

Équations de droites et systèmes linéaires

Chapitre 12

*Vous connaissez le chemin le plus court entre deux points ?
La ligne droite. Et le plus long ? Le taxi !
Extrait de Fallait pas l'ouvrir, Patrick Timsit*

Déjà vu au Collège

- Droites et représentations graphiques de fonctions affines
- Coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées et son ordonnée à l'origine
- Systèmes de deux équations à deux inconnues

À découvrir en Seconde

- Démontrer que toute droite du plan a une équation de la forme $y = mx + p$ où $x = k$
- Reconnaître le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points à l'aide des équations de droites
- Déterminer le nombre de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues



Activité 1 Équation de droite

De la 3^e
à la 2^{de}

Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 a) Placer les points $A(-2; -4)$, $B(4; 5)$ et $E(4; 1)$.

b) Lire l'ordonnée p du point commun à l'axe (Oy) et à la droite (AB) .

c) Déterminer par une lecture graphique les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Vérifier cette lecture par le calcul. En déduire le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ que l'on note m .

2 Soit M un point variable de la droite (AB) de coordonnées $(x; y)$.

a) Que peut-on dire des points A , B et M ?

b) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$? Traduire cette propriété à l'aide des coordonnées des vecteurs et montrer que l'on l'obtient : $y = mx + p$, si on exprime y en fonction de x .

c) Soit N un point de coordonnées $(x'; y')$ avec : $y' = mx' + p$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour le point N ?

Ainsi si $M(x; y)$ appartient à la droite (AB) , x et y vérifient l'égalité $y = mx + p$ et réciproquement, si x et y vérifient cette égalité, le point de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite (AB) . On dit que : $y = mx + p$ est une équation de la droite (AB) .

3 En utilisant une méthode semblable à celle de la question **2. b)** déterminer une équation de la droite (AE) .

4 a) Tracer la droite (BE) . Pourquoi cette droite est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?

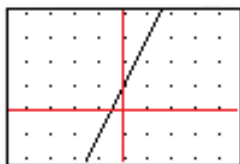
b) À quelles conditions sur x et y un point $P(x; y)$ appartient-il à la droite (BE) ?

Activité 2 Déterminer une équation d'une droite

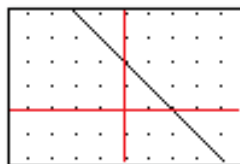
Le tracé des droites ci-dessous est obtenu avec une calculatrice graphique.

Les droites perpendiculaires en rouge sont les axes du repère, les graduations sont séparées d'une unité et les points de la grille sont des points à coordonnées entières.

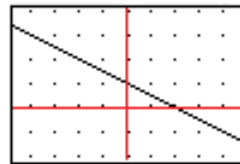
Déterminer, par lecture graphique, une équation de chaque droite.



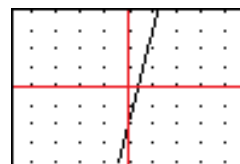
A



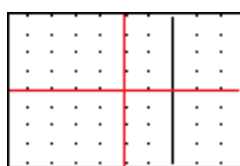
B



C



D



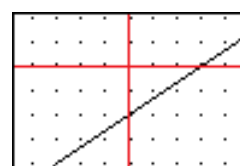
E



F



G



H

Activité 3 Deux inconnues et deux égalités

Soit l'égalité $E : 3x - 4y = 24$, où x et y sont deux nombres réels.

1 Sachant que $x = 4$, vérifier que l'égalité E est vraie pour $y = -3$. On dit que le couple de nombres réels $(4 ; -3)$ vérifie l'égalité E . En est-il de même pour les couples :

$$(12 ; 3) ; (3 ; 12) ; (0 ; 8) ; (8 ; 0) ; (-4 ; -9) ; \left(\frac{5}{3} ; \frac{19}{4}\right) ; (4\sqrt{2} + 3 ; 3\sqrt{2} - 3) ?$$

2 a) Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points dont les coordonnées sont les couples de la question 2. Que peut-on observer pour ceux qui vérifient l'égalité E ?

b) À partir de l'égalité E , exprimer y en fonction de x et justifier que les couples de nombres réels qui vérifient l'égalité E sont les coordonnées des points d'une droite $\mathcal{D}$.

3 Soit l'égalité $E' : x + 2y = -2$, où x et y sont deux nombres réels.

a) Trouver trois couples de nombres réels qui vérifient l'égalité E' .

b) À partir de l'égalité E' , exprimer y en fonction de x et tracer la droite $\mathcal{D}'$ dont les points ont des coordonnées qui vérifient l'égalité E' dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

4 a) S'il existe un couple de nombres qui vérifie simultanément les égalités E et E' , à quoi doit-il correspondre graphiquement ? Un tel couple existe-il ? Si oui, déterminer ce couple par une lecture graphique.

b) À partir des égalités des questions 2. b) et 3. b) retrouver par un calcul le couple de nombres réels qui vérifie simultanément les égalités E et E' .

Activité 4 Droites parallèles ou sécantes

1 On a représenté sur le schéma ci-contre, pour une fenêtre standard ($X_{\min} = -10$, $X_{\max} = 10$, $Y_{\min} = -10$ et $Y_{\max} = 10$), les droites $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 3x - 2$, $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 3x + 1$ et $\mathcal{D}_3$ d'équation $y = 2,95x - 1$.

a) Reconnaître chacune des trois droites.

b) Les trois droites paraissent-elles parallèles ?

2 a) Résoudre l'équation $3x - 2 = 3x + 1$. Que peut-on en conclure pour les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$?

b) Résoudre l'équation $3x - 2 = 2,95x - 1$. Que peut-on en conclure pour les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$?

c) Résoudre l'équation $3x + 1 = 2,95x - 1$. Qu'en conclut-on pour les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$?

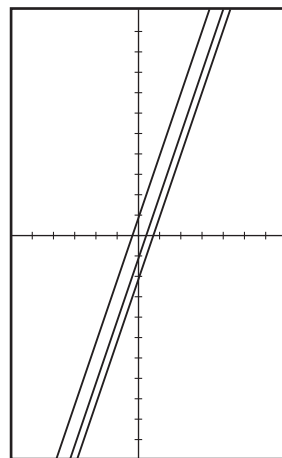
3 a) À l'aide d'une calculatrice graphique représenter les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

b) Essayer de déterminer une fenêtre qui permettrait de rendre compte des résultats obtenus à la question 2. Le résultat vous semble-t-il satisfaisant ?

4 Soit Δ et Δ' deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Quelles conjectures feriez-vous pour dire que les droites Δ et Δ' sont :

a) parallèles distinctes ? **b)** parallèles confondues ? **c)** sécantes ?

Comment démontrer ces conjectures ?



1. Équations de droites

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Propriété 1

Toute droite du plan à une équation de la forme :

- $y = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels, si elle est non parallèle à l'axe des ordonnées ;
- $x = k$ où k est un nombre réel, si elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

Commentaire

m est appelé le coefficient directeur de la droite.

p est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite.

Commentaires

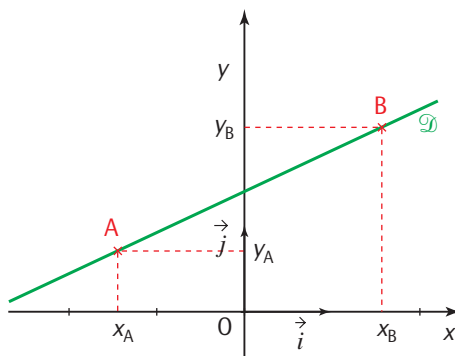
- Tout vecteur de même direction qu'une droite $\mathcal{D}$ est appelé vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

- Si une droite $\mathcal{D}$ a une équation de la forme $y = mx + p$, alors le vecteur $\vec{u}(1 ; m)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, et réciproquement.

