble éprouver des difficultés, l'enseignant lui fait évoquer les différents tours de distribution : pour mettre 1 gâteau dans chaque assiette, il en faut 25 ; pour en mettre 1 autre… Il faut chercher combien on peut faire de tours de distribution, il faut chercher combien de fois il y a 25 dans 106… En fait, comme la signification « partager » du mot « diviser » est sa signification typique, les élèves n'ont guère de problème avec cet emploi de la division.

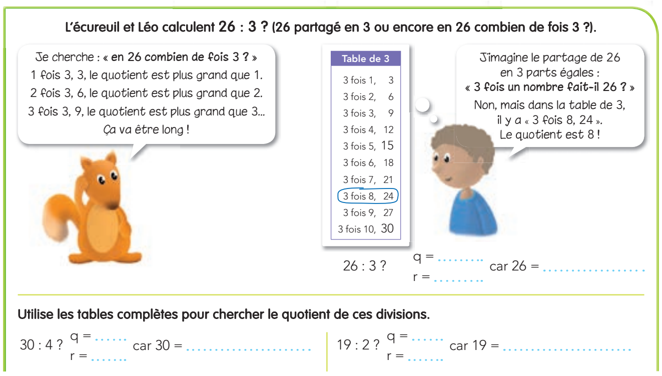
À ce moment de la progression, les élèves ont appris que la division est une opération qui permet de résoudre les problèmes de quotition et de partition. Mais ils ne savent calculer une division avec reste que lorsqu'elle est par 10, 15, 25, 50 ou 100 ; ils ne savent pas encore calculer une division avec reste par 2, 3, 4… C'est ce qu'ils vont apprendre maintenant.

Apprendre la division avec reste dans le cas des divisions élémentaires : « 13 : 2 ? », « 26 : 3 ? », « 21 : 4 ? », etc.

Il s'agit tout d'abord d'apprendre à diviser un nombre par 2, 3, 4 ou 5 dans le cas où le quotient est inférieur à 10. Les divisions correspondantes sont celles qu'on peut qualifier de « divisions élémentaires » parce qu'il faut savoir les calculer pour mener à bien une division posée en colonnes (ce sont les « éléments » d'un tel calcul). Les divisions avec reste nul, comme 12 : 2 ?, constituent évidemment un cas particulier de cette catégorie générale.

Les résultats expérimentaux rappelés plus haut montrent que l'existence d'un reste non nul rend le calcul de ces divisions plutôt complexe et qu'un entrainement régulier est nécessaire. Le début de la fiche correspondant à la leçon où l'on enseigne ce calcul (sq 67) est reproduit page suivante.

Les calculs les plus difficiles sont évidemment ceux où le quotient est supérieur à 5. Ainsi, calculer 26 : 3 ? est plus difficile que de calculer 14 : 3 ?. Intéressons-nous prioritairement au premier de ces calculs (26 : 3 ?). À ce moment de la progression, les élèves disposent des deux stratégies de calcul d'une telle division : ils peuvent chercher « en 26, combien de fois 3 ? » ou bien « 26, c'est 3 fois combien ? ». Dans la leçon, l'écureuil adopte la première stratégie, Léo la seconde. C'est cette dernière qui sera privilégiée parce que 26 contient un grand nombre de fois 3, alors qu'en imaginant un partage et en utilisant une table de multiplication complète, on conclut rapidement : « 26, c'est 3 fois 8, 24 et il reste 2 ».


L'écureuil et Léo calculent 26 : 3 ? (26 partagé en 3 ou encore en 26 combien de fois 3 ?).

Je cherche : « **en 26 combien de fois 3 ?** »
1 fois 3, 3, le quotient est plus grand que 1.
2 fois 3, 6, le quotient est plus grand que 2.
3 fois 3, 9, le quotient est plus grand que 3…
Ça va être long !

Table de 3
3 fois 1, 3
3 fois 2, 6
3 fois 3, 9
3 fois 4, 12
3 fois 5, 15
3 fois 6, 18
3 fois 7, 21
3 fois 8, 24
3 fois 9, 27
3 fois 10, 30

J'imagine le partage de 26 en 3 parts égales :
« **3 fois un nombre fait-il 26 ?** »
Non, mais dans la table de 3, il y a « 3 fois 8, 24 ».
Le quotient est 8 !

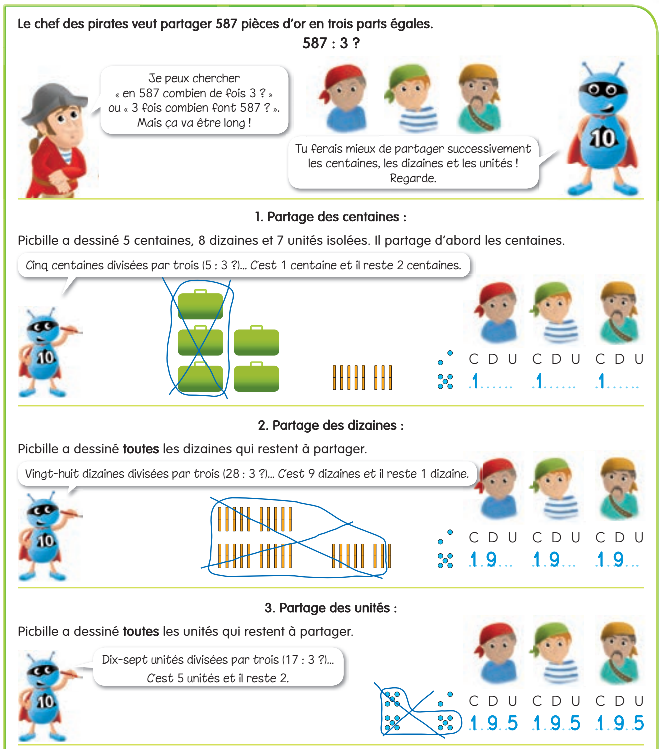
26 : 3 ? q = ... r = ... car 26 = ...

Utilise les tables complètes pour chercher le quotient de ces divisions.