Démonstration

Soit $\mathcal{D}$ une droite et soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.



Un point $M(x ; y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}(x - x_A ; y - y_A)$ et $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ sont colinéaires. D'où, par la condition de colinéarité :

$$(x_B - x_A)(y - y_A) = (y_B - y_A)(x - x_A).$$

- Si $\mathcal{D}$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, on a $x_B - x_A \neq 0$ car $x_A \neq x_B$. D'où :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A.$$

Si on pose $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $p = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A + y_A$, la droite $\mathcal{D}$ a bien une équation de la forme $y = mx + p$.

- Si $\mathcal{D}$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, on a $x_B - x_A = 0$ car tous les points de $\mathcal{D}$ ont même abscisse. Mais $y_B - y_A \neq 0$, puisque A et B sont distincts, d'où :

$$(y_B - y_A)(x - x_A) = 0, \text{ soit } x = x_A.$$

Si on appelle k l'abscisse commune de tous les points de $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{D}$ a bien une équation de la forme $x = k$.

Remarque

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $y = mx + p$ est la représentation graphique de la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto mx + p$.

Commentaire

Si de plus leur ordonnée à l'origine est la même, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles confondues.

Propriété 2

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, non parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux.

Exemples et contre-exemple

Les droites d'équation :

$$y = \frac{1}{4}x \text{ et } y = \frac{1}{4}x - 2,$$

sont parallèles, car leurs coefficients directeurs sont égaux à $\frac{1}{4}$.

Les droites d'équation :

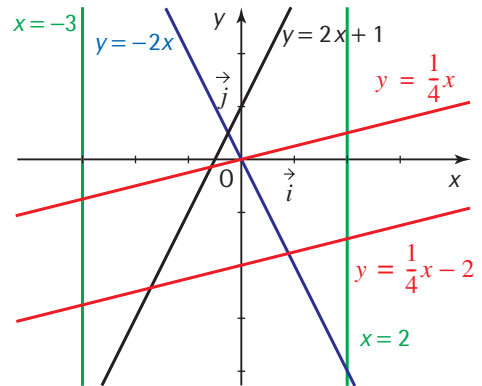
$$x = 2 \text{ et } x = -3$$

sont parallèles, car elles sont toutes les deux parallèles à l'axe des ordonnées.

Les droites d'équation :

$$y = -2x \text{ et } y = 2x + 1$$

ne sont pas parallèles car leurs coefficients directeurs sont différents.



2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition 1

Soit a , b et c trois nombres réels, a et b n'étant pas tous deux nuls. On appelle **équation linéaire à deux inconnues** x et y une équation de la forme : $ax + by = c$. Résoudre cette équation consiste à trouver tous les couples $(\alpha ; \beta)$ de nombres réels vérifiant : $a\alpha + b\beta = c$.

Exemple

Le couple $(3 ; 2)$ est une solution de l'équation $5x - 4y = 7$ car :

$$5 \times 3 - 4 \times 2 = 7.$$

Cette équation admet aussi le couple $(-1 ; -3)$ pour solution car :

$$5 \times (-1) - 4 \times (-3) = 7.$$

De même les couples $(0 ; -\frac{7}{4})$, $(\frac{7}{5} ; 0)$ et $(31 ; 37)$ sont solution de l'équation mais les couples $(4 ; 1)$ ou $(\frac{5}{2} ; 3)$ ne le sont pas.

Propriété 3

Une équation linéaire à deux inconnues, $ax + by = c$, admet une infinité de couples solution.

Commentaire

Pour trouver un couple solution, on affecte une valeur à x (ou y) et on cherche la valeur correspondante de y (ou x).

Attention

Graphiquement, les couples solutions $(x ; y)$ sont les coordonnées des points de la droite d'équation

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \text{ si } b \neq 0, \text{ ou}$$

$$x = \frac{c}{a} \text{ si } b = 0.$$

Définition 2

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

formé de deux équations linéaires à deux inconnues, consiste à trouver tous les couples $(\alpha ; \beta)$ de nombres réels solution simultanément de chacune des deux équations formant le système (S).

Attention

Graphiquement, les couples solution du système (S) correspondent aux coordonnées des points communs à deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont les équations sont déterminées par le système.

Exemple

Soit le système (S) :

$$\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 7x + y = 23 \end{cases}$$

Le couple $(3 ; 2)$ est solution de la première équation.

Ce couple est aussi solution de la deuxième équation. Donc $(3 ; 2)$ est une solution du système (S). Nous ne savons pas pour l'instant si cette solution est unique ou non.

Le système (S) peut s'écrire aussi :

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{4} \\ y = -7x + 23 \end{cases}$$

Les deux droites déterminées par le système sont sécantes car leurs coefficients directeurs sont différents, donc le couple solution $(3 ; 2)$ est unique.

Propriété 4

Le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

admet un unique couple solution si, et seulement si, $ab' - ba' \neq 0$.

Dans le cas où $ab' - ba' = 0$, le système possède soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Exemple

Le système :

$$\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 10x - 8y = 23 \end{cases}$$

ne possède pas une solution unique car $5 \times (-8) - (-4) \times 10 = 0$.

Les équations s'écrivent :

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{4}x - \frac{23}{8}$$

Ce sont des équations de droites parallèles non confondues. Le système n'a donc pas de solution.

1 Déterminer une équation d'une droite passant par deux points

Méthode

Cas 1

- Si les deux points ont la même abscisse k alors une équation de la droite est $x = k$.
- Si les deux points ont la même ordonnée p alors une équation de la droite est $y = p$.

Cas 2

Si les deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ ont des abscisses et des ordonnées différentes, une équation de la droite (AB) est de la forme :

$$y = mx + p.$$

- On détermine le coefficient directeur m en calculant $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- On détermine ensuite l'ordonnée à l'origine p en résolvant l'équation $y_A = mx_A + p$.

Exercice résolu

Équations des « côtés » d'un triangle

Énoncé

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $A(3 ; 1)$, $B(3 ; -2)$ et $C(-1 ; -2)$. Déterminer une équation des droites (AB), (BC) et (AC).

Résolution

- A et B ont la même abscisse 3, une équation de la droite (AB) est donc $x = 3$.
- B et C ont la même ordonnée -2 , une équation de la droite (BC) est donc $y = -2$.
- A et C n'ont ni la même abscisse, ni la même ordonnée, la droite (AC) a donc une équation de la forme $y = mx + p$ avec :

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2 - 1}{-1 - 3} = \frac{3}{4}.$$

Comme A appartient à la droite (AC), ses coordonnées vérifient l'équation de (AC) d'où :

$$y_A = mx_A + p \text{ soit } 1 = \frac{3}{4} \times 3 + p.$$

$p = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$. Une équation de la droite (AC) est donc :

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Remarque : si l'on connaît un point M de la droite de coordonnées $(0 ; y_M)$ alors $p = y_M$.

Exercice d'application

Soit le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation de la droite :

1. (PQ) sachant que $P(-4 ; 4)$ et $Q(2 ; 2)$;
2. (EF) sachant que $E(0 ; 1)$ et $F(5 ; -3)$;
3. (RS) sachant que $R(4 ; 3)$ et $S(7 ; 7)$;
4. (GH) sachant que $G(3 ; \sqrt{2})$ et $H(3 ; \sqrt{3})$;
5. (AB) sachant que $A\left(1 ; \frac{2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{5}{3} ; \frac{1}{5}\right)$;
6. (CD) sachant que $C\left(\frac{2}{5} ; \sqrt{2} + 1\right)$ et $D\left(\frac{1}{3} ; \sqrt{2} + 1\right)$.