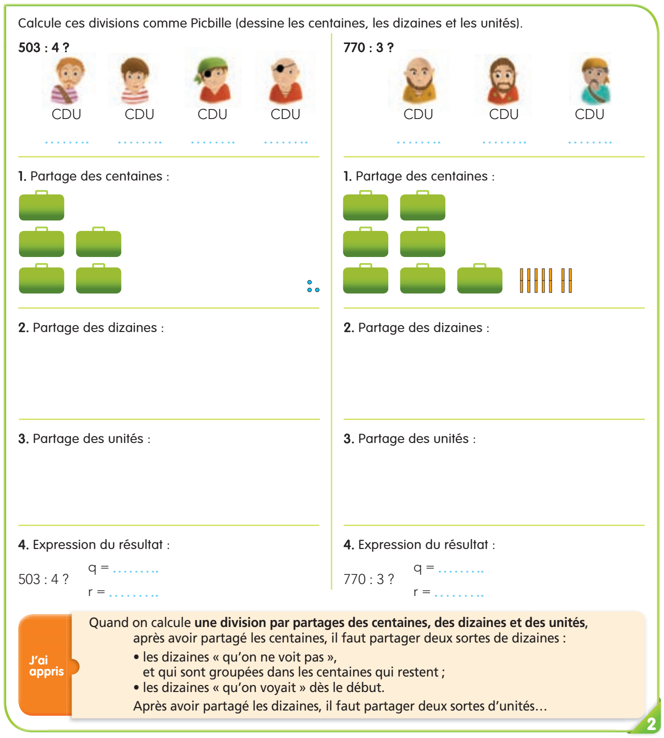
30 : 4 ? q = ... r = ... car 30 = ...

19 : 2 ? q = ... r = ... car 19 = ...

Fac-similé du début de la séquence 69, p. 102 du fichier.



Fac-similé du début de la séquence 74, p. 110 du fichier.



Un peu plus loin, toujours dans la séquence 74.

Très rapidement, il faut que les élèves n'utilisent plus de tables complètes : soit ils utilisent une table incomplète, soit ils n'utilisent plus du tout de table. Rappelons qu'un tel apprentissage, dans le même temps qu'il permet aux élèves d'apprendre à calculer les divisions élémentaires, consolide la connaissance des résultats des multiplications élémentaires.

Apprendre la division avec reste d'un grand nombre par 2, 3, 4, 5…

Le problème qui permet un tel apprentissage est le suivant : *On dispose de 587 objets et on les partage équitablement entre 3 personnes* (*cf.* ci-dessus le fac-similé de la séquence 72.) Ainsi les élèves retrouvent le chef de pirates qui, cette fois, doit partager 587 pièces d'or entre trois de ses hommes seulement.

Là encore, il ne serait guère stratégique de calculer la division 587 : 3 ? en cherchant : « en 587, combien de fois 3 ? » parce que 587 contient un très grand nombre de fois 3. Mais il ne serait guère plus stratégique de chercher par essais successifs : « 3 fois combien font 587 ? ». Ce serait possible : 3 fois 100, c'est 300 ; 3 fois 200, c'est 600. Il faut chercher entre 100 et 200, etc. Mais ce serait long !

Mais Picbille, qui est un personnage associé au matériel de numération de la méthode (des unités, des boites de 10 unités, des valises de 10 boites et enfin des caisses contenant 10 valises), suggère au chef des pirates qu'il serait plus économique de partager successivement les centaines, les dizaines et les unités : ce scénario, en quelques séquences, va permettre aux élèves d'apprendre à calculer cette sorte de division en la posant de façon classique, avec une « potence ».

Le point crucial de cette procédure de partage successif est évidemment le phénomène qui, dans la technique écrite, s'énoncera : « Et j'abaisse le chiffre des dizaines ». Dans le cas de 587 : 3, par exemple, on énonce, après avoir donné 1 centaine à chaque pirate : il reste 2 centaines et j'« abaisse le 8 ».

Cela s'explique ainsi : les dizaines à partager sont de deux sortes : les 20 qui proviennent des 2 centaines restantes et les 8 qui figuraient déjà dans le nombre de départ. L'utilisation d'un matériel de numération comme celui de Picbille facilite grandement la compréhension du phénomène : les enfants savent que des 2 valises restantes on peut extraire 20 boites qui s'ajoutent aux 8 que l'« on voyait déjà ».

De même, dans la technique écrite, on sera amené à dire : « Et j'abaisse le chiffre des unités » parce que les unités à partager sont de deux sortes : celles qui proviennent des dizaines restantes et celles qui figuraient déjà dans le nombre de départ. Avec le matériel de numération, quand il reste des boites, on extrait les 10 jetons qu'elles contiennent, qui s'ajoutent à ceux que l'« on voyait déjà ».

L'expérimentation en classe a montré que, lorsque les enfants sont invités à calculer suffisamment de divisions de ce type (503 : 4 ?, 770 : 3 ?, etc.) en simulant par le dessin le partage successif des centaines, dizaines et unités (*cf.* le fac-similé ci-dessus), le passage à la technique écrite ne pose aucun problème. Mais il serait aventureux de vouloir aller trop vite à cette technique écrite : 6 à 10 simulations par le dessin sont souvent nécessaires avant que les élèves aient construit le schème du partage successif des centaines, dizaines et unités. Quand c'est le cas, lors de l'introduction de la technique écrite, celle-ci est d'emblée pleinement signifiante.

La technique de calcul d'une division posée

Finalement, les élèves disposent donc d'une technique écrite pour effectuer des divisions par un nombre à 1 chiffre. Ils commencent par disposer les nombres à l'intérieur de la « potence » et par estimer l'ordre de grandeur du quotient. Par exemple, pour 587 : 3 ?, ils écrivent :

$$\begin{array}{ccc|ccc} c & d & u & & & \\ 5 & 8 & 7 & 3 & & \\ \cline{4-6} & & & c & d & u \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Lorsque l'on partage 5 centaines en 3, il est en effet possible d'en donner au moins une à chacun. Si la division avait été 287 : 3 ?, en revanche, il aurait été impossible, avec seulement deux centaines au départ, d'en donner une à chacun, et l'élève aurait dû écrire « d u » seulement.

Une autre particularité de cette technique est que les élèves barrent les chiffres à chaque fois que la division du nombre correspondant est achevée (c'est ce qu'ils faisaient lors de la simulation avec les valises, les boites et les unités, et cela les aide à interpréter chaque étape de la technique). Ainsi, la division précédente se poursuit de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc|ccc} c & d & u & & & \\ \cancel{5} & 8 & 7 & 3 & & \\ \cline{4-6} 2 & & & c & d & u \\ & & & 1 & \dots & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} c & d & u & & & \\ \cancel{5} & 8 & 7 & 3 & & \\ \cline{4-6} 2 & 8 & & c & d & u \\ & & & 1 & \dots & \dots \end{array}$$

Le fait d'« abaisser le 8 » n'a rien de magique : après le partage des centaines, il en reste 2, c'est-à-dire 20 dizaines qui, avec les 8 de départ, font 28. Rapidement, on amène les enfants à trouver qu'il est évidemment plus court de dire « Et j'abaisse le 8 ».

Là encore, après le partage des 28 dizaines, 28 est barré et la technique s'achève ainsi :

$$\begin{array}{ccc|ccc} c & d & u & & & \\ \cancel{5} & 8 & 7 & 3 & & \\ \cline{4-6} 2 & 8 & & c & d & u \\ & 1 & & 1 & 9 & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} c & d & u & & & \\ \cancel{5} & 8 & 7 & 3 & & \\ \cline{4-6} \cancel{2} & \cancel{8} & & c & d & u \\ & 1 & 7 & 1 & 9 & 5 \\ & & 2 & & & \end{array}$$

Finalement, le résultat est exprimé sous sa forme habituelle, la multiplication de 195 par 3 servant de preuve :

587 : 3 ? q = 195 r = 2 car 587 = (3 x 195) + 2

Signalons enfin que le fait de poser les soustractions successives (5 – 2 = 3 ; 28 – 27 = 1 ; etc.) a pour effet, dans le cas de la division par un nombre à 1 chiffre, de compliquer cette technique et que nous n'avons donc pas retenu ce procédé.

Conclusion : une progression qui favorise la compréhension et le calcul de la division

Concernant les divisions sans reste et avec reste, les résultats expérimentaux ont mis en évidence l'existence de Si- et de CC-problèmes. Nous avons donc eu la possibilité d'utiliser ces problèmes pour construire une progression en nous appuyant sur leurs principales propriétés :
– avant tout enseignement, les Si-problèmes ont un fort taux de réussite par un calcul mental ;
– en revanche, les CC-problèmes sont massivement échoués du fait d'un manque de connaissances conceptuelles. Cependant les élèves disposent de procédures mentales susceptibles de conduire à leur solution et il suffit donc de les aider à changer de point de vue sur la situation, dans le cadre d'un « insight CC-problème », pour qu'ils réussissent.

Le mode d'élaboration de cette progression a pour conséquence qu'elle favorise à la fois la compréhension et le calcul d'une division. Concluons en explicitant ce que sont ces compétences des élèves en fin d'année.

Les élèves savent calculer une division, tantôt par quotition, tantôt par partition

Dès qu'ils ont appris à calculer une division par un nombre à un chiffre en la posant avec la potence, les élèves sont systématiquement confrontés à des exercices où on leur demande de calculer les divisions ci-dessous en ne les posant que si c'est nécessaire :

927 : 4 ?	160 : 25 ?	51 : 15 ?
894 : 100 ?	795 : 2 ?	142 : 3 ?

La caractéristique importante de cet exercice est que s'y trouvent mélangées des divisions qu'on calcule à l'aide de la quotition sans les poser (en 894, combien de fois 100 ?, par exemple), et des divisions que l'on calcule par partages successifs des centaines, dizaines et unités, en les posant. Au-delà du fait que l'élève pose certaines de ces divisions et non les autres, l'important est qu'il calcule certaines divisions par une stratégie de partition et les autres par une stratégie de quotition. En effet, être capable d'adapter sa stratégie de calcul aux données numériques du problème proposé, c'est avoir commencé à conceptualiser l'opération qu'est la division.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le calcul mental d'une soustraction tantôt par retrait, tantôt par complément aide les élèves à conceptualiser cette opération. De même, le calcul d'une division tantôt par quotition, tantôt par partition favorise la conceptualisation de cette opération.

Ils savent résoudre des problèmes de quotition et de partition à l'aide d'une division… dans le contexte des leçons

Dans diverses séquences, on propose aux élèves la suite des situations suivantes :

On a 81 perles et on veut faire des colliers de 25 perles…

On a 117 fleurs et on les partage entre 50 personnes pour que chacune ait le même nombre de fleurs…

On a 347 euros et on veut acheter des objets qui coutent 100 euros l'un…

On a 29 euros et on les partage équitablement entre 3 personnes…

Les élèves doivent imaginer la question, ils doivent y répondre en calculant une division et ils doivent rédiger une « phrase solution ».

La caractéristique importante de cet exercice est que s'y trouvent mélangés des problèmes de quotition et de partition. La principale difficulté de cette tâche ne réside pas dans le calcul (le fait qu'il faille faire une division est dit aux élèves), elle réside dans la rédaction de la phrase solution qui n'a pas la même forme suivant qu'il s'agit d'un problème de quotition ou de partition. Dans le cas du 1er problème de quotition, cette phrase peut être : « *On peut faire 3 colliers de 25 perles et il restera 6 perles* », alors que dans le cas du 1er problème de partition, elle peut être : « *Chacune des 50 personnes recevra 2 fleurs et il restera 17 fleurs* ». Produire de telles phrases-réponses témoigne de la capacité à mettre en relation les calculs menés avec ce qui était recherché, c'est-à-dire d'une bonne compréhension de la situation et de l'opération.

Peut-on pour autant en déduire que les élèves qui réussissent la tâche précédente sauraient, en toutes circonstances, résoudre des problèmes de partition et de quotition à l'aide d'une division ? Non : dans le cadre de cette tâche, l'activité de l'enfant est en effet fortement guidée, et il est probable que chez certains élèves la réussite en dépende.

Ils savent résoudre des problèmes de quotition et de partition à l'aide d'une division… dans le contexte des PAC

Rappelons que nous appelons ainsi les Problèmes pour apprendre à chercher. Ils sont présentés de manière développée pages 52 de ce *Livre du maitre*, mais signalons dès maintenant qu'une des caractéristiques importantes de ces PAC est de proposer aux élèves des problèmes variés de sorte qu'ils ne disposent d'aucun indice contextuel permettant de savoir si tel ou tel problème peut être résolu en calculant telle ou telle opération.