2 Déterminer une équation d'une droite passant par un point et de direction donnée

Méthode

Cas 1

La direction de $\mathcal{D}$ est celle d'une autre droite $\mathcal{D}'$ dont on connaît une équation.

- Si $\mathcal{D}'$ est parallèle à l'axe des ordonnées, $\mathcal{D}$ l'est aussi.
- Si $\mathcal{D}'$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, les coefficients directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont égaux.

Cas 2

La direction de $\mathcal{D}$ est donnée par un vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(\alpha ; \beta)$.

- Si $\alpha = 0$, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $\alpha \neq 0$, le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est égal à $\frac{\beta}{\alpha}$.

Exercice résolu

Droite parallèle à une droite donnée

Énoncé

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, déterminer les équations des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sachant que :

- $\mathcal{D}_1$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$ et passe par le point A de coordonnées $(3 ; 4)$;
- $\mathcal{D}_2$ passe par le point O et est parallèle à la droite (BC) telle que $B(-1 ; 4)$ et $C(2 ; 0)$.

Résolution

a) La droite $\mathcal{D}_1$ et la droite $\mathcal{D}$ ont le même coefficient directeur, d'où $\mathcal{D}_1$ a une équation de la forme $y = 2x + p$.

A appartient à $\mathcal{D}_1$, d'où :

$$y_A = 2x_A + p, \text{ soit } 4 = 2 \times 3 + p, \text{ soit } p = -2.$$

Une équation de $\mathcal{D}_1$ est $y = 2x - 2$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de coordonnées $(3 ; -4)$ est un vecteur directeur de la droite (BC), son coefficient directeur est donc égal à $-\frac{4}{3}$.

La droite $\mathcal{D}_2$ a le même coefficient directeur ; son équation est de la forme :

$$y = -\frac{4}{3}x + p.$$

Mais comme $\mathcal{D}_2$ passe par O, son ordonnée à l'origine est 0. Une équation de $\mathcal{D}_2$ est :

$$y = -\frac{4}{3}x.$$

Exercice d'application

Soit $A(-2 ; 5)$, $B(1 ; 4)$ et $C(-3 ; -2)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer une équation de la droite (CD) sachant que ABCD est un trapèze de base [AB] et [CD].
- La droite Δ passe par le point A et est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de Δ et de l'axe des ordonnées ?

► Exercices 29 à 37

3 Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y

Méthode

Déterminer si le système a une solution unique.

A. Si oui, rechercher la solution

- Par substitution
 - Exprimer l'une des inconnues en fonction de la deuxième inconnue dans l'une des équations.
 - Remplacer dans la deuxième équation l'inconnue qui a été isolée par l'expression trouvée.
 - Résoudre l'équation obtenue qui est à une seule inconnue et déterminer la deuxième inconnue.
- Par combinaison
 - Multiplier les deux membres de chaque équation par des nombres tels que les coefficients de x (ou de y) soient opposés.
 - Ajouter membre à membre les deux nouvelles équations. Résoudre l'équation obtenue qui est à une seule inconnue et déterminer la deuxième inconnue.

B. Si non, déterminer si l'on a :

- aucune solution (les droites correspondant au système sont parallèles distinctes) ;
- une infinité de solutions (les droites correspondant au système sont parallèles confondues).

Exercice résolu

Combinaison ou substitution ?

Énoncé

Résoudre les systèmes : a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + 3y = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 17 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$.

Résolution

a) Le système a une solution unique car $3 \times 3 - (-1) \times 5 \neq 0$.

Résolution par substitution

Dans la première équation, $y = 3x - 7$. On a donc, en remplaçant y dans la deuxième équation :

$$5x + 3(3x - 7) = 35, \text{ soit } 14x - 21 = 35, \text{ d'où } x = \frac{56}{14} = 4 \text{ et } y = 3 \times 4 - 7 = 5.$$

Le couple solution est $(4 ; 5)$.

b) Le système a une solution unique car $3 \times 3 - 5 \times (-4) \neq 0$.

Résolution par combinaison

On choisit « d'éliminer » l'inconnue y par addition. On multiplie les deux membres de la première équation par 3 et ceux de la deuxième par 4. Le système :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 17 & (\times 3) \\ 5x + 3y = 9 & (\times 4) \end{cases} \text{ est équivalent au système } \begin{cases} 9x - 12y = 51 \\ 20x + 12y = 36 \end{cases}$$

d'où par addition membre à membre : $29x = 87$, soit $x = 3$.

On détermine y à partir de l'une des deux équations du système, par exemple :

$$3 \times 3 - 4y = 17, \text{ soit } 4y = 9 - 17 \text{ et } y = -2.$$

Le couple solution est $(3 ; -2)$.

Exercice d'application

Résoudre les systèmes (S) et (S') tels que :

$$(S) \begin{cases} 2x - 6y = -1 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} x - y = -8 \\ 3x + 7y = 25 \end{cases}$$

► Exercices 47 à 54



Inéquation à deux inconnues et ensemble de points du plan

1 Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 1$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = -x$.

1. a) Représenter la droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Les points $C(1; 3)$ et $E(2; 4)$ sont-ils des points de la droite $\mathcal{D}$?

c) Quelle est l'ordonnée du point E' de la droite $\mathcal{D}$ qui a la même abscisse que E ? Le point E' est-il au-dessus ou au-dessous de la droite $\mathcal{D}$?

2. a) Soit $M(x; y)$ un point situé dans le même demi-plan de frontière $\mathcal{D}$ que E' . Des inégalités $y < 2x + 1$ ou $y > 2x + 1$, laquelle est vraie ? Justifier la réponse.

b) Colorier en rouge l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'inégalité $y < 2x + 1$.

3. a) Représenter la droite $\mathcal{D}'$ sur le même graphique que la droite $\mathcal{D}$.

b) Le point $F(-3; 4)$ est-il un élément de l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'inégalité $y > -x$?

c) Colorier en vert l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'inégalité $y > -x$.

4. a) Dédurre des questions **2. b)** et **3. c)**, la portion de plan dont les points ont des coordonnées qui vérifient le système (S) $\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y > -x \end{cases}$.

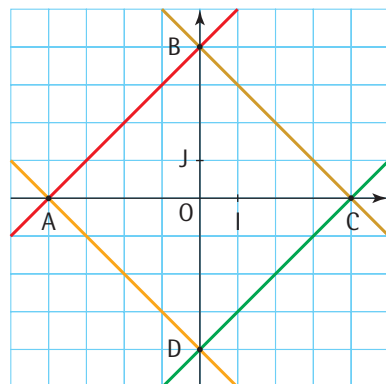
b) Quels sont les points d'abscisse -2 et d'ordonnée entière dont les coordonnées vérifient le système (S) ?

2 Soit la figure ci-contre, où le repère est orthonormal.

1. a) Déterminer les équations des droites (AB) , (DC) , (AD) et (BC) .

b) Justifier que $ABCD$ est un carré.

2. Quel est le système d'inéquations qui est vérifié par les coordonnées des points à l'intérieur du carré $ABCD$?



Un problème de mise en équation

1. On dispose d'un rectangle de 80 m de périmètre. Si on augmente sa largeur de 2 m et si on diminue sa longueur de 6 m alors l'aire de ce nouveau rectangle ne change pas. Quelles sont les dimensions du rectangle initial ?

Pour résoudre ce problème, on procède en plusieurs étapes.

• **Étape 1 :** recenser le nombre d'inconnues, choisir les inconnues principales et exprimer les autres inconnues en fonction de celles-ci.

a) Combien y-a-t-il de rectangles dans l'énoncé ? Combien de nombre sont inconnus ?

b) Choisir un des rectangles ; appeler x sa longueur et y sa largeur (en mètre). En s'aidant de l'énoncé, exprimer les dimensions du deuxième rectangle en fonction de x et y .