Parmi les problèmes proposés, il y a évidemment des problèmes de quotition et de partition et l'enseignant a ainsi la possibilité d'apprécier dans quelle mesure ses élèves réinvestissent ce qu'ils ont appris dans les « leçons de conceptualisation » décrites dans ce chapitre.

Enfin, une dernière caractéristique de la progression adoptée dans *J'apprends les maths* est que ces bonnes compétences en résolution de problèmes concernent tout particulièrement les problèmes de quotition, ceux qu'il est le plus difficile de Reconnaitre en tant que problèmes de division du fait qu'ils ne correspondent pas à la signification typique de cette opération.

Deux éléments expliquent ces bonnes compétences :
1°) Dès le CE2, les élèves calculent par quotition des divisions par 10, 15, 25, 50 et 100 (*J'apprends les maths* est la seule méthode à le proposer).
2°) Lors de la première leçon où le mot « division » est prononcé, c'est la signification quotition qui est mise en avant. Or, lorsqu'on annonce aux élèves qu'ils vont apprendre la définition d'une division dans la séance qui suit, ils ne dissimulent généralement pas leur joie : enfin, ils vont apprendre cette quatrième opération ! Or, quand une personne est affectivement engagée dans un apprentissage, celui-ci en bénéficie grandement : la personne est plus attentive, elle mémorise mieux… Ainsi, on peut parler d'une sorte de « prime à l'apprentissage » pour la signification qu'on choisit de privilégier lors de la situation d'introduction d'une notion. Comme il n'y a aucune crainte à avoir sur le fait qu'à terme, les élèves reconnaitront les problèmes de partage en tant que problèmes de division, c'est un des points forts de cette progression que cette « prime à l'apprentissage » aille aux problèmes de quotition.

Chapitre 3

Langage, géométrie et mesure

Contrôles perceptif, instrumental et conceptuel des « objets géométriques »

Dans les programmes 2002 du cycle 3 de l'école élémentaire, l'objectif principal de la géométrie était défini ainsi : «… permettre aux élèves d'améliorer leur *vision de l'espace* (repérage, orientation), de se familiariser avec quelques figures planes et quelques solides et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. »

À strictement parler, les « objets géométriques » ne peuvent être contrôlés ni par la perception, ni par le recours à des instruments. On sait en effet que l'art du géomètre est « de raisonner juste sur des figures fausses » et que le seul contrôle qui, à terme, sera autorisé en géométrie, est de nature intellectuelle : c'est celui qui s'effectue en utilisant les propriétés des objets géométriques.

L'enfant qui, à l'école élémentaire, vérifie de manière instrumentale que « tel angle est un angle droit » ne fait, en réalité, que vérifier que la figuration qu'il a sous les yeux est compatible avec l'idée d'« angle droit ». À strictement parler, il ne voit pas un angle, mais une figuration de celui-ci, et la décision de compatibilité devrait, en toute rigueur, s'accompagner d'un commentaire relatif au degré de compatibilité qui est visé et à la précision de l'instrument de mesure qui est utilisé.

Pour un adulte cultivé, il est clair que les « objets » de la géométrie ne doivent pas être confondus avec leurs figurations. L'idée que nous essaierons de défendre dans ce chapitre est que, pour favoriser au mieux le progrès des élèves, la distinction entre les « objets géométriques » et leurs figurations doit être présente à l'esprit du pédagogue dès ce niveau de la scolarité. Comme le langage fait souvent usage des mêmes mots pour désigner les uns et les autres, cela n'aide évidemment guère à leur distinction. Mais il y a pire : l'enfant rencontre de manière précoce de nombreux mots du vocabulaire de la géométrie dans un usage quotidien qui est sensiblement différent de leur usage géométrique. Cela peut être à l'origine de difficultés importantes.

Langage quotidien et langage géométrique

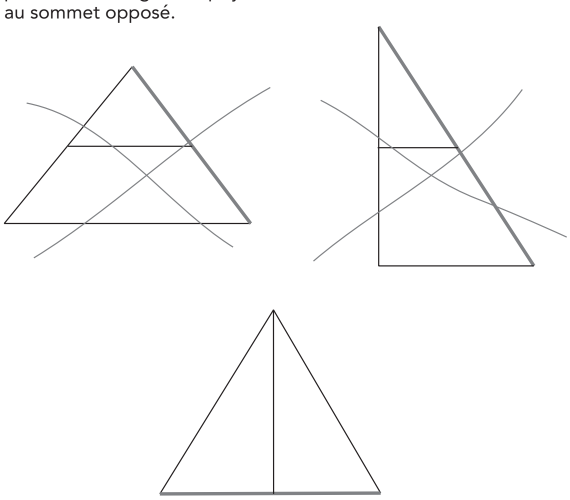
Des difficultés liées à la sémantique du langage quotidien

L'enfant doit comprendre les mots « sommet », « côté », « face », par exemple, lors des séances consacrées à la géométrie, alors qu'il a déjà rencontré ces mêmes mots dans une pratique ordinaire de la langue. Or, ils n'ont pas le même sens dans l'une et l'autre langue, et ce peut être la source de difficultés.

Ainsi, dans le langage quotidien, un « sommet » est le plus souvent celui d'une montagne, et ce mot réfère alors au point le plus haut de cette montagne. Le triangle, lui, a 3 sommets, et il suffit que ce triangle soit « posé sur une pointe » pour qu'un de ses sommets soit le point le plus bas de la feuille de papier ! Pensons aussi aux « petits côtés » d'une feuille 21 x 29,7 qui, lorsqu'on écrit sur cette feuille, sont situés « en haut » et « en bas » de la feuille, et non « sur les côtés », comme on pourrait s'attendre à les y trouver.

On trouve ci-après le travail d'un élève de 6e lors d'une des évaluations nationales qui s'effectuaient à la rentrée de septembre. La consigne est de tracer un triangle, d'en colorier un côté puis de joindre le milieu du côté colorié au sommet opposé. L'élève effectue un premier essai, le barre, un second qu'il barre également avant de proposer une solution. Essayons de reconstituer sa démarche.

Trace un triangle avec l'un des côtés en couleur ;
puis trace un segment qui joint le milieu du côté colorié
au sommet opposé.



Lors de sa première tentative, l'élève choisit très classiquement un côté colorié « sur le côté » (droit). Mais il n'arrive pas à déterminer le sommet opposé du fait que ce point ne lui apparait pas comme « un sommet ». L'élève a vraisemblablement posé son crayon au milieu du côté colorié, puis il a visé le « sommet » opposé, mais, n'acceptant pas que la pointe de son crayon descende, il a tracé un trait… horizontal. L'élève décide de recommencer.

Lors de la tentative précédente, c'était la détermination d'un sommet qui posait problème. Dans cette deuxième tentative, l'élève croit pouvoir résoudre le problème en accentuant les caractéristiques perceptives du seul sommet qu'il considère, celui du haut de la feuille. Alors que son premier triangle ressemblait à un volcan d'Auvergne, le second est un pic alpin ! Il y a moins de chance que l'enfant perde de vue un tel sommet. Mais ce sommet-là ne convient pas et le problème n'est donc pas résolu. Là encore, l'élève n'accepte pas que la pointe de son crayon descende pour atteindre un sommet, et son tracé se fait à l'horizontale.

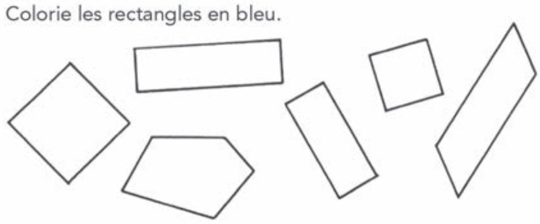
Finalement, c'est en renonçant à situer le côté colorié « sur le côté » que l'enfant réussit la tâche qui lui est demandée. Il lui est plus facile de renoncer à placer le côté « sur le côté » que de renoncer à placer le sommet en haut de sa feuille. On voit comment cet enfant « s'est débattu » avec les mots « côté » et « sommet » pour enfin réussir cette tâche géométrique.

Il est clair que, pour aider les enfants, il convient d'exhiber ces différences d'usage des mêmes mots, de les confronter comme ils l'ont été ci-dessus et d'insister pour que les enfants, lorsqu'ils ont à dessiner un triangle quelconque, fassent usage d'une représentation du triangle différente de son stéréotype, une représentation où ce triangle ne ressemble pas à une montagne.

Des difficultés liées à la pragmatique du langage quotidien

Considérons la tâche suivante :

Colorie les rectangles en bleu.



L'enseignant ne devra évidemment pas s'étonner qu'un enfant, lorsqu'il est confronté à cette tâche, ne colorie pas les carrés en bleu. En effet, alors que, pour le mathématicien, le carré est un rectangle (un rectangle particulier, qui a 2 côtés adjacents de même longueur), pour le jeune enfant ce n'est pas le cas.

Un premier niveau d'explication est le suivant : cet enfant ne dispose pas encore d'une définition relationnelle du rectangle et du carré, il procède encore à une catégorisation perceptive de ces figures. Dans ce cas, chacun des mots « rectangle » et « carré » est attaché à un prototype de figure et, comme la figure prototypique du rectangle n'est pas celle du carré, il n'y a aucune chance que le carré soit considéré comme un rectangle. C'est certainement le cas de nombreux enfants, mais il n'est pas sûr qu'il suffise de disposer d'une définition relationnelle du rectangle et du carré pour considérer les carrés comme des rectangles (des rectangles particuliers) dans la situation précédente.

En effet, la difficulté rencontrée ici dépasse le cadre des apprentissages géométriques. Montrons-le en examinant une situation similaire qui n'est pas de nature géométrique. Rappelons que les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 31, etc. sont premiers car ils ont pour seuls diviseurs 1 et eux-mêmes, et considérons la proposition suivante : « *Certains des nombres premiers plus grands que 31 sont impairs.* »

Lorsqu'on demande à un adulte, même cultivé, de dire si cette proposition est vraie ou fausse, on peut s'attendre à deux types de réponse :

– soit il raisonne de façon ordinaire, et cette proposition ne le satisfait pas parce qu'il sait que « tous les nombres premiers plus grands que 31 sont impairs » ; de son point de vue, il n'est pas acceptable de dire seulement que certains

de ces nombres sont impairs, et il risque de rejeter cette proposition comme fausse ;
– soit il raisonne comme un mathématicien, et la proposition « certains des nombres premiers plus grands que 31 sont impairs » est acceptée comme vraie, car si tous ces nombres premiers sont impairs, il est clair que certains le sont.

Cet exemple montre qu'un adulte averti, qui a toutes les connaissances nécessaires, peut se laisser surprendre par ce type de tâche.

Dans les deux situations précédentes, la réponse« scolaire » qui est attendue nécessite une inférence : « un carré est un rectangle particulier » dans un cas, « si tous les nombres considérés sont impairs, certains le sont » dans l'autre. Ce qui pose problème, ce n'est pas tant la difficulté de ces inférences que le fait qu'un interlocuteur ordinaire s'arrangera pour que je n'aie jamais à faire ce genre d'inférence. Dans l'un et l'autre cas, les questions sont posées sous une forme qui n'est pas celle d'un dialogue ordinaire[1].

Il y a donc une spécificité du raisonnement mathématique. Lorsqu'un enfant est confronté à certaines tâches (colorier des rectangles, par exemple), il ne lui suffit pas d'avoir les connaissances nécessaires (le carré est un rectangle particulier, dans le cas de cette tâche). Pour comprendre l'énoncé de la tâche, il doit, de plus, penser à raisonner de manière « savante », et non tel qu'il le fait spontanément pour comprendre le langage ordinaire.

Il est clair qu'il s'agit là d'un apprentissage au long cours ! C'est pourquoi, dans *J'apprends les maths CE2*, nous sommes évidemment attentifs au fait de présenter le carré comme un rectangle particulier, mais nous ne considérons pas qu'en début de cycle 3, ce point de vue savant sur le carré peut-être celui de tous les élèves. Il s'agit de ne pas différer la rencontre des élèves avec un usage savant des mots tout en ayant conscience de la difficulté que certains d'entre eux éprouvent à s'approprier un tel usage.