• **Étape 2 :** mettre en équation

Traduire par une égalité contenant les inconnues x et y , le fait que :

- le rectangle initial a un périmètre de 80 m ;
- les deux rectangles ont la même aire.

- Étape 3 : résoudre le système

Écrire, puis résoudre le système formé par les deux équations obtenues.

- Étape 4 : interpréter les solutions du système dans le cadre de l'énoncé et conclure.

a) La solution du système est-elle compatible avec l'énoncé du problème ?

b) Exprimer le résultat en complétant la phrase : « les dimensions du rectangle initial sont ... » ;

2. On dispose d'un rectangle de 80 m de périmètre. Si on augmente sa largeur de 2 m et si on diminue sa longueur de 6 m alors l'aire de ce nouveau rectangle diminue de 280 m². Quelles sont les dimensions du rectangle initial ?

a) Traiter ce problème en utilisant la même démarche que précédemment.

b) Devant quelle situation se trouve-t-on à l'étape 4 ? Que répondre à la question posée ?

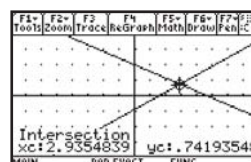
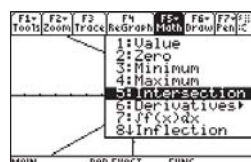
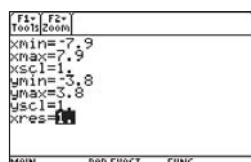
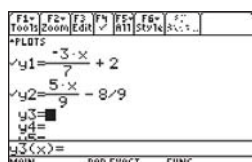


Calculatrice et système d'équations

1. Un élève souhaite utiliser sa calculatrice pour résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x + 7y = 14 \\ 5x - 9y = 8 \end{cases}$$

Il réalise alors les quatre actions qui sont restituées par les écrans suivants.



a) Justifier les choix de l'élève pour les valeurs de y_1 et y_2 .

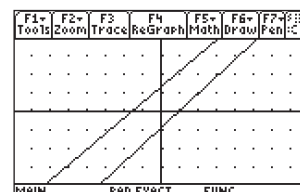
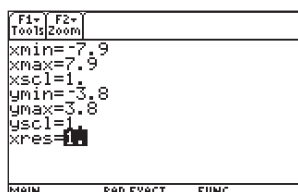
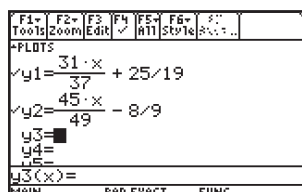
b) L'écran 2 correspond au choix de l'élève d'avoir un écran décimal par rapport à sa calculatrice. Ce choix initial vous paraît-il justifié à ce niveau ?

c) L'utilisation de la commande intersection lui permet d'obtenir pour couple solution (2,9354839 ; 0,74193548). Ce couple correspond-t-il à une solution exacte ?

d) Montrer par un calcul papier/crayon que le couple solution est le couple $\left(\frac{91}{31} ; \frac{23}{31}\right)$. Quel lien y-a-t-il entre ce couple et le couple proposé par la calculatrice ?

2. Ce même élève souhaite maintenant résoudre le système : $(S') \begin{cases} 589x - 703y = -925 \\ 405x - 441y = 392 \end{cases}$

Il réalise les actions suivantes, mais ne peut utiliser la commande intersection car celle-ci est hors du domaine choisi.



a) Justifier le choix de l'élève pour les valeurs de y_1 et y_2 .

b) Que feriez-vous avec votre calculatrice pour avoir une idée des coordonnées du point d'intersection ? Trouver alors une fenêtre qui permet d'avoir une valeur approchée de ces coordonnées et déterminer ensuite leurs valeurs exactes par un calcul papier/crayon.

Vrai ou faux ?

- 1 Toute droite du plan a une équation de la forme $y = mx + p$.

2 Toute fonction affine est représentée par une droite du plan.

3 Toute droite du plan est la représentation graphique d'une fonction affine.

4 La droite d'équation $y = -3x + 2$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(0 ; 2)$.

5 La droite de coefficient directeur 4 et d'ordonnée à l'origine 5 a pour équation $y = 5x + 4$.

6 La droite d'équation $y = -4$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

7 La droite d'équation $x = 3$ est parallèle à l'axe des abscisses.

8 Si une droite est parallèle à l'axe des abscisses alors elle n'a pas de coefficient directeur.

9 Si une droite est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle n'a pas d'ordonnée à l'origine.

10 Si une droite a pour ordonnée à l'origine 0 alors elle passe par le point O.
- 11 Si $A(2 ; 5)$ et $B(-3 ; 5)$, alors la droite (AB) a pour équation $x = 5$.

12 Toutes les droites qui ont une équation de la forme $y = 2x + p$, où p est un nombre réel quelconque, ont un point commun.

13 Toutes les droites qui ont une équation de la forme $y = mx + 2$, où m est un nombre réel quelconque, sont parallèles entre elles.

14 Le système :
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$
n'a pas de solution.

15 Le système :
$$\begin{cases} 5x - 15y = 35 \\ 2x + 6y = 14 \end{cases}$$
a une infinité de solutions.

16 Si $ab' - ba' = 0$, le système :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
n'a pas de solution.

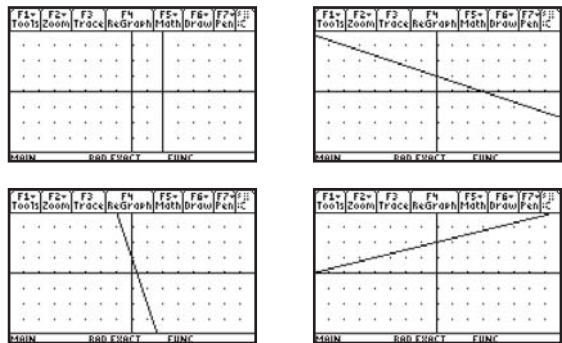
► Solutions p. 301

Les exercices numérotés en vert ■ correspondent à des savoir-faire indispensables.

Exercices d'application

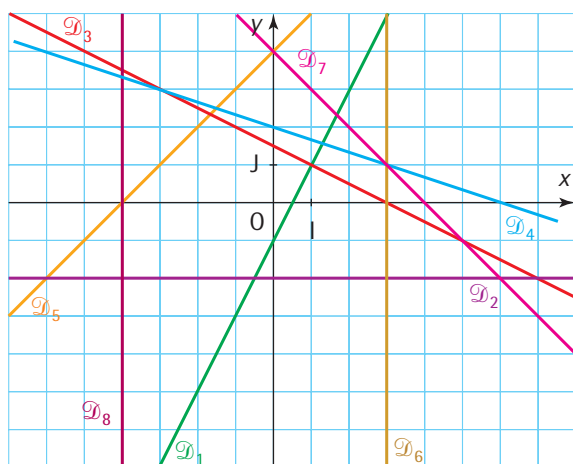
Équations de droites

- 17 Déterminer une équation de la droite représentée sur l'écran de la calculatrice. la grille correspond aux points à coordonnées entières tels que :
 $-7,9 \leq x \leq 7,9$ et $-3,8 \leq y \leq 3,8$.