Un cas particulier important : celui où le mot qui désigne l'objet géométrique n'appartient pas au langage quotidien

Si l'enfant a déjà fait usage des mots « sommet », « côté », « carré »… avant d'entrer à l'école, il n'a en revanche probablement jamais utilisé le mot « segment », ni d'ailleurs le mot « droite » en tant que substantif (il sait ce qu'est « une ligne droite », mais pas « une droite »). Cette situation est particulièrement intéressante pour le pédagogue : en effet, il n'a pas, dans ce cas, à confronter deux usages du même mot tout en espérant que ses élèves seront, lors des différentes tâches qu'il propose, assez attentifs pour ne pas se laisser porter par l'usage quotidien et pour raisonner de manière savante. Il est dans une situation favorable pour apparier à ce mot ou à cette locution, que les élèves rencontrent pour la première fois, le plus grand nombre possible de propriétés qui fondent l'objet géométrique en question et, donc, qui le distinguent de ses figurations.

L'enseignant peut, par exemple, dire aux élèves qu'en géométrie, ce qu'on appelle « une droite » n'est pas un trait droit tel qu'on peut en tracer un sur une feuille : c'est un « trait imaginaire » de longueur infinie au sens où on peut le prolonger mentalement aussi loin qu'on le veut. De même, « un segment » ne doit pas, lui non plus, être confondu avec un trait parce que, s'il est de longueur finie, il contient en revanche un nombre infini de points : entre deux points quelconques, on peut toujours s'imaginer la présence d'une infinité d'autres. Il ne faut évidemment pas exagérer la portée de tels échanges avec les élèves : ceux-ci ne deviendront pas des géomètres du seul fait que le pédagogue mène de tels dialogues avec eux, mais il n'est peut-être pas indifférent de développer ainsi chez les jeunes enfants l'intuition de la nature véritable des objets dont se préoccupe la géométrie.

Du coup, une question se pose : à quel niveau de la scolarité convient-il d'introduire le vocabulaire spécialisé de la géométrie que constituent des locutions et des mots tels que « une droite », « segment », « parallèle », etc. ? Il convient en effet de ne pas les introduire trop tôt, c'est-à-dire avant que les élèves soient capables des expériences mentales susceptibles de les amener à distinguer les objets géométriques de leurs figurations. C'est pourquoi, dans *J'apprends les maths CE2*, nous avons continué à utiliser les mots « trait droit » et « ligne droite » plutôt que « segment » ou « droite », réservant l'introduction de ces nouveaux mots au CM1, à un moment où les expériences mentales précédentes sont accessibles à la quasi-totalité des élèves[2].

1. Tout dialogue repose sur des conventions : si, par exemple, quelqu'un me demande « Avez-vous l'heure, s'il vous plait ? », je sais que la réponse « Oui » ne suffit pas, bien que cette réponse soit « correcte » d'un certain point de vue (celui de la sémantique). C'est Grice (1975) qui, le premier, a mis en évidence et a analysé cette sorte de contrat tacite qui lie des partenaires soucieux de communiquer et qui explique que chacun d'eux sait « doser » l'information qu'il transmet : ni trop, ni trop peu. Parfois, en mathématiques, le contrat est différent de celui qui régit les situations de la vie ordinaire : de manière évidente, qu'il s'agisse de l'exemple de géométrie ou de celui d'arithmétique, l'enseignant qui pose la question n'en dit pas assez pour être sûr d'être compris. L'article précédent de Grice peut être considéré comme l'article fondateur d'une branche de la linguistique qu'on appelle la « pragmatique ». En psychologie cognitive, la plupart des chercheurs qui étudient le raisonnement chez l'enfant comme chez l'adulte utilisent les travaux de Grice (voir Politzer, 1990, par exemple).
Grice H.P. (1975). « Logique et conversation », *Communications*, n° 30, pp. 52-72.
Politzer (1990) « Le Raisonnement déductif ». *In* Richard J.F., Bonnet C. & Ghiglione R., *Traité de psychologie cognitive 2*. Paris : Dunod.

2. Le pire des choix serait évidemment celui qui consisterait à utiliser alternativement le mot « segment », par exemple, et le mot « trait » pour que les élèves s'habituent à l'emploi du mot savant en lieu et place du mot quotidien. Cette décision pédagogique reviendrait en effet à créer délibérément l'obstacle pédagogique qu'il faut surmonter (parce qu'il est alors incontournable !) dans le cas où un même mot appartient à la fois au langage quotidien et au langage spécialisé de la géométrie. Il est particulièrement surprenant qu'on trouve explicitement cette recommandation dans les documents d'accompagnement des nouveaux programmes du cycle 2. L'enseignant de cycle 3 dont les élèves auraient, au CE1, utilisé le mot « segment » comme synonyme du mot « trait » peut évidemment revenir à l'usage du mot quotidien au CE2 : ses élèves ne seront pas surpris qu'il s'exprime simplement à ce niveau de la scolarité, et cela permettra de faire de la « réapparition » du mot « segment » en CM1 un « évènement » qui aide au dialogue pédagogique évoqué précédemment.

Comparer et construire des figurations des objets géométriques

Si, comme nous venons de le voir, il importe que le pédagogue soit attentif aux aspects langagiers de l'activité géométrique, celle-ci comporte évidemment d'autres dimensions. Il est intéressant, par exemple, de s'intéresser à la nature des tâches qui conduisent l'élève à expliciter et à organiser les propriétés des objets géométriques. Deux grands types de tâches peuvent être distinguées : celles de comparaison et celles de construction.

La comparaison est incontournable. C'est ainsi que les nouveaux programmes ne commettent pas l'erreur des anciens, qui recommandaient d'enseigner aux élèves l'angle droit sans leur enseigner plus généralement la notion d'angle. Sans engager les élèves dans une tâche de comparaison de l'angle droit à d'autres qui ne le sont pas, il nous semble tout simplement impossible d'enseigner ce qu'est un angle droit, parce qu'il est alors impossible d'expliciter parmi toutes les propriétés des figurations d'angles droits celles qui correspondent au mot « angle » et celles qui correspondent au mot « droit ».

Par ailleurs, les tâches de comparaison de figurations différentes des objets géométriques sont importantes pour aider les élèves à aller au-delà d'une catégorisation perceptive qui ne retiendrait comme exemplaires d'un objet géométrique que ses figurations les plus typiques. Il est crucial, par exemple, qu'un élève sache qu'un triangle n'est pas toujours « pointu de toutes parts » comme lorsqu'il est équilatéral ou presque équilatéral : il peut aussi être « plat » (lorsque l'un de ses angles est beaucoup plus grand que les autres). De même, il convient que les élèves sachent qu'un cylindre peut être très plat comme une pièce de monnaie ou longiligne comme une baguette de bois ronde, etc.