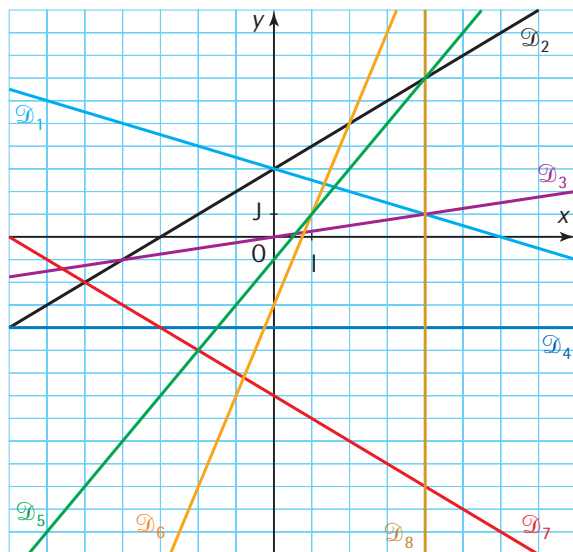
- 18 Utiliser les points à coordonnées entières du schéma ci-après pour compléter par lecture graphique le tableau.

Droite	Équation	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
D_1			
D_2			
D_3			
D_4			
D_5			
D_6			
D_7			
D_8			



► Solution p. 301

19 Même exercice que le précédent avec le schéma ci-dessous.



20 On donne les équations de droite suivantes :

$\mathcal{D}_1 : y = 2x + 5 ; \quad \mathcal{D}_2 : y = x - 4 ;$

$\mathcal{D}_3 : y = \frac{1}{2}x + 1 ; \quad \mathcal{D}_4 : y = -2 - 3x ;$

$\mathcal{D}_5 : y = \frac{1}{3}x ; \quad \mathcal{D}_6 : y = -3 ;$

$\mathcal{D}_7 : x = -2 ; \quad \mathcal{D}_8 : y = \frac{2}{3}x - 1.$

1. Quel est le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_7$ et $\mathcal{D}_8$?

2. Donner pour chacune des droites les coordonnées de deux points et celles d'un vecteur directeur.

3. Représenter les droites $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_8$ dans un repère orthonormal.

► Solution p. 302

21 Montrer que les équations suivantes peuvent s'écrire sous la forme $y = mx + p$. En déduire alors le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites et les représenter dans un repère orthonormal.

a) $y = \frac{x-3}{4} ; \quad \text{b) } y = \frac{15-3x}{5} ;$

c) $2x + y = 3 ; \quad \text{d) } x + 2y = 1 ;$

e) $x - 3y = 6 ; \quad \text{f) } x + \frac{1}{2}y + 2 = 0.$

► Solution p. 302

Pour les exercices 22 à 28, deux points A et B sont donnés par leurs coordonnées.

Déterminer une équation de la droite (AB).

Placer les points A et B dans un repère orthogonal et contrôler que l'équation obtenue est cohérente avec le graphique.

22 a) A(-3 ; 1) et B(4 ; -2).

b) A(5 ; 4) et B(2 ; -1).

► Solution p. 302

23 a) A(-7 ; -3) et B(4 ; -3).

b) A(-5 ; -2) et B(-5 ; 2).

24 a) A(-1 ; $\frac{1}{2}$) et B($\frac{1}{2}$; 3).

b) A(0,5 ; 1,2) et B(2,5 ; -1).

25 a) A(2 ; $\sqrt{2}$) et B(1 ; 0).

b) A($\sqrt{2}$; 2) et B(0 ; 1).

26 a) A(-5 ; $\frac{20}{3}$) et B($\frac{2}{3}$; $-\frac{10}{3}$).

b) A($3\sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$) et B($1 - \sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$).

27 a) A($-\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$) et B($1 - \frac{7}{5}$; 11).

b) A($\frac{5}{4}$; $\frac{1}{2}$) et B($\frac{7}{4}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$).

28 a) A(10^{-8} ; 10^9) et B(10^{-7} ; 10^8).

b) A(3×10^{-1} ; 2) et B(2 ; 3×10^{-1}).

Exercices

Droites parallèles

Pour les exercices 29 à 33, déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et parallèle à la droite Δ .

29 a) $A(-1 ; 4)$ et Δ a pour équation $y = 5x + 3$.

b) $A(2 ; 3)$ et Δ a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

► Solution p. 302

30 a) $A(0 ; -3)$ et Δ a pour équation $y = -3x + 3$.

b) $A(-3 ; 0)$ et Δ a pour équation $y = x$.

31 a) $A(0 ; 4)$ et Δ a pour équation $y = -3$.

b) $A(0 ; 4)$ et Δ a pour équation $x = -3$.

32 a) $A(1 ; 2)$ et Δ a pour équation $2x - y = 0$.

b) $A(2 ; 1)$ et Δ a pour équation $2x - y = 0$.

33 a) $A(\sqrt{2} ; -2)$ et Δ a pour équation $y = -\sqrt{2}x$.

b) $A(\sqrt{3} ; \sqrt{2})$ et Δ a pour équation $y = \sqrt{2}x - \sqrt{6}$.

Dans les exercices 34 à 37, déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à la droite (AB) et passant par le point C.

34 1. $A(5 ; -7)$, $B(2 ; 4)$ et $C(-3 ; 2)$.

2. $A(2 ; 3)$, $B(1 ; 7)$ et $C(0 ; 4)$.

► Solution p. 302

35 1. $A(\frac{5}{4} ; \frac{1}{2})$, $B(\frac{2}{3} ; -\frac{10}{3})$ et $C(-\frac{5}{6} ; \frac{1}{6})$.

2. $A(\frac{1}{5} ; \frac{1}{10})$, $B(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{20})$ et $C(-\frac{7}{5} ; \frac{1}{2})$.

36 1. $A(\sqrt{2} ; 2)$, $B(\sqrt{2} - 1 ; 3)$, et $C(1 ; \sqrt{2})$.

2. $A(\sqrt{3} ; \sqrt{5})$, $B(\sqrt{3} - 1 ; \sqrt{5} - 1)$, et $C(1 ; 1)$.

37 1. $A(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3})$, $B(3 ; 2)$ et $C(5 ; 5)$.

2. $A(5 ; \frac{1}{3})$, $B(3 ; \frac{1}{3})$, et $C(0 ; \frac{3}{2})$.

38 Dire si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, dont on donne les équations ou deux points, sont parallèles ou non.

1. $\mathcal{D} : y = \pi x + 1$ et $\mathcal{D}' : y = 3,14x - 1$.

2. $\mathcal{D}$ contient $A(-5 ; \frac{20}{3})$ et $B(1 ; \frac{2}{3})$ et $\mathcal{D}' : y = x + 2$.

3. $\mathcal{D}$ contient $A(0 ; \sqrt{5})$ et $B(1 ; 2\sqrt{5})$ et $\mathcal{D}'$ contient $E(\sqrt{5} ; \frac{1}{3})$ et $F(\sqrt{5} ; -1)$.

Système de deux équations

Pour les exercices 39 à 43, représenter les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si elles sont sécantes, donner par lecture graphique les coordonnées de leur point d'intersection.

Retrouver par le calcul ces coordonnées et vérifier la cohérence des deux résultats.

39 $\mathcal{D} : y = 3x - 5$ et $\mathcal{D}' : y = -3x + 2$.

► Solution p. 302

40 $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}x - 3$ et $\mathcal{D}' : y = 4$.

41 $\mathcal{D} : y = -\frac{5}{4}x + 3$ et $\mathcal{D}' : x = 8$.

42 $\mathcal{D} : y = -5x + 2$ et $\mathcal{D}' : y = 4x - 8$.

43 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ et $\mathcal{D}' : 6x + 3y = 9$.

Pour les exercices 44 et 45, préciser si les droites (AB) et (CD) sont sécantes. Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

44 1. $A(1 ; 5)$ et $B(3 ; 2)$; $C(-1 ; 4)$ et $D(2 ; 0)$.

2. $A(2 ; \frac{3}{2})$ et $B(\frac{3}{2} ; 1)$; $C(\frac{1}{4} ; -\frac{5}{2})$ et $D(-1 ; -\frac{1}{2})$.

45 1. $A(-1 ; 0)$ et $B(-1 ; 5)$; $C(3 ; -1)$ et $D(0 ; 3)$.

2. $A(2 ; \sqrt{3})$ et $B(\sqrt{3} ; 1)$; $C(\sqrt{3} ; -\sqrt{3})$ et $D(-1 ; -\sqrt{3})$.

3. $A(\pi ; -1)$ et $B(\pi ; 1)$; $C(\sqrt{2} ; 2)$ et $D(\sqrt{2} ; 0)$.

46 La droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = -\frac{3}{5}x + 6$, et la droite (AB)

telle que $A(2 ; -4)$ et $B(2 ; \frac{2}{3})$ sont-elles sécantes ?

Si oui déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

47 1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 9 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

2. a) Représenter à l'aide de votre calculatrice ou sur du papier millimétré les droites qui correspondent au système.

b) Donner par lecture graphique une valeur approchée aussi précise que possible de la solution du système et vérifier la cohérence entre les résultats graphiques et les résultats algébriques.

► Solution p. 302

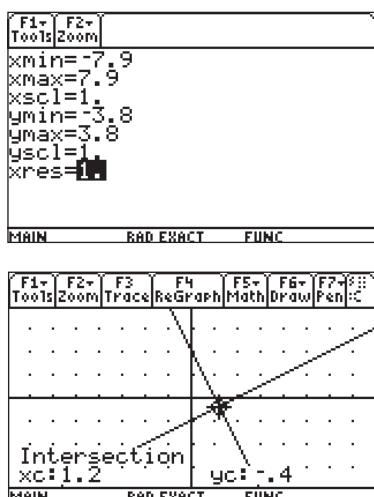
48 a) Montrer que le système (I) est équivalent au système (II) :

$$(I) \begin{cases} 6x + 3y = 24 \\ -0,2x + 0,4y = 0,4 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases}$$

b) Résoudre le système I.

c) À quoi correspond graphiquement la solution du système (I) ? Contrôler à l'aide d'un graphique la cohérence du résultat que vous avez obtenu.

49 1. Préciser quel est le système résolu graphiquement sur les écrans de la calculatrice ci-dessous.



2. Vérifier par le calcul la validité de la réponse.

Pour les exercices 50 à 54, déterminer si le système proposé a une solution unique.

Si oui, résoudre le système et déterminer cette solution.

Si non, combien de solutions le système possède-t-il ?

50 a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$.

► Solution p. 302

51 a) $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 10x + 6y = 10 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ -4x + y = -2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 39x + 52y = 127 \\ 21x + 28y = 101 \end{cases}$.

52 a) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 7x + 6y = 14 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 7x - 3y = 15 \\ -49x + 21y = -105 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 6x + 2y = 7 \\ 3x + 5y = -3 \end{cases}$.

53 a) $\begin{cases} 2x\sqrt{3} - 5y = 35 \\ 6x - 5y\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x\sqrt{2} + y(\sqrt{2} - 1) = 8 \\ x(\sqrt{2} + 1) + y\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$.

54 On veut résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

c'est-à-dire déterminer un couple de nombres $(x ; y)$ qui vérifie simultanément les trois équations.

1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Vérifier que le couple solution obtenu est aussi solution de la troisième équation et conclure.

2. Écrire le système (S) sous la forme :

$$\begin{cases} y = \dots \\ y = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

Interpréter alors graphiquement le couple solution obtenu dans la question 1.

3. Reprendre les questions 1. et 2. avec le système :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - y = 2 \\ x - 3y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

55 Montrer que les droites suivantes sont concourantes :

- $\mathcal{D}_1 : y = 2x - 1$;
- $\mathcal{D}_2 : y = \frac{3}{2}x + 4$;
- $\mathcal{D}_3 : y = -\frac{1}{10}x + 20$.

► Solution p. 302

56 1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

2. Interpréter graphiquement la solution du système.

3. Mêmes questions avec le système :

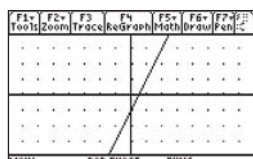
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Exercices d'approfondissement

Équations de droites

57 Parmi les équations ci-dessous lesquelles sont compatibles avec le graphique donné ?

- a) $y = 2x - 1$
- b) $y = -20x - 10$
- c) $y = 0,02x - 0,0001$
- d) $y = 400\,000x - 100$
- e) $y = 10^{-10}x - 10^{10}$



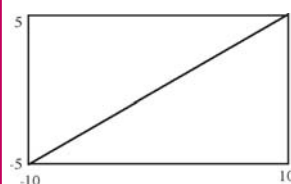
Dans chaque cas préciser les unités sur chaque axe.

58 Déterminer, pour chacun des écrans, l'équation de la droite qui a permis d'obtenir dans la fenêtre donnée la représentation d'une diagonale.

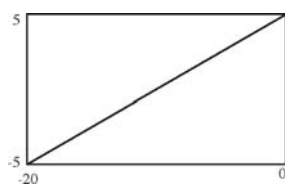
Pour le premier écran, par exemple, la fenêtre est :

$$x_{\min} = -10, x_{\max} = 10, y_{\min} = -5 \text{ et } y_{\max} = 5.$$

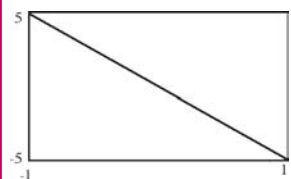
1.



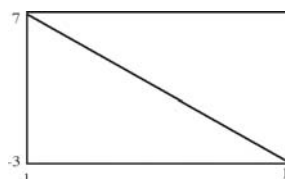
2.



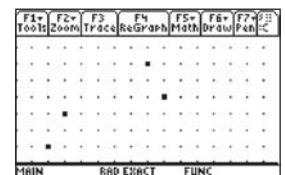
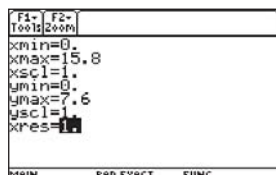
3.



4.



59 Soit les points A(2 ; 1), B(3 ; 3), C(9 ; 4) et D(8 ; 6). Ces points sont indiqués sur l'écran de la calculatrice ci-dessous.



1. Déterminer une équation des droites (AC), (BD), (AB), (CD), (AD) et (BC).
2. Déterminer une équation d'une droite Δ qui vérifie les deux conditions suivantes :
 Δ passe par un point du segment [AB] différent de A et de B et Δ passe par un point du segment [CD] différent de C et de D.

60 Soit la fonction $f: x \mapsto x^3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et 1,01.

2. Soit a un nombre réel. Démontrer que :

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1).$$

Déterminer en fonction de a , une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 1 et a .

61 Dans un repère orthonormal $(O ; I ; J)$.

1. Représenter la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$y = -\frac{5}{3}x + 2$$

en utilisant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.

2. Le point A de coordonnées $\left(\frac{9}{2}; -\frac{11}{2}\right)$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?

3. Soit B le point de coordonnées $(-5 ; 6)$. Tracer la droite (AB). Déterminer son équation et contrôler le résultat obtenu à l'aide du graphique.

4. Tracer la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et passant par le point B. Déterminer son équation et contrôler le résultat obtenu à l'aide du graphique.

62 1. a) Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm tracer la droite d_1 d'équation :

$$y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

- b) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d_1 .
- c) Déterminer les coordonnées du point A intersection de d_1 et de l'axe des abscisses et celles de B intersection de d_1 et de l'axe des ordonnées.

2. Déterminer l'équation de la droite d_2 parallèle à d_1 et qui passe par le point C de coordonnées $(2 ; 3)$.

3. a) Construire le point D tel que ABCD soit un parallélogramme et déterminer par le calcul ses coordonnées.

b) Déterminer l'équation des droites (AC) et (BD).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (BD). Pourrait-on retrouver autrement ce dernier résultat ?