Les tâches de construction jouent un rôle complémentaire dans le progrès des élèves parce qu'elles conduisent à organiser les propriétés des objets géométriques d'une autre façon que les tâches de comparaison. Un triangle, par exemple, est entièrement déterminé par la connaissance de la longueur d'un de ses côtés et la valeur des angles adjacents (au CE2, dans les séquences 86 et suivantes, cette valeur est donnée par deux gabarits). En dehors d'une tâche de construction, on n'est jamais conduit à s'intéresser ainsi à un seul côté sur les trois et à deux seulement des trois angles. Les côtés d'un triangle eux-mêmes ne sont pas considérés de manière identique dans une tâche de comparaison et dans une tâche de construction. Pour construire un triangle à partir de la connaissance de la longueur d'un de ses côtés et de la valeur des angles adjacents, on commence par tracer le côté en question, puis un second côté alors qu'on n'en Connait pas la longueur. Il convient donc de « voir large » et de faire le trait correspondant plus long que nécessaire : une étape finale consistera à gommer ce qui dépasse. Le triangle qu'il s'agit de construire est ainsi conçu comme une partie de la figure qui sera tracée avant l'emploi de la gomme et non comme une entité qui doit nécessairement se présenter d'emblée en tant que telle.

Dans une tâche de construction, c'est donc un autre point de vue qui est porté sur un objet géométrique que celui qui est privilégié dans une tâche de comparaison. Cet autre point de vue est d'autant plus intéressant qu'il conduit à ne retenir que les propriétés nécessaires à la construction, et qu'il constitue donc une préparation aux raisonnements géométriques du collège, raisonnements qui, par définition, se fondent sur la distinction entre ce qui est nécessaire et ce qui ne l'est pas.

Langage et mesure : le cas des longueurs[3]

Quelques généralités sur la mesure

Rappelons d'abord quelques généralités concernant la mesure des grandeurs. Trois sortes d'entités doivent en effet être distinguées :

→ *Les supports des grandeurs* : on parlera, par exemple, de la longueur d'un segment de droite, ou d'une ligne brisée, mais de l'*aire* d'un triangle ou d'un rectangle. Plus généralement, on ne peut parler d'un type de grandeur donné que relativement à un certain type de support : on parle de longueurs concernant des segments de lignes droites ou courbes, on parle d'aires concernant des surfaces délimitées (qu'elles soient planes ou courbes), on parle de volumes concernant des solides, etc.

→ *Les grandeurs elles-mêmes* (les longueurs, les aires, les volumes par exemple) ne doivent évidemment pas être confondues avec l'un des supports qui les réalisent : une même longueur correspond à des segments de lignes dont certaines sont droites, d'autres sont brisées et d'autres courbes, une même aire peut être celle d'un triangle ou d'un rectangle, etc.

→ Enfin, *une mesure* d'une longueur donnée (d'une aire donnée, etc.) est *un nombre* qui exprime le rapport de cette longueur (de cette aire, etc.) à une autre longueur (à une autre aire, etc.) qu'on appelle *unité*.

À une même longueur (respectivement une même aire) correspondent donc diverses mesures de cette longueur (de cette aire) selon l'unité qui est choisie.

Un mot manque dans ce glossaire : celui d'étalon. L'étalon est à l'unité ce que le « mètre-étalon » construit en platine et « déposé au pavillon de Breteuil » est au mètre : l'étalon est une réalisation (une matérialisation) de l'unité. L'unité est une grandeur (le cm, par exemple, est une longueur), mais dans un étalon d'1 cm, cette grandeur est attachée à un support : une bande de 1 cm de long, par exemple.

3. Le texte ci-après est repris en grande partie du chapitre sur la géométrie et la mesure de la Présentation du *Livre du maitre* de *J'apprends les maths CE1*.

Mesurer des longueurs en cm et, dans le même temps… en pouces

La notion d'étalon est importante pour comprendre la didactique de la mesure à l'école primaire. En effet, l'activité qui, classiquement, sert à introduire la mesure des longueurs est la suivante : on a choisi un étalon de longueur et on arpente divers traits à l'aide de cet étalon. La mesure obtenue s'exprime alors soit par un nombre entier, soit par un encadrement entre deux entiers successifs.

Ce procédé d'arpentage est fondamental car c'est lui qui permet de donner aux enfants l'intuition de ce qu'est une mesure : ce trait est long comme 3 allumettes, par exemple. Il est par ailleurs adapté aux jeunes enfants parce qu'il conduit à un encadrement par des mesures entières, alors que la mesure est un rapport qui, généralement, ne peut pas s'exprimer par un nombre entier (la diagonale du carré dont le côté mesure 1 a pour mesure $\sqrt{2}$).

Examinons la progression qui est le plus souvent adoptée aujourd'hui. On propose successivement aux enfants les deux sortes d'activités suivantes :

A 

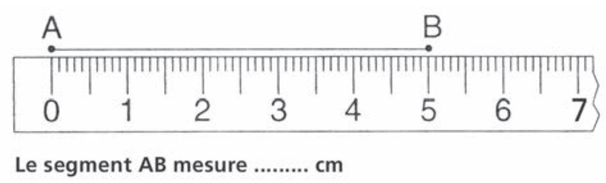
U 

Si l'unité est U, la bande A mesure…

V 

Si l'unité est V, la bande A mesure…

Puis :

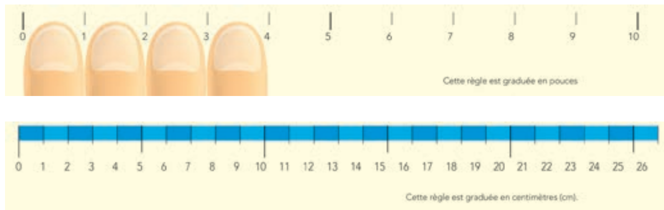


Il n'y a pratiquement pas de transition entre une activité et l'autre : l'enfant procède d'abord à des arpentages avec des unités quelconques, et lorsqu'il rencontre une unité conventionnelle de longueur, c'est directement avec la règle graduée en cm, c'est-à-dire sous une forme très élaborée où l'arpentage qui a permis la mesure n'est pas facile à reconstituer mentalement.