► Solution p. 302

63 1. Déterminer graphiquement l'ensemble D des points du plan dont les coordonnées vérifient le système :
 (on hachurera la partie du plan qui ne convient pas).

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

2. On considère la famille de droites Δ_p d'équation :

$$y = -\frac{1}{4}x + p$$

où p est un nombre réel.

a) Caractériser la famille de droites Δ_p ?

b) Tracer la droite Δ_0 et tracer la droite Δ_3 .

c) Quel est le point du domaine D pour lequel la droite Δ_p a la plus grande ordonnée à l'origine ?

Déterminer les coordonnées de ce point puis la valeur de p correspondante.

64 ABC est un triangle. C' est le milieu de [AB]. I est le milieu de [CC'].

La droite (AI) coupe la droite (BC) en K. La droite D parallèle à (CC') et passant par K, coupe la droite (AB) en M.

1. Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$, déterminer les coordonnées des points C' et I.

2. Déterminer une équation de la droite (AI).

3. Déterminer une équation de la droite (BC).

4. Calculer les coordonnées du point K.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$.

6. En déduire les coordonnées du point M, puis une relation entre les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$.

► Solution p. 302

65 ABCD est un parallélogramme. Soit I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [CD]. Les droites (AJ) et (CI) coupent le segment [BD] respectivement en E et F.

Démontrer que $\vec{DE} = \vec{EF} = \vec{FB}$ en utilisant les deux méthodes proposées.

a) Par un raisonnement géométrique.

b) En utilisant un repère et des équations de droites.

66 ABCD est un parallélogramme. Les points I, J, K et L sont définies par :

$$\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB}; \vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}; \vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CD}; \vec{DL} = \frac{3}{4}\vec{DA}.$$

Démontrer que les droites (IJ), (AC) et (LK) sont concourantes (on peut utiliser le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$).

► Solution p. 302

67 Dans un triangle ABC, on appelle A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].

1. Quelles sont, dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$, les coordonnées des points A', B' et C' ?

2. Déterminer les équations des trois médianes du triangle ABC.

3. Déterminer les coordonnées du point G intersection des droites (AA') et (BB').

4. Vérifier que G est un point de la droite (CC').

5. Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AA'}$, puis $\vec{BG}$ en fonction de $\vec{BB'}$, et $\vec{CG}$ en fonction de $\vec{CC'}$.

6. Énoncer le théorème qui vient d'être démontré.

68 Soit un trapèze ABCD tel que :

$$\vec{DC} = \frac{2}{3}\vec{AB}.$$

Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E. Les supports des côtés (AD) et (BC) se coupent en F. I est le milieu du segment [AB] et J est le milieu du segment [CD].

On considère le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$.

1. Quelles sont les coordonnées des points C, I et J ?

2. Déterminer les équations des droites (AC) et (BD). en déduire les coordonnées du point E.

3. Déterminer les équations des droites (AD) et (BC). en déduire les coordonnées du point F.

4. Les points E, F, I et J sont-ils alignés ?

Systèmes de deux équations

69 La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

(a , b et c étant trois nombres réels) passe par le point A de coordonnées (0 ; 2).

1. En déduire la valeur du nombre c .

2. La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points : B(2 ; -4) et C(5 ; 3). en déduire les valeurs de a et b .

3. Représenter graphiquement la fonction f .

70 On veut résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 26 \\ -2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases} \text{ avec } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

1. Le couple (4 ; 25) est-il solution de ce système ?

2. Poser $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$. Quel est le nouveau système (S_1) obtenu à partir de (S) avec ces nouvelles inconnues ?

3. Pour quelles valeurs de X et Y , le système (S_1) est-il vérifié ?

4. Exprimer x et y en fonction de X et Y .

5. Quels sont les couples (x ; y) solutions du système (S) ?

Exercices

71 En s'inspirant de l'exercice 70, résoudre les systèmes suivants.

1. $(S_2) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 26 \\ -\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

2. $(S_3) \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 26 \\ -2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Mise en équation

72 Trouver deux nombres dont la somme vaut 2 002 et la différence 1 790.

► Solution p. 302

73 Trouver deux nombres dont la différence vaut 517 et le quotient 12.

74 Trouver deux nombres dont l'un est le triple de l'autre et dont le produit est égal à 243.

75 La différence de deux nombres positifs est 1 225.

De plus les $\frac{4}{9}$ de l'un sont égaux aux $\frac{3}{5}$ de l'autre.

Quels sont ces nombres ?

76 1. Vérifier que :

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy.$$

2. Déterminer deux entiers positifs x et y tels que leur somme est égale à 17 et leur produit à 60.

77 Déterminer un nombre de deux chiffres sachant que la somme de ses chiffres est égale à 12 et que le nombre diminue de 18 quand on permute ses deux chiffres.

Remarque : de façon générale un nombre de deux chiffres qui s'écrit « ab » (a étant le chiffre des dizaines et b celui des unités) est égal à : $a \times 10 + b$.

► Solution p. 302

78 Déterminer un nombre de deux chiffres sachant que le triple du chiffre des unités est égal au double du chiffre des dizaines et que le nombre diminue de 18 quand on permute ses deux chiffres.

79 Deux récipients permettent à eux deux de mesurer 60 cL de liquide. Le contenu de 8 récipients identiques au premier remplit exactement 4 récipients identiques au second. Quelle est la contenance de chaque récipient ?

80 Si on augmente la longueur de 1 m et on diminue la largeur de 2 m d'un terrain rectangulaire, alors on diminue son aire de 30 m².

Pour ce même terrain, si on augmente la largeur de 1 m et on diminue la longueur de 2 m alors l'aire du terrain augmente de 6 m². Quelles sont les dimensions de ce terrain ?

Problèmes

81 Chercher des nombres entiers

La différence de deux nombres entiers naturels est égale à 24.

1. Si on ajoute 8 à chacun de ces nombres, on obtient deux nouveaux nombres dont le plus grand est le triple du plus petit. Quels sont s'ils existent, les entiers initiaux ?

2. Si on ajoute 14 à chacun des ces nombres, on obtient deux nouveaux nombres dont le plus grand est le triple du plus petit. Quels sont s'ils existent, les entiers initiaux ?

82 L'énigme de l'émir

Un émir se rend en limousine de son palais à son aéroport personnel sur son autoroute privée toujours à la même vitesse.

1. Quelle est la relation entre le temps, la distance et la vitesse constante ?

2. Un jour, le chauffeur augmente la vitesse de 20 km · h⁻¹ et fait ainsi gagner 2 min à l'émir.

Le lendemain, le chauffeur diminue la vitesse de 20 km · h⁻¹ et fait ainsi perdre 3 min à l'émir.

Quelle est la distance séparant le palais de l'aéroport ?

83 Tarifs réduits

Dans un musée, on enregistre, dans une journée à tarif normal, une recette de 865 euros pour 140 entrées adultes et 55 entrées enfants.

Le lendemain, journée à tarif réduit, les prix d'entrée baissent de 25 % pour les adultes et de 50 % pour les enfants. On enregistre alors une recette de 705 euros pour 180 entrées adultes et 20 entrées enfants.

Quels sont les prix d'entrée à tarif normal pour les adultes et pour les enfants ?

84 La chute du projectile

On sait que l'altitude y (en mètres) d'un projectile lancé d'une base B s'exprime en fonction du temps t (exprimé en secondes) par la formule $y = at^2 + bt + c$.

À l'instant $t_0 = 0$, le projectile est lancé de la base B, l'altitude de la base est 300 m.