Cette progression présente un double inconvénient :
– lorsqu'ils arpentent avec une unité quelconque, beaucoup d'enfants n'ont pas conscience qu'ils mesurent, parce qu'ils ont déjà une connaissance sociale du phénomène de la mesure et que pour eux, mesurer, ça se fait « avec la règle et avec des cm » ;
– lorsqu'ils mesurent avec la règle graduée, ils ne font aucun lien entre cet outil et le résultat d'un arpentage à l'aide d'un étalon d'1 cm.

Du coup, lorsqu'on demande aux enfants de « montrer 1 cm sur la règle », ils montrent le plus souvent l'intervalle entre 0 et 1 (voire le seul chiffre 1), mais la longueur d'un intervalle entre 2 numéros successifs n'est pas aussi facilement interprétée comme 1 cm. En fait, de nombreux enfants apprennent à se servir d'un double décimètre par répétition de la « bonne séquence d'actions » (je pose le 0 sur une extrémité du segment, je regarde à l'autre extrémité, etc.), sans réellement comprendre la structure de cet outil. De nombreuses erreurs attestent d'ailleurs de la nature de cet apprentissage : certains enfants font coïncider une extrémité du segment avec le 1 (et non le 0), d'autres avec le bord de la règle.

C'est une autre progression qui a été adoptée dans *J'apprends les maths CE2*[4]. On y utilise de manière conjointe le pouce et une bande de longueur 1 cm comme *étalons de longueur*. C'est ainsi que les enfants disposent de 2 règles graduées, l'une en pouces et l'autre en cm :



On leur propose de mesurer des longueurs d'abord en pouces, puis en centimètres.

Ces utilisations successives de 2 étalons doivent amener les élèves à mieux se représenter ce qu'est une longueur de 1 cm. En effet, l'arpentage est explicite dans la règle graduée en pouces (de manière évidente, on y a mis bout à bout des pouces). Or une règle graduée en cm est construite de la même manière : on y a mis « bout à bout des cm ».

Quand, dès le cycle 2, les enfants rencontrent cette règle graduée en cm, ils s'approprient d'autant mieux cette structure qu'elle est alors dépourvue de toute numérotation. Pour mesurer la longueur d'un trait, ils sont ainsi amenés à « compter les cm ». On veut par là qu'ils comprennent qu'une longueur de 6 cm est équivalente à 6 longueurs de 1 cm mises bout à bout. Lorsqu'ils utilisent un double décimètre numéroté, il leur est plus facile de comprendre que, depuis le trait du 0 jusqu'au trait du 6, il y a 6 longueurs de 1 cm.

Remarquons maintenant que certaines expressions qui viennent d'être employées sont incorrectes :
– Il est incorrect de dire qu'on met « bout à bout des cm », car ce sont des bandes de longueur 1 cm qui sont juxtaposées et non des cm. Cette façon de s'exprimer relève de la confusion entre « unité » et « étalon » !
– Il est incorrect de dire qu'« un segment mesure 2 pouces », car le pouce est un étalon ; il serait préférable de dire que « ce segment mesure 2 quand l'unité est la longueur d'un pouce ». Encore une confusion entre « unité » et « étalon » !

Mais ce n'est pas toujours en s'exprimant d'emblée de la façon la plus correcte qu'on favorise le mieux l'apprentissage. Le cas des « incorrections » précédentes nous semble même montrer que *certaines incorrections ont une grande valeur didactique*.

4. Dans *J'apprends les maths CE1*, la même progression est mise en œuvre avec une règle graduée en allumettes plutôt qu'en pouces.

En effet, en choisissant deux entités, dont l'une est un étalon (le pouce) et l'autre une unité (le cm), et en acceptant le « jeu de langue » qui consiste à s'exprimer tantôt avec l'unité comme si elle était un étalon (« on met bout à bout des cm ») et tantôt avec l'étalon comme s'il était une unité (« un segment mesure 2 pouces »), on aide l'enfant à s'appuyer sur ce qu'il Connait le mieux, le pouce-étalon, pour concevoir l'entité la plus abstraite, le *cm-unité*.

Par ailleurs, en utilisant deux étalons de longueurs différentes, on aide les enfants à prendre conscience que pour penser une mesure, il faut penser à la fois un nombre et une unité. Ainsi, l'erreur qui consiste à répondre que « 3 pouces c'est moins long que 7 cm », du fait que 3 < 7, est fréquente chez les débutants. Ces élèves doivent apprendre que pour comparer deux longueurs dont chacune est donnée par une mesure, la comparaison des nombres ne suffit pas, car à chaque nombre est attachée une unité. De même, pour savoir quelle est la longueur exprimée par une mesure donnée (7 cm par exemple), il ne suffit pas de s'intéresser au nombre, il faut coordonner l'unité (le cm et non le pouce) et le nombre de fois qu'elle est répétée (7).

Là encore, on remarquera l'utilisation didactique qui est faite de la différence de nature entre le pouce (plus proche de l'étalon) et le cm (qui est une unité) : « le changement d'unité » sous-jacent à l'activité précédente (comparer 2 pouces et 8 cm) serait très difficile s'il s'agissait de deux unités conventionnelles (38 cm et 4 dm, par exemple) ; il est beaucoup plus simple lorsque l'une des unités (la longueur d'un pouce) correspond à un étalon familier.

L'approche didactique de la mesure des longueurs qui est exposée ici est donc nouvelle en ce sens que les activités d'arpentage avec un étalon familier ne précèdent pas l'introduction d'une unité conventionnelle. Bien au contraire, les longueurs *sont dans le même temps mesurées en cm et en pouces*. L'interaction entre ces deux sortes de mesure est considérée ici comme un *facteur essentiel de l'apprentissage*[5].

5. Du fait de la petite longueur qu'il représente, il est évidemment hors de question d'utiliser le mm comme étalon. Mais on remarquera que, le jour où les élèves utilisent une règle graduée en mm pour la première fois (*cf.* séquence 14), celle-ci est présentée parmi d'autres règles, graduées en allumettes, en pouces et en cm. On vise en effet à ce qu'ils raisonnent avec le mm par analogie avec les autres unités, et qu'ils imaginent donc le « report des mm » le long des traits à mesurer.