1. Quelle est la valeur de c ?

2. À l'instant $t_1 = 10$ (soit 10 secondes après le départ), le projectile est à l'altitude 2 800 m.

À l'instant $t_2 = 20$ (soit 20 secondes après le départ), le projectile est à l'altitude 4 300 m.

Déterminer les réels a et b .

3. a) Représenter dans un repère orthogonal en choisissant des unités adaptées la courbe qui représente l'altitude en fonction du temps.

b) Déterminer, par une résolution graphique, l'instant t_3 où le projectile retombera en mer (altitude 0).

85 Lecture graphique, relation temps-vitesse

Deux villes A et B sont distantes de 30 km. Le graphique représente les parcours $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux cyclistes F et G entre A et B en fonction du temps.

1. Décrire les parcours de F et G (heure et lieu d'arrivée et de départ, sens du déplacement, temps d'arrêt).

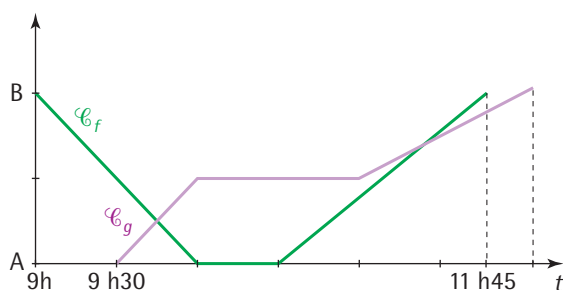
2. Déterminer les vitesses de F et G lors des différentes phases du trajet.

3. Graphiquement, les deux cyclistes se croisent-ils, se dépassent-ils ? Si oui, quand et à quelle distance de A ?

4. a) On note $f(t)$ la distance à laquelle se trouve F de A à l'instant t et on compte positivement les distances en allant de A vers B. Exprimer $f(t)$ en fonction de t .

b) Avec les mêmes conventions exprimer $g(t)$ en fonction de t .

c) Retrouver les résultats de la question 3. par le calcul ?



86 Points alignés

ABCD est un rectangle. P est un point intérieur à ABCD. Par P, on trace la parallèle à (AB) qui coupe (AD) en J et (BC) en L. Par P, on trace la parallèle à (AD) qui coupe (AB) en I et (DC) en K. On trace ensuite les droites (JK) et (IL). Dans le cas où elles sont sécantes, on appelle M leur point d'intersection.

On utilise le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$.

1. On place P tel que :

$$\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AB} \text{ et } \vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

a) Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les droites (JK) et (IL) ?

b) Déterminer les équations des droites (JK) et (IL) et démontrer cette conjecture.

2. On place P tel que :

$$\vec{AI} = \frac{3}{5}\vec{AB} \text{ et } \vec{AJ} = \frac{4}{5}\vec{AD}.$$

a) Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les droites (JK) et (IL) ?

b) Déterminer les équations des droites (JK) et (IL) et démontrer cette conjecture.

3. On place P tel que :

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} \text{ et } \vec{AJ} = k\vec{AD} \text{ avec } 0 \leq k \leq 1.$$

a) Démontrer, par un raisonnement géométrique, que si $k = \frac{1}{2}$, alors les droites (JK) et (IL) sont parallèles.

b) On suppose maintenant que $k \neq \frac{1}{2}$.

α. Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les droites (JK) et (IL) ?

β. Déterminer les équations des droites (JK) et (IL) en fonction de k . Vérifier que ces droites sont sécantes en M et déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .

γ. Démontrer que M est un point de la droite (AC).

87 Les billets de banque

1. Peut-on, avec 58 billets, certains de 5 euros et d'autres de 10 euros : obtenir la somme de

a) 395 euros ?

b) 230 euros ?

2. Avec 58 billets, certains de 5 euros et d'autres de 10 euros quelle est :

a) la somme minimale que l'on peut obtenir ?

b) la somme maximale que l'on peut obtenir ?

3. Avec 58 billets, certains de 5 euros et d'autres de 10 euros, déterminer toutes les valeurs de la somme S que l'on peut obtenir.

Y a-t-il une relation entre la somme S que l'on obtient et le nombre de billets de 5 euros ? Si oui, laquelle ?

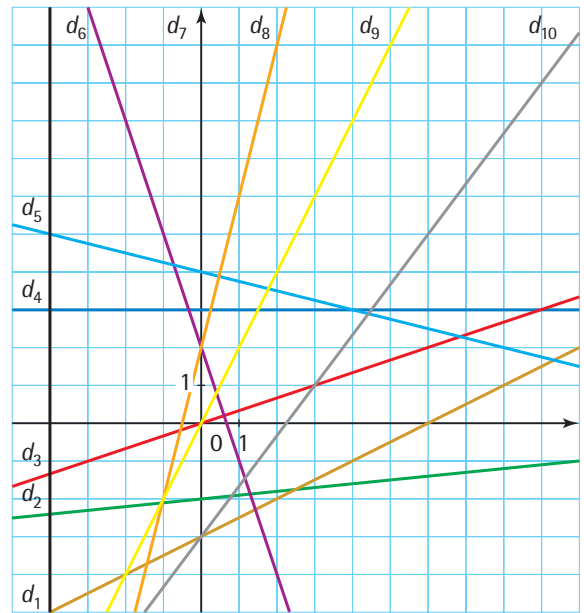
Vers l'aide individualisée

..... Exercice 1. Déterminer une équation de droite par lecture graphique

1- Associer à chacune des 10 droites du graphique ci-contre les propriétés qu'elle vérifie parmi la liste suivante :

- P_1 : la droite est parallèle à un axe du repère.
- P_2 : la droite passe par O.
- P_3 : l'ordonnée à l'origine est positive.
- P_4 : l'ordonnée à l'origine est négative.
- P_5 : le coefficient directeur est positif.
- P_6 : le coefficient directeur est négatif.
- P_7 : la valeur absolue du coefficient directeur est strictement comprise entre 0 et 1.
- P_8 : la valeur absolue du coefficient directeur est strictement supérieure à 1.

2- Écrire pour chacune des droites une équation en vous aidant des renseignements précédents.



Attention ! Pour déterminer la valeur absolue du coefficient directeur utiliser deux points à coordonnées entières et déterminer la variation des ordonnées sur celles des abscisses.

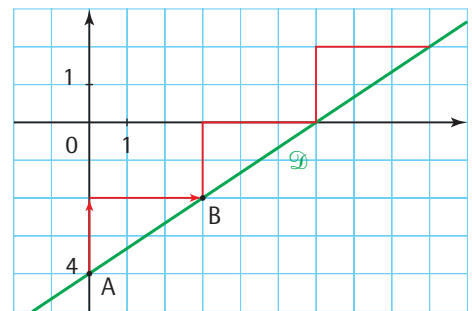
..... Exercice 2. Construire des droites et déterminer des intersections

Attention ! Pour construire la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$y = \frac{2}{3}x - 4,$$

on place le point A de coordonnées (0 ; -4) associé à l'ordonnée à l'origine. Ensuite on construit le point B tel que pour aller de A à B, on se déplace vers les y positifs de 2 unités et vers les x positifs de 3 unités, ce qui correspond au coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{3}.$$



1- Utiliser cette méthode pour construire les droites $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = -x + 3$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 2x - 3$.

2- Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 . Retrouver ces coordonnées par le calcul et vérifier la cohérence des résultats.

Attention ! Pour déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2 , il faut résoudre un système. Les coordonnées obtenues par lecture graphique sont souvent approximatives, seul le calcul permet de déterminer les valeurs exactes.

Si les valeurs exactes ne correspondent pas, en valeur approchée aux valeurs trouvées graphiquement alors : soit le graphique est incorrect, soit la lecture graphique est incorrecte, soit le calcul est incorrect.